Пример расчета Л.Р. №1,1

Цель работы: практическое освоение методов расчета сложных электрических цепей постоянного тока.

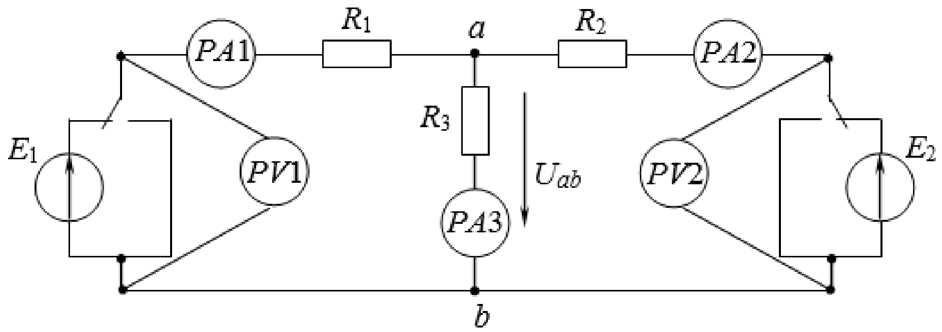
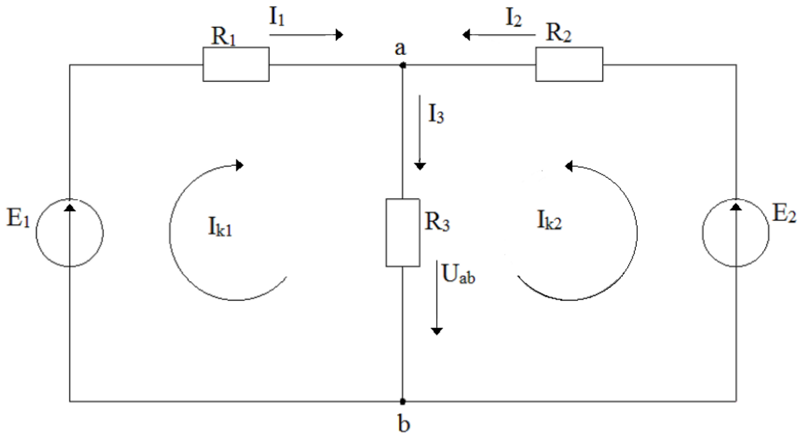


Рис 1.1 Монтажная схема

Предварительные расчеты

Составим расчетную схему:



Дано: R_1= 50 Ом , R_2 = 40 Ом , R_3 = 20 Ом , U_1 = 26 В , U_2 = 20 В.($U = E$)

Метод по законам Кирхгофа

1) произвольно намечают направления токов ветвей и, если цепь имеет *n* узлов, то по первому закону Кирхгофа записывают (*n-1*) уравнений, так как уравнение для *n-го* узла является следствием предыдущих;

2) произвольно намечают направления обхода контуров и по второму закону Кирхгофа записывают $m-(n-1)$ уравнений. При этом контуры выбирают так, чтобы каждый из них содержал хотя бы одну, не учтенную ранее, ветвь;

3) решая систему *m* уравнений, находят токи. Если значения некоторых токов отрицательные, то действительные направления их будут противоположны первоначально выбранным .

Для нашей электрической цепи $n = 2$, $m = 3$, и расчет токов цепи осуществляется путем решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1R_1 + I_3R_3 = E_1 \\ I_2R_2 + I_3R_3 = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 50 + I_3 20 = 26 \\ I_2 40 + I_3 20 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 25 + I_3 10 = 13 \\ I_2 2 + I_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - (1 - 2I_2) = 0 \\ 25I_1 + 10(1 - 2I_2) = 13 \\ I_3 = 1 - 2I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + 3I_2 = 1 \\ 25I_1 - 20I_2 = 3 \\ I_3 = 1 - 2I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 1 - 3I_2 \\ 25(1 - 3I_2) - 20I_2 = 3 \\ I_3 = 1 - 2I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 1 - 3I_2 \\ 25 - 75I_2 - 20I_2 = 3 \\ I_3 = 1 - 2I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 1 - 3I_2 \\ 25 - 95I_2 = 3 \\ I_3 = 1 - 2I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 1 - 3 * 0.231579 = 0.30 \\ I_2 = 0.231579 = 0.23 \\ I_3 = 1 - 2 * 0.231579 = 0.53 \end{cases}$$

Решив систему уравнений получим: $I_1 = 0.30$; $I_2 = 0.23$; $I_3 = 0.53$ А

Метод контурных токов

1) цепь разбивают на отдельные контуры и в каждом контуре произвольно выбирают направление условно действующего контурного тока, замыкающегося только в данном контуре;

2) выбрав обход контуров совпадающим с направлением контурных токов, для каждого контура записывают уравнение по второму закону Кирхгофа, при этом учитывают падения напряжения на элементах рассматриваемого контура и от соседних контурных токов;

3) решая полученную систему уравнений, находят контурные токи;

4) действительные токи ветвей определяются алгебраическим суммированием контурных токов, протекающих в них.

Для нашей электрической цепи получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} E_1 = (R_1 + R_3)I_{k1} + R_3 I_{k2} \\ E_2 = (R_2 + R_3)I_{k2} + R_3 I_{k1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (50 + 20)I_{k1} + 20I_{k2} = 26 \\ (40 + 20)I_{k2} + 20I_{k1} = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 70I_{k1} + 20I_{k2} = 26 \\ 60I_{k1} + 20I_{k1} = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35I_{k1} + 10I_2 = 13 \\ 3I_{k2} + I_{k1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35(1 - 3I_{k2}) + 10I_2 = 13 \\ I_{k1} = 1 - 3I_{k2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35 - 105I_{k2} + 10I_{k2} = 13 \\ I_{k1} = 1 - 3I_{k2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22 = 95I_{k2} \\ I_{k1} = 1 - 3I_{k2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{k2} = \dfrac{22}{95} = 0.231579 = 0.23 \\ I_{k1} = 1 - 3 * 0.231579 = 0.30 \end{cases}$$

Решив систему уравнений получим:
$I_1 = I_{k1} = 0.30$; $I_2 = I_{k2} = 0.23$; $I_3 = I_{k1} + I_{k2} = 0.30 + 0.23 = 0.53$ А

Метод контурных токов(матрица)

Составим матричное уравнение контурных токов. $(R)(I)=(U)$,где (R) — матрица контурных сопротивлений; (I) — матрица неизвестных контурных токов; (U) — матрица ЭДС контуров.

$$(R) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$$

Где R_{11} – сумма всех сопротивлений первого контура
R_{22} – сумма всех сопротивлений второго контура
$R_{12} = R_{21}$ – сумма всех сопротивлений смежной ветви первого и второго контуров

$$(R) = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}$$

$$(R) = \begin{pmatrix} 50 + 20 & 20 \\ 20 & 40 + 20 \end{pmatrix}$$

$$(R) = \begin{pmatrix} 70 & 20 \\ 20 & 60 \end{pmatrix}$$

$$(I_k) = \begin{pmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \end{pmatrix}$$

$$(U) = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$(I) = (Z)^{-1}(U) = \begin{pmatrix} 70 & 20 \\ 20 & 60 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{190} & -\frac{1}{190} \\ -\frac{1}{190} & \frac{7}{380} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0157895 & -0.00526316 \\ -0.00526316 & 0.0184211 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.23 \end{pmatrix}$$

Первое действие:
Для вычисления обратной матрицы запишем матрицу A, дописав к ней справа единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 70 & 20 & 1 & 0 \\ 20 & 60 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Теперь чтобы найти обратную матрицу, используя элементарные преобразования над строками матрицы, преобразуем левую часть полученной матрицы в единичную.
1-ую строку делим на 70:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{70} & 0 \\ 20 & 60 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 20:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{70} & 0 \\ 0 & \frac{380}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \end{array}\right)$$

2-ую строку делим на $\frac{380}{7}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{70} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{190} & \frac{7}{380} \end{array}\right)$$

от 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на $\frac{2}{7}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{190} & -\frac{1}{190} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{190} & \frac{7}{380} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{190} & -\frac{1}{190} \\ -\frac{1}{190} & \frac{7}{380} \end{pmatrix}$$

Второе действие:

$$\mathrm{C} = A * B = \begin{pmatrix} 0.0157895 & -0.00526316 \\ -0.00526316 & 0.0184211 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.23 \end{pmatrix}$$

$C_{11}=A_{11}*B_{11} + A_{12}*B_{21}$ = 0.0157895*26 + (-0.00526316)*20 = 0.410527 – 0.1052632 = 0.3052638

$C_{21}=A_{21}*B_{11} + A_{22}*B_{21}$ = (-0.00526316)*26 + 0.0184211*20 = -0.13684216 + 0.368422 = 0.23157984

Получаем, что: $I_1 = I_{k1} = 0.30$; $I_2 = I_{k2} = 0.23$; $I_3 = I_{k1}+I_{k2} = 0.30+0.23 = 0.53$ А

Метод двух узлов

1) произвольно выбирают направление узлового напряжения U_{ab} и определяют его величину по формуле:

$$U_{ab} = \frac{\sum_1^n g_k E_k}{\sum_1^m g_k},$$

где $\sum_1^n g_k E_k$ – алгебраическая сумма произведений суммарной ЭДС ветви и суммарной проводимости ветви (ЭДС, входящие в ветвь, берут со знаком плюс, если их направления противоположны направлению напряжения U_{ab} и со знаком минус, когда их направления совпадают с направлением U_{ab});

$\sum_1^m g_k$ – сумма проводимостей всех ветвей цепи.

Для заданной цепи узловое напряжение:

$$U_{ab} = \frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{26}{50}+\frac{20}{40}}{\frac{1}{50}+\frac{1}{40}+\frac{1}{20}} = \frac{0{,}52+0{,}5}{0{,}02+0{,}025+0{,}05} = \frac{1{,}02}{0{,}095} = 10.73\ \text{В}$$

Рассчитывают токи в ветвях по обобщенному закону Ома:

$$I_1 = \frac{E_1-U_{ab}}{R_1} = \frac{26-10.73}{50} = 0.30\ \text{А}$$

$$I_2 = \frac{E_2-U_{ab}}{R_2} = \frac{20-10.73}{40} = 0.23\ \text{А}$$

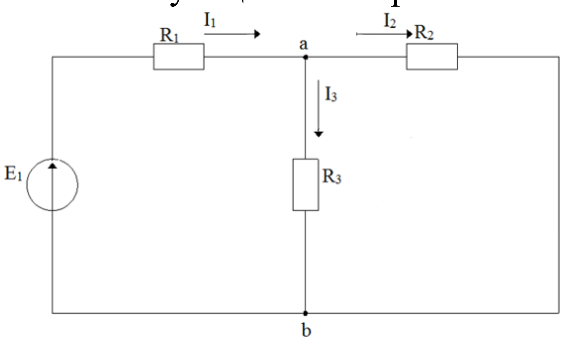
$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{10.73}{20} = 0.53\ \text{А}$$

Метод наложения основан на принципе наложения, согласно которому в линейной электрической цепи, содержащей несколько источников питания, токи ветвей рассматривают как алгебраическую сумму токов, вызываемых в этих ветвях действием каждой ЭДС в отдельности. Последовательность расчета:

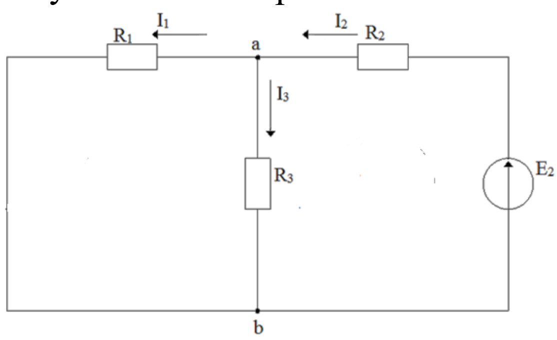
1) в цепи поочередно оставляют по одному источнику питания и получают расчетные схемы, число которых равно числу источников питания (внутренние сопротивления исключенных источников оставляют в цепи);

2) определяют токи всех ветвей расчетных схем, используя методы преобразования цепей;

3) действительные токи ветвей находят суммированием (наложением) соответствующих токов расчетных схем с учетом их направлений.



Расчетная схема №1



Расчетная схема №2

Для первой схемы($R_2||R_3 = R_{23}$)

$I_1 = I_3 + I_2$ А

$I_1 = \frac{U_1}{R_1+R_{23}}$ А

$$R_{23} = \left(\frac{R_2 * R_3}{R_2+R_3}\right) = \frac{40 * 20}{40 + 20} = \frac{800}{60} = 13{,}3 \text{ Ом}$$

$$I_1 = \frac{26}{50 + 13{,}3} = 0{,}41 \text{ А}$$

$$U'_{ab} = U_1 - U_{r1} = U_1 - I_1 R_1 = 26 - 0{,}41 * 50 = 5{,}5 \text{ В}$$

$$I_3 = \frac{U'_{ab}}{R_3} = \frac{5{,}5}{20} = 0{,}275 \text{ А}$$

$$I_2 = \frac{U'_{ab}}{R_2} = \frac{5{,}5}{40} = 0{,}1375 \text{ А}$$

Для второй схемы($R_1||R_3 = R_{13}$)

$I_2 = I_1 + I_3$ А

$I_2 = \frac{U_2}{R_2+R_{13}}$ А

$$R_{12} = \left(\frac{R_1 * R_3}{R_1+R_3}\right) = \frac{50 * 20}{50 + 20} = \frac{1000}{70} = 14{,}28 \text{ Ом}$$

$$I_2 = \frac{20}{40 + 14{,}28} = 0{,}36 \text{ А}$$

$$U''_{ab} = E_2 - U_2 = U_2 - I_2 R_2 = 20 - 0{,}36 * 40 = 5{,}6 \text{ В}$$

$$I_1 = \frac{U''_{ab}}{R_1} = \frac{5{,}6}{50} = 0{,}112 \text{ А}$$
$$I_3 = \frac{U''_{ab}}{R_3} = \frac{5{,}6}{20} = 0{,}28 \text{ А}$$
Частичные токи для первой схемы:
$I_{1\ 1} = 0{,}41$ А
$I_{2\ 1} = 0{,}1375$ А
$I_{3\ 1} = 0{,}275$ А
Частичные токи для второй схемы:
$I_{1\ 2} = 0{,}112$ А
$I_{2\ 2} = 0{,}36$ А
$I_{3\ 2} = 0{,}28$ А

Результирующе токи:
Направление I_{11} совпадает с I_1 - берем его со знаком плюс. Направление $I_{1\ 2}$ не совпадает с I_1 - берем его со знаком минус.
$I_1 = I_{1.1} - I_{1.2} = 0{,}41 - 0{,}112 = 0{,}298$ А
Аналогично рассчитываем токи I_2 и I_3.
$I_2 = -I_{2.1} + I_{2.2} = -0{,}1375 + 0{,}36 = 0{,}225$ А
$I_3 = I_{3.1} + I_{3.2} = 0{,}275 + 0{,}28 = 0{,}55$ А