

ПРИМЕР. Работа механизма контролируется по  $N$  параметрам, которые могут принимать два значения 0 или 1. Количество параметров и их нормальное значение задано десятичным числом 341. При несовпадении хотя бы одного из параметров механизм отключается. Составить схему управления механизмом, используя логические элементы ЗИ-НЕ, ЗИЛИ-НЕ.

#### РЕШЕНИЕ.

1. Заданное десятичное число 341 преобразуем в двоичное: 101010101. Следовательно, механизм контролируется по 9 параметрам (двоичное число имеет 9 разрядов). Нормальное значение параметров:  $X_9=1, X_8=0, X_7=1, X_6=0, X_5=1, X_4=0, X_3=1, X_2=0, X_1=1$ .

2. Таблица истинности. Логическая функция зависит от 9 аргументов. Следовательно, таблица истинности должна состоять из 512 наборов. Только для одного заданного набора функция равна 1. Поэтому нет смысла приводить все наборы. Ограничимся для примера только пятью.

Таблица 20

$X_9$	$X_8$	$X_7$	$X_6$	$X_5$	$X_4$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$F$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

3. Логическая функция. При составлении логической функции по таблице истинности через минтермы

$$F = \sum F_i \cdot m_i,$$

где  $F_i, m_i$  – значение функции и минтерм, соответствующие  $i$ -ой строке. Минтерм – это произведение (конъюнкция) всех переменных составляющих строки. Переменные входят в произведение в прямом виде, если их значение в строке 1, и в инверсном, если их значение 0. Так как  $F=1$  только для одной строки, то логическая функция будет содержать только один минтерм

$$F = X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} \cdot X_5 \cdot \overline{X_6} \cdot X_7 \cdot \overline{X_8} \cdot X_9.$$

4. Преобразование логической функции в соответствие с данными элементами. Используемые логические элементы выполняют следующие функции:

$$\text{ЗИ-НЕ} \quad F_1 = \overline{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3},$$

$$\text{ЗИЛИ-НЕ} \quad F_2 = \overline{X_1 + X_2 + X_3}.$$

Преобразуемая функция  $F$  содержит 9 переменных, а у каждого из логических элементов можно использовать не более 3 входов. Поэтому надо произвести декомпозицию функции  $F$ , т. е. представить ее в виде набора функций  $F_1$  и  $F_2$ , каждая из которых должна содержать не более 3 переменных. Подобные преобразования проводят, используя законы и теоремы алгебры логики. Применив закон ассоциативности (Приложение 7), исходную функцию представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} F &= X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} \cdot X_5 \cdot \overline{X_6} \cdot X_7 \cdot \overline{X_8} \cdot X_9 = \\ &= (X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) \cdot (\overline{X_4} \cdot X_5 \cdot \overline{X_6}) \cdot (X_7 \cdot \overline{X_8} \cdot X_9). \end{aligned}$$

Выполнив операцию двойного отрицания каждого члена и используя теорему де-Моргана (Приложение 7), получим

$$F = \overline{\overline{(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)}} \cdot \overline{\overline{(X_4 \cdot X_5 \cdot X_6)}} \cdot \overline{\overline{(X_7 \cdot X_8 \cdot X_9)}} = \\ = \overline{\overline{(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)}} + \overline{\overline{(X_4 \cdot X_5 \cdot X_6)}} + \overline{\overline{(X_7 \cdot X_8 \cdot X_9)}}.$$

В такой форме функция  $F$  может быть реализована на заданных элементах. Инверсию  $X_2, X_4, X_6, X_8$  можно выполнить на элементах И-НЕ или ИЛИ-НЕ, объединив их входы. Схема соединения элементов представлена на рис. 13.

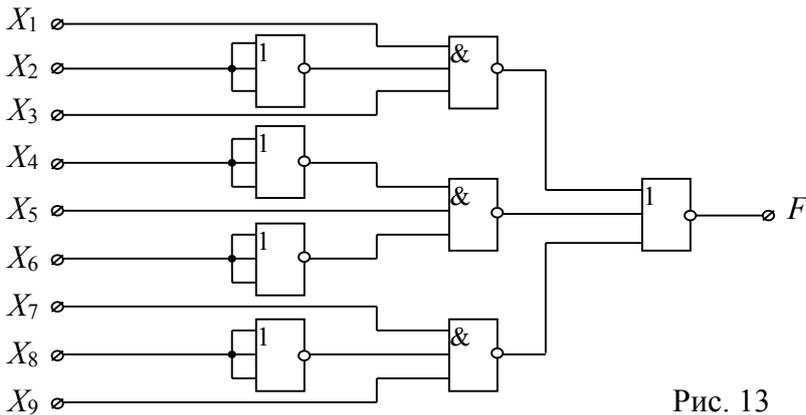


Рис. 13

Для реализации схемы требуется 8 логических элементов (5 элементов ЗИЛИ-НЕ и 3 элемента ЗИ-НЕ). При другом методе декомпозиции функции  $F$  число логических элементов можно уменьшить. Например, исходную функцию можно представить так:

$$F = X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} \cdot X_5 \cdot \overline{X_6} \cdot X_7 \cdot \overline{X_8} \cdot X_9 = \\ = (X_1 \cdot X_3 \cdot X_5) \cdot [X_7 \cdot X_9 \cdot \overline{(X_2 \cdot X_4 \cdot X_6)}] \cdot \overline{X_8} = (X_1 \cdot X_3 \cdot X_5) \cdot [X_7 \cdot X_9 \cdot \overline{(X_2 + X_4 + X_6)}] \cdot \overline{X_8} = \\ = \overline{\overline{(X_1 \cdot X_3 \cdot X_5)}} \cdot \overline{\overline{[X_7 \cdot X_9 \cdot \overline{(X_2 + X_4 + X_6)]}}} \cdot \overline{\overline{X_8}} = \overline{\overline{(X_1 \cdot X_3 \cdot X_5)}} + \overline{\overline{X_7 \cdot X_9 \cdot (X_2 + X_4 + X_6)}} + \overline{\overline{X_8}}.$$

В таком виде ее тоже можно реализовать на заданных элементах. Схема соединения логических элементов приведена на рис. 14.

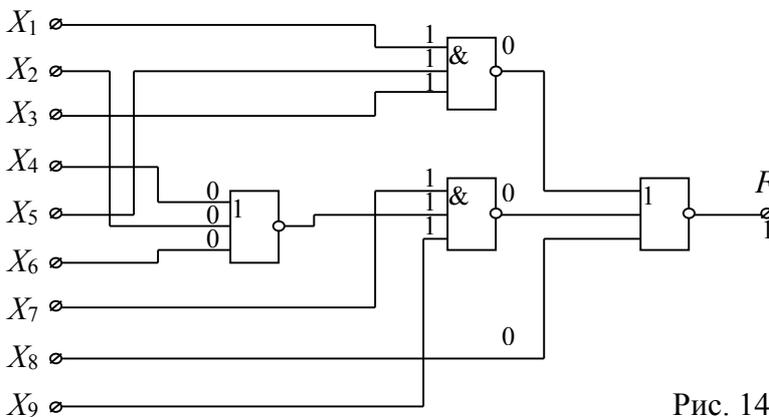


Рис. 14

В схеме использовано только 4 логических элемента (2 элемента ЗИ-НЕ и 2 элемента ЗИЛИ-НЕ). Такая схема более экономична и обладает большим быстродействием. Поэтому при проектировании всегда стараются оптимизировать схему. Для проверки работы схемы

на входах  $X_1 \dots X_9$  указаны значения переменных и значение функции. Легко проверить, что при любом другом наборе  $F=0$ .

## Приложение 7

### Аксиомы и законы алгебры логики

Аксиомы (тождества)	$1+x=1$ $0+x=x$ $x+x=x$ $x+\bar{x}=1$ $\overline{\bar{x}}=x$	$0 \cdot x=0$ $1 \cdot x=x$ $x \cdot x=x$ $x \cdot \bar{x}=0$ $x_1 + \overline{x_1 \cdot x_2} = x_1 + x_2$
Операция склеивания	$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} = x_1$	
Законы коммутативности	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$	$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$
Законы ассоциативности	$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$	
Законы дистрибутивности	$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3)$ $x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3)$	
Законы дуальности (теоремы де Моргана)	$\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	$\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$
Законы поглощения	$x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1$	$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1$