Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра “Электротехника и электроника”

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие
для студентов электротехнических специальностей

Минск 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1.Общие сведения о дисциплине

Электротехникой в широком смысле слова называется обширная область практического применения электромагнитных явлений. Широкое и разнообразное использование электрической энергии объясняется тем, что она имеет огромное преимущество перед другими формами энергии. Электрическая энергия сравнительно просто получается из других форм энергии, передается на любые расстояния и легко преобразуется в другие формы энергии. Она может существовать в самых различных количествах и использоваться достаточно экономно. Только на базе электричества оказалось возможным широкое развитие новейших научно-технических направлений в радиоэлектронике, в технике связи, в области компьютерных технологий. Трудно представить жизнь современного человека без использования электрической энергии.

Теоретические основы электротехники (ТОЭ) – теоретический курс, в котором в обобщенной форме рассматриваются теория и методы расчета разнообразных электромагнитных явлений. Курс ТОЭ занимает основное место среди общетехнических дисциплин, определяющих теоретический уровень профессиональной подготовки инженеров-электриков, является теоретической базой для последующего изучения специальных дисциплин. При изложении курса ТОЭ предполагается знание студентами курса физики, в частности, таких ее разделов, как электричество и магнетизм, а также курса высшей математики, в частности, таких ее разделов, как теория матриц, дифференциальные уравнения и методы их решения (особенно численные), теория функций комплексного переменного, преобразование Фурье-Лапласа, теория поля. При изучении курса ТОЭ предполагается широкое применение современных компьютерных технологий.

Электротехники, как научное направление, сформировалось сравнительно недавно, хотя первые сведения об электрических и магнитных явлениях дошли до нас из глубокой древности. Слово «электричество» произошло от греческого названия янтаря – электрон. Еще в древности было известно свойство натертого янтаря притягивать легкие предметы. Слово «магнит» произошло от имени пастуха Магниса, которое упоминается в древнеримской философии Плиния. Магнис обнаружил, что железный наконечник его посоха прилипает к неведомым камням.

Однако настоящее рождение электротехники произошло только в XIX веке. Ниже приводятся основные (этапные) вехи развития теоретической электротехники.

1747 – 1753 гг. Франклин создает теорию жидкого электричества. Вводятся в науку понятия батарея, конденсатор, проводник, заряд, разряд, обмотка. Изобретен молниеотвод.

1785 г. Кулон устанавливает взаимодействие электрических зарядов.

1800 г. Вольт создает первую батарею постоянного тока – вольтов столб.

1820 г. Эрстед устанавливает связь между электрическими и магнитными явлениями. Ампер вводит понятия силы тока и формулирует свои законы.

1831 г. Фарадей открывает явление электромагнитной индукции – одно из величайших открытий в области электротехники.

1873 г. Максвелл создает теорию электромагнитного поля – электродинамику, которая практически в неизменном виде применяется до настоящего времени.

1889 г. Герц открывает явление излучения радиоволн.

1891 г. Доливо-Добровольский создает трехфазную систему переменного тока для энергетики.

1912 г. Штейнметц разрабатывает комплексный метод расчета цепей переменного тока.

1800 – 1880 гг. – период формирования теории цепей постоянного тока.

1880 – 1915 гг. – период формирования теории цепей переменного тока и теории электромагнитного поля.

Курс ТОЭ как самостоятельная учебная дисциплина сформировался в период 1900 – 1915 гг.

Исторически на территории бывшего СССР сложились две научные электротехнические школы: одна в Москве на базе МЭИ, ее основоположником был К.А. Круг, а вторая – в Ленинграде на базе ЛЭТИ и ЛПИ, ее основоположником был В.Ф. Миткевич. Творческое соперничество двух научных школ способствовало успешному развитию теоретических основ электротехники.

В соответствии с учебным планом курс ТОЭ студентами специальности Т01.01.01 «Электроэнергетика» изучается на втором курсе на протяжении 3-го и 4-го учебных семестров в объеме 252 часов аудиторных занятий. Структура занятий и форма отчетности приведены в таблице.

Выписка из учебного плана специальности

Учебные семестры (номер)	3	4	уч. год
Лекции (часов)	$3 \times 18 = 54$	$3 \times 18 = 54$	108
Лабораторные занятия (часов)	$2 \times 18 = 36$	$2 \times 18 = 36$	72
Практические занятия (часов)	$2 \times 18 = 36$	$2 \times 18 = 36$	72
Всего аудиторных занятий (часов)	$6 \times 18 = 108$	$8 \times 18 = 144$	252
Расчётно-графические работы (кол.)	2	2	4
Контрольные работы (кол.)	3	3	6
Зачеты (кол.)	1	1	2
Экзамены (кол.)	1	1	2

При изучении курса ТОЭ на кафедре практикуется рейтинговый метод оценки работы студентов в течение учебного семестра. Суть этого метода заключается в том, что студенту на каждом промежуточном этапе за выполненное задание начисляется определенная сумма балов. Количество начисляемых балов оценивается преподавателем, исходя из качества и своевременности выполнения задания. В конце учебного семестра определяется рейтинг студента как выраженное в процентах отношение набранных баллов к их максимально возможному числу: $R\% = \frac{B}{B_{\max}} \cdot 100\%$.

В курсе ТОЭ в каждом семестре максимальное число баллов равно 100:

$$B_{\max} = 2 \cdot 20_{(РГР)} + 3 \cdot 10_{(КР)} + 30_{(ЛБ)} = 100.$$

Студенты, имеющие рейтинг по курсу 90% и более, во время экзамена получают оценку “отлично” без опроса.

2. Методическое обеспечение

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В. Л. Теоретические основы электротехники. Т.1. –СПб.: Питер, 2003.-463с.
2. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В. Л. Теоретические основы электротехники. Т.2. –СПб.: Питер, 2003.-576с.
3. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В. Л. Теоретические основы электротехники. Т.3. –СПб.: Питер, 2003.-377с.
4. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т.1. Л.:Энергоиздат, 1981.-536с.
5. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т.2.-Л.:Энергоиздат, 1981.-416с.
6. Теоретические основы электротехники. Т1. Под ред. П.А. Ионкина. М.: Высшая школа,1976.-544с.
7. Теоретические основы электротехники. Т2. Под ред. П.А. Ионкина. М.: Высшая школа,1976.-383с.
8. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Ч.1.-М.:Высшая школа,1994.-560с.
9. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. Ч.2. – М.:Высшая школа,1995.-263с.
10. Зевеке Г.В.,Ионкин П.А.,Нетушил А.В.,Страхов С.В. Основы теории цепей. – М. Энергоатомиздат,1989. – 528с.
11. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники. Под ред. проф.П.А.Ионкина.-М.:Энергия,1982.-768с.
12. Бессонов Л.А., Демидова И.Г. и др. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. -М. : Высшая школа,1980.-570с.

13. Лабораторные работы (практикум) по курсу "Теоретические основы электротехники" для студентов электроэнергетических специальностей. Часть 1. Линейные электрические цепи. Ротапринт БГПА.1999.

14. Лабораторные работы (практикум) по курсу "Теоретические основы электротехники" для студентов электроэнергетических специальностей. Часть 2. Нелинейные электрические цепи и теория электромагнитного поля. Ротапринт БГПА .2005.

15. Мазуренко А. А. "Теоретические основы электротехники", ч. 1, ч. 2. Конспект лекций для студентов электроэнергетических специальностей. Компьютерный формат. 2011.

16. Мазуренко А. А. "Лабораторные работы по курсу "Теоретические основы электротехники" для студентов электроэнергетических специальностей, ч. 1, ч. 2. Компьютерный формат. 2011.

17. Мазуренко А. А. Сборник задач по курсу "Теоретические основы электротехники" с решениями в MathCAD для студентов электроэнергетических специальностей. Компьютерный формат. 2011.

18. Содержание и варианты заданий расчетно-графических работ:

РГР1 – методы расчета сложной резистивной цепи;

РГР2 – расчет сложной трехфазной цепи:

РГР3 – расчет переходных процессов:

РГР4 – расчет нелинейной цепи переменного тока

19. Содержание и варианты заданий контрольных работ:

КР1 – методы расчета сложных резистивных цепей;

КР3 – расчет простых цепей переменного тока;

КР3 – расчет трехфазных цепей;

КР4 – расчет цепей несинусоидального тока;

КР5 – расчет переходных процессов;

КР6 – расчет нелинейных цепей переменного тока.

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Т1. ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

1. Электромагнитное поле

Электромагнитное поле представляет собой особый вид материи. Как вид материи оно обладает массой, энергией, количеством движения, может превращаться в вещество и наоборот.

Электромагнитное поле имеет две составляющие – электрическую и магнитную – и в каждой точке пространства определяется двумя векторными величинами:

а) вектором напряженности электрического поля $\overline{E}$ [В/м],

б) вектором напряженности магнитного поля $\overline{H}$ [А/м].

Следует помнить, что в природе существует единое электромагнитное поле, а отдельные его стороны – электрическое поле или магнитное поле – могут проявляться независимо друг от друга только в частных случаях при определенных условиях.

Математические уравнения, описывающие физические процессы в переменном электромагнитном поле, называются уравнениями Максвелла:

$$\begin{cases} rot\overline{H} = \bar{\delta} + \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} \\ rot\overline{E} = \mu\mu_0 \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial t} \\ div\overline{B} = 0 \\ div\overline{D} = \rho \end{cases}$$

где $\overline{B} = \mu\mu_0 \overline{H}, \quad \overline{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \overline{E}.$

Из приведенных уравнений следует, что каждая из сторон электромагнитного поля одновременно является и причиной и следствием другой стороны, что говорит о единстве этих сторон.

Электромагнитное поле, как носитель энергии, является той средой, посредством которой осуществляется передача энергии от источников энергии (электростанций) к приемникам энергии (промышленным предприятиям, жилым домам и т.д.), при этом в передаче энергии участвуют в равной мере обе его стороны.

2. Электрический ток. 1-й закон Кирхгофа

Из физики известно о существовании трех родов электрического тока: проводимости, переноса и смещения.

Электрическим током **проводимости** называется направленное движение свободных зарядов $q_{\text{св}}$, какими являются электроны в металлах, положительные и отрицательные ионы в электролитах:

$i_{\text{пр}} = -\dfrac{dq_{\text{св}}}{dt}$ – ток проводимости [А];

$\bar{\delta}_{\text{пр}} = \dfrac{di_{\text{пр}}}{ds_n}$ – плотность тока проводимости [А/м^2].

Ток проводимости связан с плотностью тока уравнением:

$$i_{\text{пр}} = \int_s \overline{\delta}_{\text{пр}} \overline{ds}$$

Ток проводимости возникает в проводящей среде под воздействием электрического поля:

$$\overline{\delta}_{\text{пр}} = \gamma\ \overline{E},$$

где γ – удельная проводимость среды [См/м].

Электрическим током **переноса** называется направленное движение заряженных частиц $q_{\text{зч}}$, движущихся в свободном пространстве. Математически ток переноса описывается аналогичными с током проводимости уравнениями:

$$i_{\text{пер}} = -\frac{dq_{\text{зч}}}{dt}; \qquad \overline{\delta}_{\text{пер}} = \frac{di_{\text{пер}}}{ds_n}; \qquad i_{\text{пер}} = \int_s \overline{\delta}_{\text{пер}} \overline{ds}.$$

Электрическим током **смещения** называется явление направленного движения связанных зарядов в результате поляризации диэлектрика и явление изменения во времени электрического поля:

$$\overline{\delta}_{\text{см}} = \frac{d\overline{D}}{dt} = \frac{d(\varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P})}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\overline{E}}{dt} + \frac{d\overline{P}}{dt} = \overline{\delta}_{\text{см}0} + \overline{\delta}_{\text{см}n},$$

$$i_{\text{см}} = \int_s \overline{\delta}_{\text{см}} \cdot \overline{ds}.$$

Ток смещения может существовать в пустоте $\left(\overline{\delta}_{\text{см}0}\right)$. Рассмотрим некоторую замкнутую поверхность S, внутрь которой втекают ток проводимости $i_{\text{пр}}$ и ток переноса $i_{\text{пер}}$ (рис. 1).

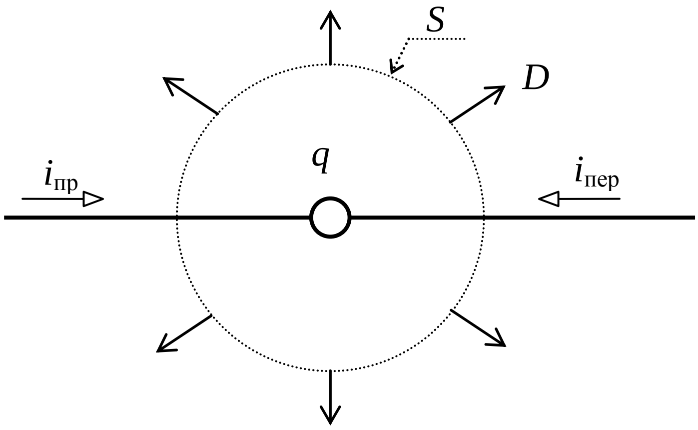


Рис. 1

При увеличении заряда внутри объема $q = q_{\text{св}} + q_{\text{зч}}$ будет усиливаться электрическое поле на поверхности S. По теореме Гаусса:

$$\oint_s \overline{D} \cdot \overline{ds} = \sum q = q_{\text{св}} + q_{\text{зч}}$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по переменной t:

$$\frac{d}{dt}\left(\oint_s \overline{D} \cdot \overline{ds} \right) = \oint_s \frac{d\overline{D}}{dt} \cdot \overline{ds} = \oint_s \overline{\delta}_{\text{см}} \cdot \overline{ds} = i_{\text{см}} \ ;$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq_{\text{св}}}{dt} + \frac{dq_{\text{зч}}}{dt} = -i_{\text{пр}} - i_{\text{пер}} \ ,$$

откуда следует вывод, что $i_{\text{см}} = -\, i_{\text{пр}} - i_{\text{пер}}$ или $i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}} + i_{\text{см}} = 0$.

Сумма токов всех родов, протекающих сквозь любую замкнутую поверхность, равна нулю. Если замкнутую поверхность S разбить на отдельные участки S_1, S_2, ..., S_n, то

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

и соответственно $$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n = 0 \ .$$

Рассмотрим узел электрической цепи, т. е. точку, в которой сходятся не менее трех проводов (ветвей) этой цепи (рис. 2). Окружим узел замкнутой поверхностью S. Токи, протекающие по проводникам (i_1, i_2, i_3), называются токами проводимости. Через свободную поверхность диэлектрика будет протекать ток смещения $i_{\text{см}} = \int_s \overline{\delta}_{\text{см}} \cdot \overline{ds}.$

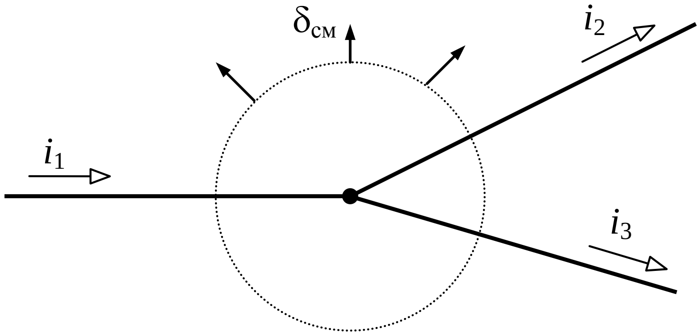


Рис. 2

На промышленной частоте 50 Гц ток смещения несоизмеримо меньше тока проводимости ($i_{\text{см}} << i_{\text{пр}}$) и в инженерных расчетах им можно пренебречь. Таким образом, можно считать, что алгебраическая сумма токов проводимости в узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum i = i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

Указанное положение в электротехнике получило название 1-го закона Кирхгофа.

3. Электрическое напряжение. 2-ой закон Кирхгофа

Пусть в электрическом поле $\overline{E}$ заряд q перемещается из точки "a" в точку "b" по некоторой произвольной траектории (рис. 3). Работа сил по перемещению заряда q из точки "a" в точку "b":

$$A = q\int_a^b \overline{E} \cdot \overline{dl},$$

где $\overline{E}$ – напряженность электрического поля [В/м].

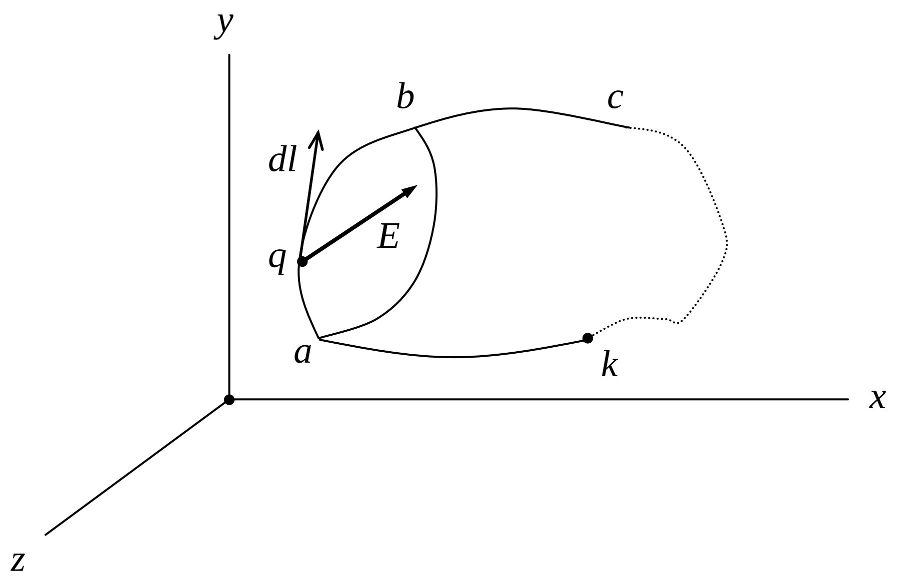


Рис. 3

Электрическим напряжением называется физическая величина, равная отношению работы по перемещению заряда из одной точки (a) в другую (b) к величине этого заряда: $U_{ab} = \dfrac{A}{q} = \int_a^b \overline{E} \cdot \overline{dl}$.

Из закона сохранения энергии следует, что при перемещении заряда по произвольному замкнутому контуру, произведенная работа будет равна нулю т.е.

$$A = q\oint_l \overline{E} \cdot \overline{dl} = 0.$$

Из этого уравнения вытекают два важных следствия.

1-е следствие: сумма падений напряжений на отдельных участках замкнутого контура равна нулю:

$$\oint_l \overline{E}\cdot\overline{dl} = \int_a^b \overline{E}\cdot\overline{dl} + \int_b^c \overline{E}\cdot\overline{dl} + \ldots + \int_k^a \overline{E}\cdot\overline{dl} = U_{ab} + U_{bc} + \ldots + U_{ka} = 0$$

2-ое следствие: напряжение между двумя произвольными точками не зависит от пути интегрирования:

$$\oint_l \overline{E}\cdot\overline{dl} = \int_a^b \overline{E}\cdot\overline{dl} + \int_b^a \overline{E}\cdot\overline{dl} = U_{ab} + U_{ba} = 0,$$

откуда следует, что $U_{ab} = -U_{ba}$.

Независимость напряжения между двумя точками от выбора пути интегрирования позволяет характеризовать электрическое поле некоторой математической функцией $V(x, y, z)$, называемой потенциалом, разность значений которой в рассматриваемых точках численно равна напряжению между ними:

$$V_a - V_b = U_{ab} = \int_a^b \overline{E}\cdot\overline{dl}.$$

Если положение и потенциал точки “a” заданы, а точка ”b” является текущей – “b”(x, y, z), то получим:

$$V_b = V(x, y, z) = -\int_a^{x,y,z} \overline{E}\cdot\overline{dl} + V_a = -\int_a^{x,y,z} \overline{E}\cdot\overline{dl} + C.$$

Таким образом, значение потенциала V_b в произвольной точке “b”(x,y,z) зависит от выбора значения потенциала опорной точки V_a. В электротехнике принято придавать нулевое значение потенциала точке, связанной с землей.

Рассмотрим замкнутый контур некоторой электрической цепи (рис. 4), при этом путь интегрирования выберем вдоль ветвей контура.

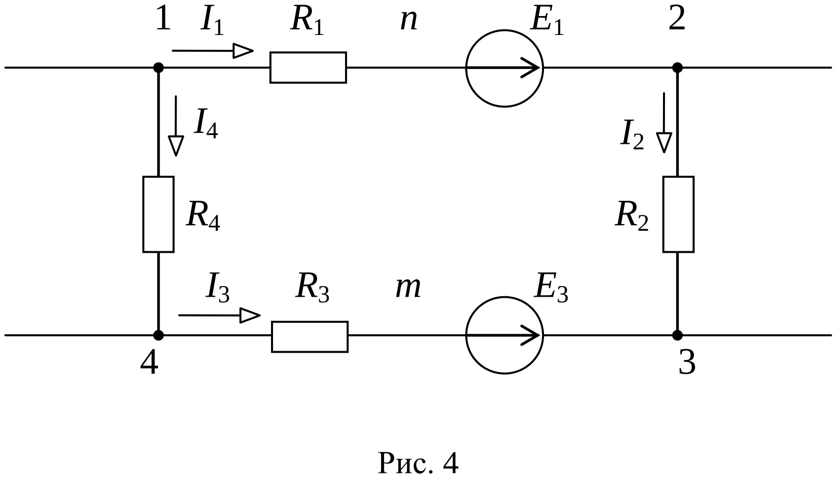


Рис. 4

Для 1-й ветви:

$$U_{1n} = V_1 - V_n = I_1 R_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_n + I_1R_1,$$

$$U_{2n} = V_2 - V_n = E_1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_n + E_1,$$

$$U_{12} = V_1 - V_2 = V_n + I_1R_1 - V_n - E_1 = I_1R_1 - E_1.$$

По аналогии для других ветвей:

$$U_{23} = V_2 - V_3 = I_2R_2,$$

$$U_{34} = V_3 - V_4 = -I_3R_3 + E_3,$$

$$U_{41} = V_4 - V_1 = -I_4R_4.$$

Сумма всех напряжений по замкнутому контуру:

$$\sum U = U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{41} = 0,$$

откуда следует, что $I_1R_1 + I_2R_2 - I_3R_3 - I_4R_4 = E_1 - E_3$,

или $\sum IR = \sum E$ – 2-ой закон Кирхгофа.

Формулировка 2-го закона Кирхгофа: в замкнутом контуре электрической цепи или схемы алгебраическая сумма падений напряжений на пассивных элементах контура ($\sum IR$) равна алгебраической сумме ЭДС ($\sum E$). Отдельные слагаемые в эти суммы входят со знаком “+”, если их действие совпадает с направлением обхода контура, и со знаком “–”, если не совпадает.

4. Физические процессы в электрической цепи

Электрической цепью называется совокупность технических устройств, образующих пути для замыкания электрических токов и предназначенных для производства, передачи, распределения и потребления электрической энергии. Любая электрическая цепь предполагает наличие в своей структуре как минимум трех элементов, а именно: источников энергии, приемников энергии и соединяющих их проводов или линий электропередачи. Как известно, носителем энергии является электромагнитное поле, которое сосредоточено как внутри, так и вне проводов. Таким образом, для рассмотрения физических явлений в электрической цепи во всей полноте необходимо проводить расчет и исследование электромагнитного поля заданной цепи. При физическом решении этой задачи пользуются дифференциальными понятиями и параметрами, характеризующими электромагнитное поле в рассматриваемой точке, такими как $\overline{E}$, $\overline{H}$, $\overline{\delta}$, $\overline{B}$, $\overline{D}$, μ, γ, ε. Математическое описание электромагнитных полей на основе дифференциальных понятий оказывается сложной задачей.

Электрическая цепь состоит, как правило, из отдельных однородных участков. В этом случае предоставляется возможность с достаточной для инженерных расчетов точностью описывать процессы на отдельных участках с помощью интегральных понятий:

$e_{ab} = \int_a^b \overline{E}_{\text{стор}} \cdot \overline{dl}$ – электродвижущая сила (ЭДС) источника энергии;

$u_{ab} = \int_a^b \overline{E} \cdot \overline{dl}$ – электрическое напряжение;

$i = \int_s \overline{\delta} \cdot \overline{ds}$ – электрический ток;

$q = \int_s \overline{D} \cdot ds$ – электрический заряд;

$\Phi = \int_s \overline{B} \cdot \overline{ds}$ – магнитный поток;

$R = \dfrac{l}{\gamma \cdot s}$ – электрическое сопротивление.

Применение интегральных понятий к расчетам электрических цепей позволяет получать сравнительно простые решения задач с допустимой методической погрешностью.

В каждой реальной электрической цепи можно одновременно наблюдать следующие физические процессы:

1) процесс генерирования электрической энергии, который происходит в источниках (генераторах) в результате преобразования одного из видов энергии (механической, химической и др.) в электрическую;

2) процесс преобразования электрической энергии в другие виды, который протекает в приемниках энергии;

3) процесс накопления (или возврата) энергии в объеме магнитного поля:

$$W_M = \int_v \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 \cdot dv;$$

4) процесс накопления (или возврата) энергии в объеме электрического поля:

$$W_Э = \int_v \frac{1}{2}\mu\mu_0 E^2 \cdot dv.$$

Перечисленные физические процессы в том или другом сочетании присущи всем элементам электрической цепи, протекают одновременно и связаны между собой законом сохранения энергии.

При расчете режима электрической цепи она представляется некоторой условной схемой или схемой замещения, состоящей из комбинации идеальных схемных элементов. Каждый идеальный схемный элемент отображает на схеме один из физических процессов. Таких схемных элементов всего 5.

1) Идеальный источник напряжения (ЭДС) E – это схемный элемент, который генерирует на своих выводах постоянную по величине ЭДС (U = const), не зависящую от тока, имеет символьное обозначение, показанное на рис. 5, *а*, характеризуется напряжением [В].

2) Идеальный источник тока J – это схемный элемент, который генерирует в цепи постоянный по величине ток (I = const), не зависящий от напряжения на его зажимах, имеет символьное обозначение, показанное на рис. 5, *б*, характеризуется током [А].

3) Идеальный резистор R – это схемный элемент, в котором происходит только процесс преобразования электрической энергии в другие виды, имеет символьное обозначение, показанное на рис. 5, *в*, характеризуется сопротивлением [Ом].

4) Идеальная катушка индуктивности L – это схемный элемент, в котором происходит только процесс накопления (или возврата) энергии в магнитном поле ($W_M = Li^2/2$), имеет символьное обозначение, показанное на рис. 5, *г*, характеризуется индуктивностью [Гн].

5) Идеальная конденсатор C – это схемный элемент, в котором происходит только процесс накопления (или возврата) энергии в электрическом поле ($W_Э = Cu^2/2$), имеет символьное обозначение, показанное на рис. 5, *д*, характеризуется емкостью [Ф].

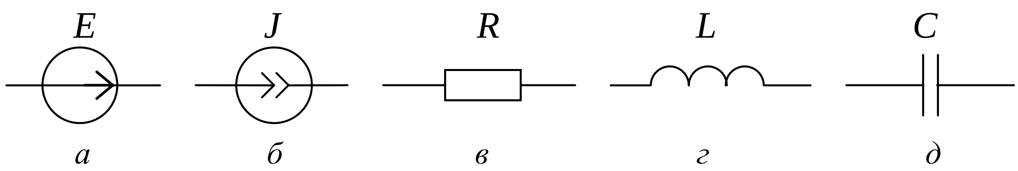


Рис. 5

Каждый элемент электрической цепи на схеме замещения представляется одним или комбинацией из нескольких идеальных схемных элементов в зависимости от необходимости учета тех физических процессов, которые в нем протекают. Например, лампа накаливания представляется на схеме только одним схемным элементом резистором R, так как тепловая и световая энергия многократно больше энергии электромагнитного поля (рис. 6, *а*), обмотка электромагнитного реле представляется на схеме комбинацией из двух элементов – R и L (рис. 6, *б*), а протяженная двухпроводная линия – комбинацией из 6-и схемных элементов, которые комплексно учитывают физические процессы в ней (рис. 6, *в*).

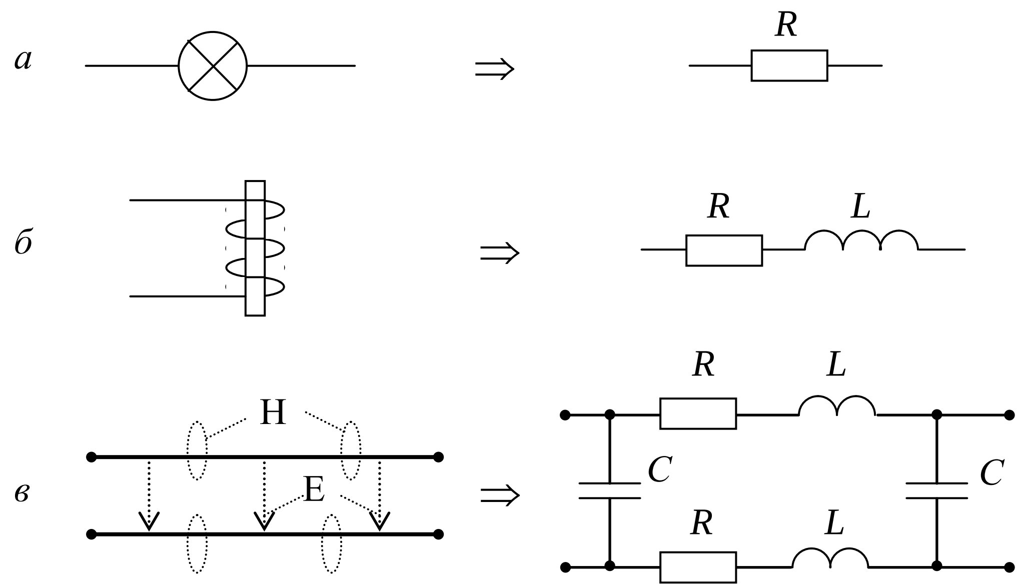


Рис. 6

При составлении схемы замещения электрической цепи всегда пренебрегают второстепенными физическими процессами и явлениями, не оказывающими существенного влияния на точность технического расчета режима. Поэтому любая схема замещения реальной цепи отображает физические процессы в ней с некоторой степенью приближения.

Энергия от источника переносится приемнику электромагнитным полем со скоростью распространения волны.

Для воздушных линий электропередачи эта скорость близка к скорости света c = 300000 км/с, для кабельных линий она чуть меньше $\left(v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$. Таким образом, электромагнитная волна за единицу времени (1 сек) многократно пробегает путь от источника энергии до приемника.

Согласно закону сохранения энергии в любой электрической цепи за любой промежуток времени T должен выполняться баланс между генерируемой и потребляемой энергией: $\sum W_{\text{ист}} = \sum W_{\text{пр}}$. Количество энергии, за единицу времени (1сек), называется мощностью, следовательно, в любой цепи существует баланс между мощностью источников и приемников: $\sum P_{ист} = \sum P_{пр}$.

В любой энергосистеме, состоящей из электростанций, линий электропередачи и потребителей электроэнергии в любой момент времени существует динамическое равновесие между суммарными мощностями источников и приемников электрической энергии, при этом источники энергии должны постоянно приспосабливаться к изменяющимся запросам потребителя. Электростанции в энергосистеме работают без промежуточного склада готовой продукции!

Т2. ТЕОРЕМЫ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

1. Основные определения

Узлом электрической цепи (схемы) называется точка, в которой сходятся не менее трех ветвей.

Ветвью электрической цепи (схемы) называется участок, состоящий из последовательно включенных элементов, расположенных между двумя смежными узлами.

Сложной называется электрическая цепь (схема), содержащая не менее двух узлов, не менее трех ветвей и не менее двух источников энергии в разных ветвях.

В сложной электрической цепи наблюдаются одновременно в той или иной мере разнородные физические процессы, а именно, процесс генерирования электрической энергии, процесс преобразования электрической энергии в другие виды и процесс обмена энергией между магнитным полем, электрическим полем и источниками энергии. В общем случае для отображения этих физических процессов схема замещения цепи должна содержать кроме источников энергии (*E, J*) все разнородные схемные элементы (*R, L, C*). Математически физические процессы в такой схеме можно описать системой дифференциальных уравнений, составленных для схемы замещения по законам Кирхгофа.

В стационарном режиме (в режиме постоянного тока) напряжение на катушке равно нулю ($u_L = L\frac{di}{dt} = 0$), что соответствует короткому замыканию этого элемента, а при постоянном напряжении ток в конденсаторе равен нулю ($i_C = C\frac{du}{dt} = 0$), что соответствует разрыву ветви с этим элементом. Следовательно, на установившийся режим постоянного тока схемные элементы *L* и *C* не оказывают влияния и могут быть исключены из схемы замещения (участки с *L* закорочены, а ветви с *C* удалены). Цепи постоянного тока представляются эквивалентными схемами, содержащими только постоянные источники энергии *E, J* и резистивные элементы *R*. Такие схемы получили название резистивных или постоянного тока. Установившийся режим постоянного или переменного тока в таких схемах описывается системой линейных алгебраических уравнений, составленных по законам Кирхгофа.

В настоящей главе будут рассматриваться только резистивные цепи в режиме постоянного тока. В последующем рассмотренные в данной главе теоремы и методы расчета будут распространены на цепи переменного тока в установившемся синусоидальном режиме.

2. Метод преобразования (свертки) схемы

Если схема электрической цепи содержит только один источник энергии (E или J), то пассивная часть схемы может быть преобразована (свернута) к одному эквивалентному элементу $R_Э$ (рис. 7).

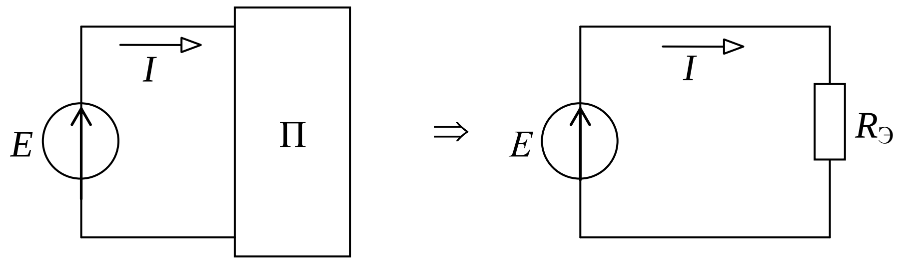


Рис. 7

Свертка схемы начинается с самых удаленных от источника ветвей, проводится в несколько этапов до достижения полной свертки. После полной свертки схемы определяется ток источника по закону Ома: $I = \dfrac{E}{R_э}$.

Токи в остальных элементах исходной схемы находятся в процессе обратной развертки схемы. Такой метод расчета токов получил название метода последовательного преобразования (свертки) схемы.

При применении данного метода возможны следующие виды преобразований.

1) **Последовательное преобразование** заключается в замене нескольких элементов, включенных последовательно, одним эквивалентным (рис. 8).

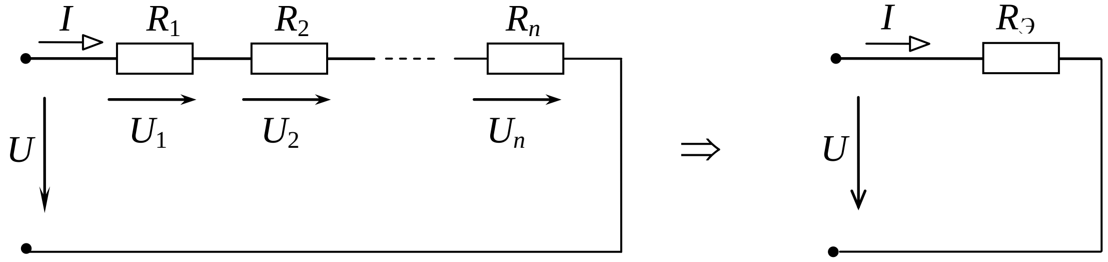


Рис. 8

Несложно доказать, что при этом справедливы следующие соотношения:

$$R_э = R_1 + R_2 + ... + R_n \quad и \quad U_1 : U_2 : ... : U_n = R_1 : R_2 : ... : R_n$$

2) **Параллельное преобразование** состоит в замене нескольких элементов, включенных параллельно, одним эквивалентным (рис. 9). Несложно доказать, что при этом справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{R_э} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n} \quad и \quad I_1 : I_2 : ... : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : ... : \frac{1}{R_n}$$

Для двух элементов: $R_Э = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ и $I_1 : I_2 = R_2 : R_1$

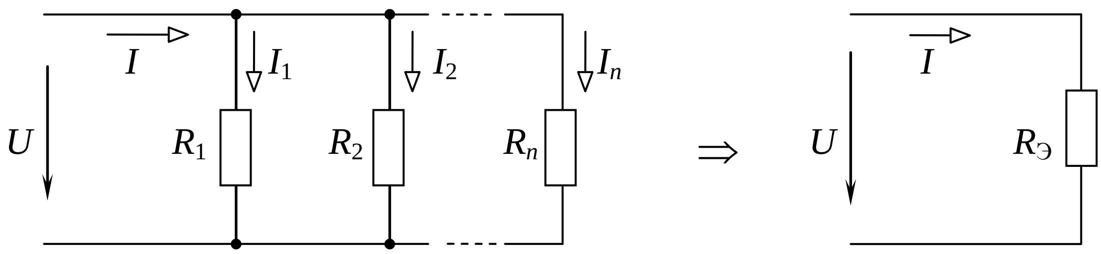


Рис. 9

3) **Взаимное преобразование схем звезда–треугольник** (рис. 10) возникает при свертке сложных схем.

Условием эквивалентности двух схем являются равенства для них токов (I_1, I_2, I_3), напряжений (U_{12}, U_{23}, U_{31}) и входных сопротивлений (R_{12}, R_{23}, R_{31}) и соответственно входных проводимостей (G_{12}, G_{23}, G_{31}).

Приравняем входные сопротивления для обеих схем со стороны двух произвольных ветвей при отключенной третьей (рис. 10):

$$R_{вх1-2} = R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{31} + R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1)$$

$$R_{вх2-3} = R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31} + R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (2)$$

$$R_{вх3-1} = R_3 + R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12} + R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (3)$$

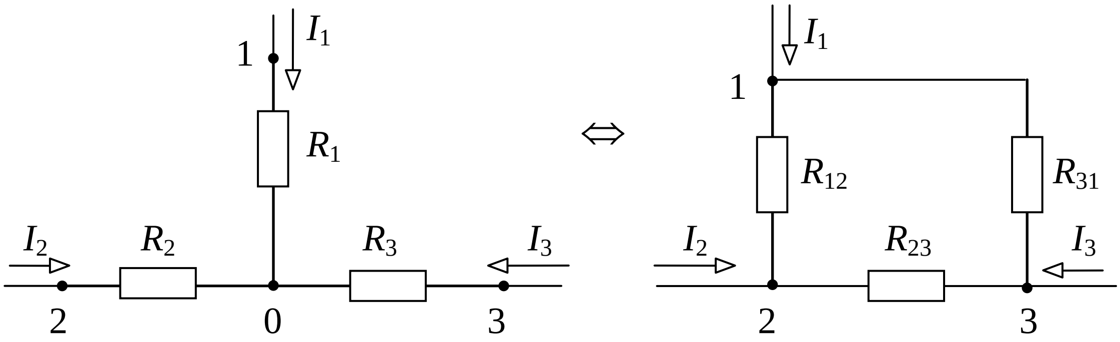


Рис. 10

Сложим почленно уравнения (1) и (3) и вычтем из суммы уравнение (2), получим:

$R_1 = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$, по аналогии: $R_2 = \dfrac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$, $R_3 = \dfrac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$.

Приравняем входные проводимости для обеих схем со стороны произвольной вершины и двух других вершин, замкнутых накоротко (рис. 11):

$$G_{вх1-23} = \frac{G_1G_2 + G_3G_1}{G_1+G_2+G_3} = G_{12} + G_{31} \tag{4}$$

$$G_{вх2-31} = \frac{G_1G_2 + G_2G_3}{G_1+G_2+G_3} = G_{23} + G_{12} \tag{5}$$

$$G_{вх3-12} = \frac{G_3G_1 + G_2G_3}{G_1+G_2+G_3} = G_{31} + G_{23} \tag{6}$$

Сложим почленно уравнения (4) и (5) и вычтем уравнение (6), получим:

$G_{12} = \dfrac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_3}$, по аналогии: $G_{23} = \dfrac{G_2G_3}{G_1+G_2+G_3}$, $G_{31} = \dfrac{G_3G_1}{G_1+G_2+G_3}$.

В последних уравнениях заменим проводимости на соответствующие им сопротивления $R = \dfrac{1}{G}$, получим:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \qquad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \qquad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$

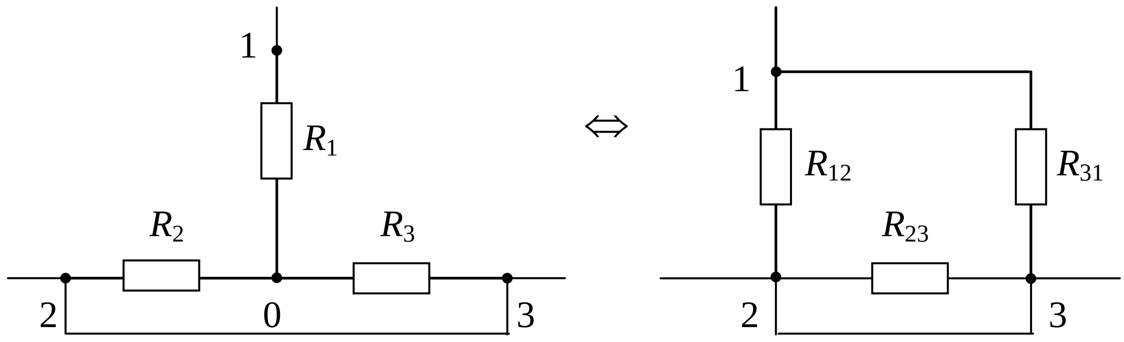


Рис. 11

При наличии полной симметрии соотношение между параметрами эквивалентных схем составляет: $R_{\Delta} = 3R_{\perp}$.

4) **Замена параллельных ветвей эквивалентной ветвью** (рис. 12) осуществляется согласно теореме об эквивалентном генераторе.

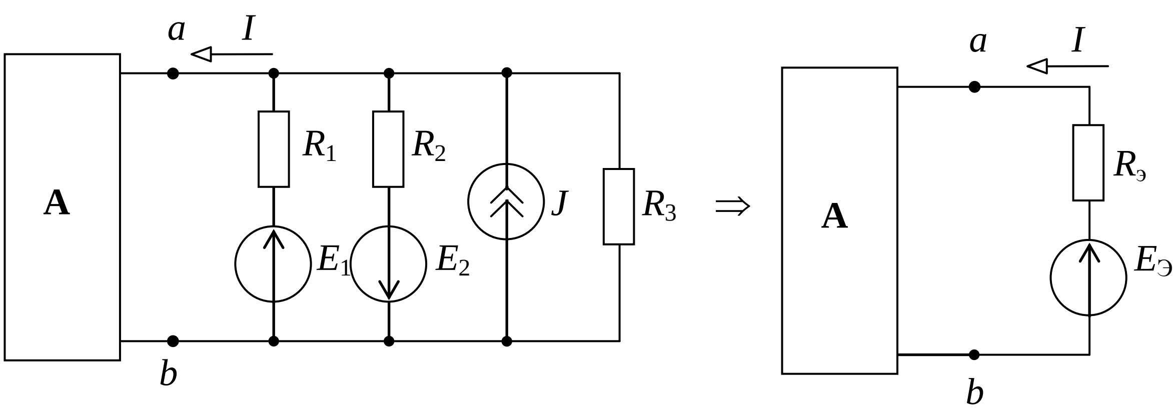


Рис. 12

Напряжение холостого хода $U_{xx} = E_Э$ определяется по методу двух узлов:

$$U_{xx} = E_Э = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{E_2}{R_2} + J}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}.$$

Эквивалентное входное сопротивление находится методом свертки схемы:

$$R_Э = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}.$$

5) **Перенос источника ЭДС через узел схемы**: источник ЭДС *E* можно перенести через узел во все ветви, отходящие от узла (рис. 13, *а*, *б*.):

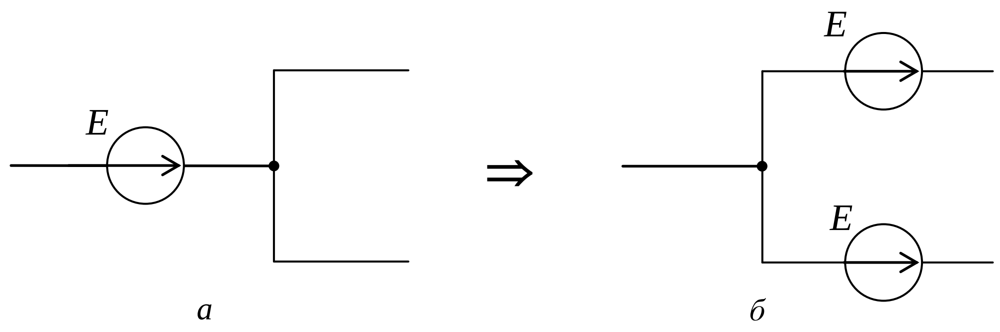


Рис. 13

6) **Привязка источника тока** к произвольному узлу согласно схеме (рис. 14, *а*, *б*):

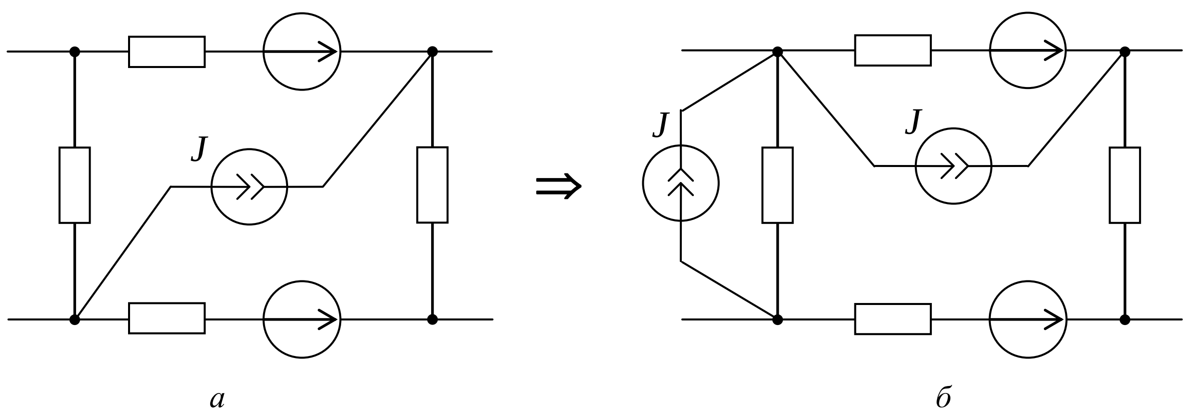


Рис. 14

7) Взаимное преобразование схем с источником напряжения и с источником тока согласно схеме (рис. 15, *а*, *б*).

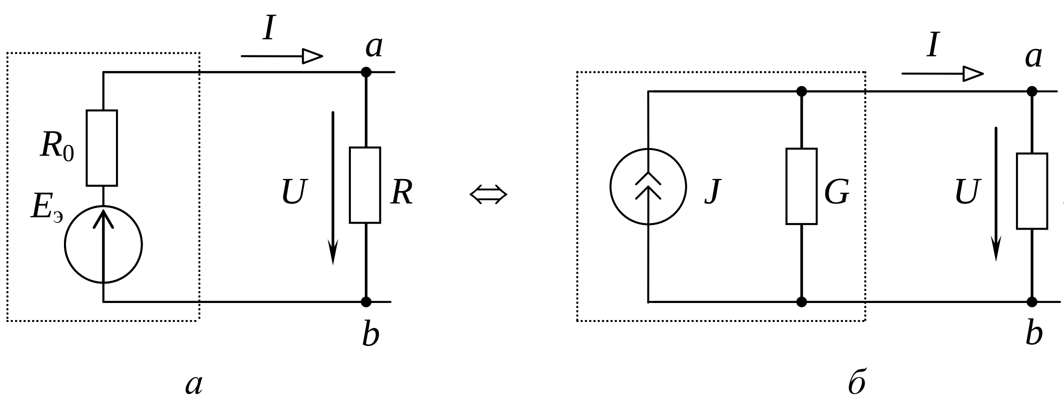


Рис. 15

Схемы эквивалентны при равенстве для обоих напряжений U и токов I на нагрузке:

$$U = E - IR_0 = I_0 R_0 = (J - I) \cdot \frac{1}{G_0} = \frac{J}{G_0} - \frac{I}{G_0}.$$

Сравнивая левые и правые части равенства, получим соотношения между параметрами эквивалентных схем:

$$R_0 = \frac{1}{G_0}; \quad E = \frac{J}{G_0}; \quad G_0 = \frac{1}{R_0}; \quad J = \frac{E}{R_0}.$$

Примечание: пример расчета электрической цепи методом преобразования см. в л.17 (задача 1).

3. Метод законов Кирхгофа

Теоретическая база метода: 1-й и 2-й законы Кирхгофа.

1-й закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов ветвей в узле схемы равна нулю ($\sum I = 0$).

2-й закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений в произвольном контуре схемы равна алгебраической сумме ЭДС ($\sum IR = \sum E$).

Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной сложной схеме (рис. 16) и определить токи в ветвях, напряжения на отдельных элементах, мощности источников и приемников энергии. Задана схема цепи и параметры ее отдельных элементов (E_1, E_2, E_3, J_2, J_3, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6).

Анализируем структуру схемы: схема содержит n = 4 (0, 1, 2, 3) узлов и m = 6 ветвей с неопределенными токами. В ветвях с источниками тока J токи определены источниками. Общее число уравнений должно быть равно числу определяемых токов “m”.

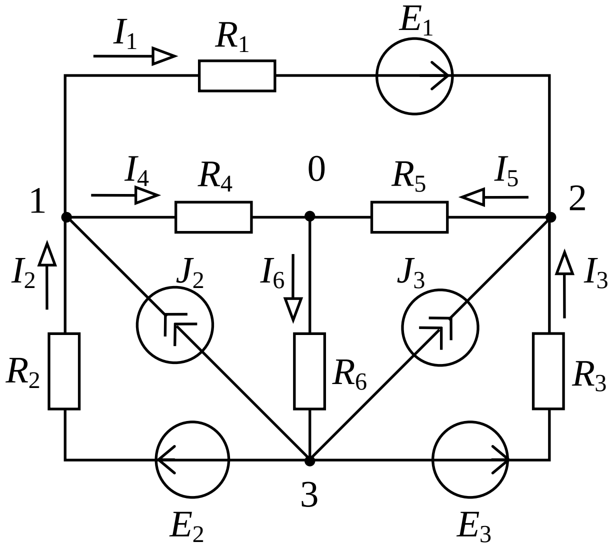


Рис. 16

Последовательность (алгоритм) расчета.

1) Задаются (произвольно) положительными направлениями токов в ветвях схемы ($I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$).

2) Составляется (n – 1) уравнений для узлов по первому закону Кирхгофа. Уравнение для последнего n-го узла является зависимым (оно может быть получено путем сложения первых (n – 1) уравнений).

3) Недостающие m – (n –1) уравнений составляются по 2-му закону Кирхгофа. Правило выбора контуров для составления уравнений: каждый последующий контур должен включать в себя хотя бы одну новую ветвь, неохваченную предыдущими уравнениями. Число независимых контуров для схемы любой сложности не может быть больше числа $m – (n – 1)$.

Ниже приведена система уравнений Кирхгофа для схемы рис. 16, состоящая из m = 6 уравнений, из которых n – 1 = 3 составлены для узлов 1, 2 и 3 по 1-му закону Кирхгофа и $m – (n – 1)$ = 3 составлены для контуров $К_1$, $К_2$, $К_3$ по 2-му закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 - I_4 = -J_2 & \text{– узел 1,} \\ I_1 + I_3 - I_5 = -J_3 & \text{– узел 2,} \\ -I_2 + I_3 - I_5 = J_2 + J_3 & \text{– узел 3,} \\ I_1\cdot R_1 - I_4\cdot R_4 + I_5\cdot R_5 = E_1 & \text{– контур 1,} \\ I_2\cdot R_2 + I_4\cdot R_4 + I_6\cdot R_6 = E_2 & \text{– контур 2,} \\ I_3\cdot R_3 + I_5\cdot R_5 + I_6\cdot R_6 = E_3 & \text{– контур 3.} \end{cases}$$

Система уравнений Кирхгофа может быть преобразована к матричной форме: $[I] = [R]\cdot[E]$, где $[R]$ – матрица коэффициентов, $[E]$ – матрица правых частей уравнений.

5) Система уравнений решается на ЭВМ по стандартной программе для решения линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами. В MathCAD для этой цели могут быть применены следующие программы: 1) *given* ... *find*, 2) $I = lsolve(R,E)$, 3)$I = R^{-1}\cdot E$. В результате решения определяются неизвестные токи $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$. Отрицательные результаты, получаемые для некоторых токов, означают, что их действительные (физические) направления не соответствуют направлениям, принятым в начале расчета.

6) Определяются напряжения на отдельных элементах схемы ($U_k = I_k R_k$), мощности источников ЭДС ($P_{Ek} = E_k I_k$), источников тока (P_{Jk}=

U_kI_k) и приемников ($P_k = I_k^2 R_k$). При этом мощности приемников энергии всегда положительны, а мощности источников энергии могут быть отрицательными, если сомножители в произведениях $E_k I_k$ и $U_k J_k$ не совпадают по направлению.

<u>Примечание</u>: пример расчета сложной электрической цепи методом законов Кирхгофа см. в Л.17 (задача 2а).

4. Метод контурных токов

Теоретическая база метода контурных токов – 2-ой закон Кирхгофа в сочетании с принципом наложения. Предполагают, что в каждом элементарном контуре-ячейке схемы протекает «свой» контурный ток I_k, а действительные токи ветвей получаются по принципу наложения контурных токов как их алгебраические суммы. В качестве неизвестных величин, подлежащих определению, в данном методе выступают контурные токи. Общее число неизвестных составляет $m - (n - 1)$.

Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной сложной схеме рис. 17. Параметры отдельных элементов схемы заданы.

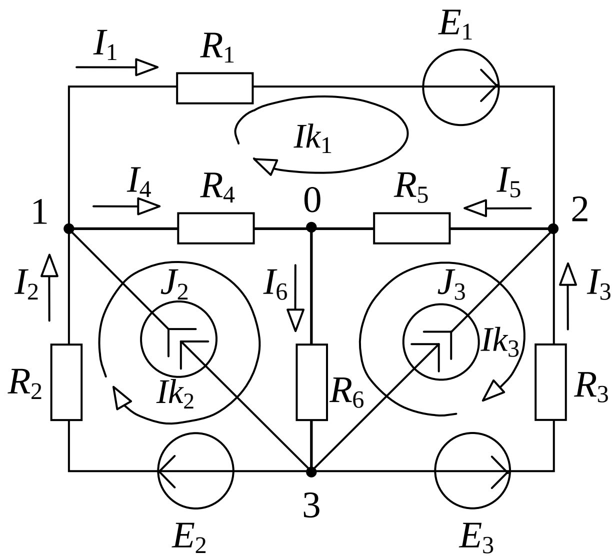


Рис. 17

Последовательность (алгоритм) расчета.

1) Задаются (произвольно) положительными направлениями контурных токов в контурах-ячейках схемы($I\kappa_1$, $I\kappa_2$, $I\kappa_3$). Контуры-ячейки следует выбирать так, чтобы они не включали в себя ветви с источниками тока. Ветви с источниками тока J образуют свои контуры с заданными токами (J_1, J_2).

2) Составляются m –(n – 1) уравнений по 2-му закону Кирхгофа для выбранных контуров–ячеек с контурными токами $I\kappa_1$, $I\kappa_2$, $I\kappa_3$. В уравнениях учитываются падения напряжений как от собственного контурного тока, так и от смежных контурных токов.

Ниже приведена система контурных уравнений для схемы рис. 17:

$$\begin{cases} Ik_1(R_1+R_4+R_5)-Ik_2R_4-Ik_3R_5=E_1 \\ -Ik_1R_4+Ik_2(R_2+R_4+R_6)-Ik_3R_6=E_2+J_2R_2 \\ -Ik_1R_5-Ik_2R_6+Ik_3(R_3+R_5+R_6)=-E_3-J_3R_3 \end{cases}$$

В обобщенной форме система контурных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} Ik_1R_{11}+Ik_2R_{12}+Ik_3R_{13}+\ldots+Ik_nR_{1n}=E_{11} \\ Ik_1R_{21}+Ik_2R_{22}+Ik_3R_{23}+\ldots+Ik_nR_{2n}=E_{22} \\ Ik_1R_{31}+Ik_2R_{32}+Ik_3R_{33}+\ldots+Ik_nR_{3n}=E_{33} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ik_1R_{n1}+Ik_2R_{n2}+Ik_3R_{n3}+\ldots+Ik_nR_{nn}=E_{nn} \end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$R_{11} = R_1 + R_4 + R_5$; $R_{22} = R_2 + R_4 + R_6$; $R_{33} = R_2 + R_5 + R_6$ и т. д. – собственные сопротивления контуров, равные сумме сопротивлений всех элементов контура;

$R_{12} = R_{21} = -R_4$; $R_{13} = R_{31} = -R_5$; $R_{23} = R_{32} = -R_6$ и т. д. – взаимные сопротивления между двумя смежными контурами, они положительны – если контурные токи в ветви совпадают, и отрицательны – если контурные токи в ветви направлены встречно, и всегда отрицательны – если все контурные токи ориентированы одинаково (например, по часовой стрелке), равны нулю – если контуры не имеют общей ветви.

$E_{11} = E_1 + J_1R_4$; $E_{22} = E_2 + J_2R_2$; $E_{33} = -E_3 + J_3R_3$ и т. д. – контурные ЭДС, равные алгебраической сумме слагаемых $E_{nn} = \Sigma E + \Sigma JR$ от всех источников контура.

Система контурных уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} R_{11}\ R_{12}\ R_{13}\ldots R_{1n} \\ R_{21}\ R_{22}\ R_{23}\ldots R_{2n} \\ R_{31}\ R_{32}\ R_{33}\ldots R_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n1}\ R_{n2}\ R_{n3}\ldots R_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Ik_1 \\ Ik_2 \\ Ik_3 \\ \ldots \\ Ik_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \ldots \\ E_{nn} \end{bmatrix}$$ или сокращенно $[Rk]\times[Ik]=[Ek]$,

где $[Rk]$ – матрица контурных сопротивлений, $[Ik]$ – матрица контурных токов, $[Ek]$ – матрица контурных ЭДС.

3) Система контурных уравнений решается на ЭВМ по стандартной программе для решения систем линейных алгебраических уравнений. В MathCAD для этой цели могут быть применены следующие программы: 1) $Ik = lsolve(Rk, Ek)$, 2) $Ik = Rk^{-1}\cdot Ek$. В результате решения системы уравнений определяются неизвестные контурные токи $Iк_1$, $Iк_2$, $Iк_3$.

4) Выбираются положительные направления токов в ветвях исходной схемы (рис. 17) (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6). Токи ветвей определяются по принципу наложения как алгебраические суммы контурных токов, протекающих в данной ветви:

$I_1 = I_{к1}$; $I_2 = I_{к2} - J_2$; $I_3 = -I_{к3} - J_3$; $I_4 = -I_{к1} + I_{к2}$; $I_5 = I_{к1} - I_{к3}$; $I_6 = I_{к2} - I_{к3}$.

5) При необходимости определяются напряжения на отдельных элементах ($U_k = I_kR_k$), мощности источников энергии ($PE_k = E_kI_k$, $PJ_k = U_k\, J_k$) и мощности приемников энергии ($P_k = I_k^2 \cdot R_k$).

Примечание: пример расчета сложной электрической цепи методом контурных токов см. в Л.17 (задача 2б).

5. Метод узловых потенциалов

Теоретическая база метода узловых потенциалов – 1-ый закон Кирхгофа в сочетании с потенциальными уравнениями ветвей. В этом методе потенциал одного из узлов схемы принимают равным нулю, а потенциалы остальных (n – 1) узлов считают неизвестными, подлежащими определению. Общее число неизвестных составляет (n – 1).

Рассмотрим обобщенную ветвь некоторой сложной схемы (рис. 18).

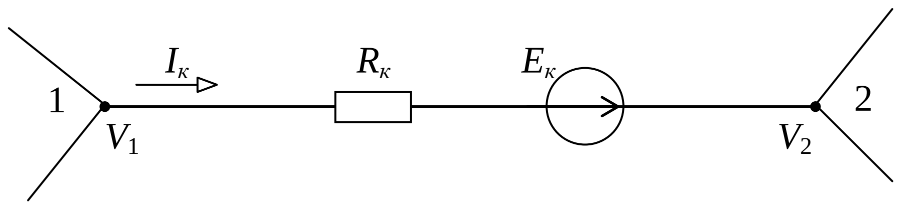


Рис. 18

Свяжем потенциалы концов ветви (узлов) между собой через падения напряжений на отдельных участках:

$$V_1 - I_kR_k + E_k = V_2 \quad \text{или} \quad V_2 - E_k + I_kR_k = V_1$$

Уравнение, связывающее потенциалы конечных точек ветви через падения напряжений на ее отдельных участках, называется потенциальным уравнением ветви. Из потенциального уравнения ветви могут быть определены ток ветви и напряжение на резисторе:

$$I_k = \frac{V_1 - V_2 + E_k}{R_k}, \qquad U_k = I_k R_k = V_1 - V_2 + E_k \,.$$

Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной сложной схеме рис. 19. Параметры отдельных элементов схемы заданы.

Принимаем потенциал узла 0 равным нулю ($V_0 = 0$), а потенциалы узлов 1, 2 и 3 (V_1, V_2 и V_3) будем считать неизвестными, подлежащими определению.

Зададимся положительными направлениями токов в ветвях схемы I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6. Составим потенциальные уравнения ветвей и выразим из них токи ветвей:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2 + E_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_3 - V_1 + E_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{V_3 - V_2 + E_3}{R_3},$$

$$I_4 = \frac{V_4 - V_0}{R_4}, \quad I_5 = \frac{V_2 - V_0}{R_5}, \quad I_6 = \frac{V_0 - V_3}{R_6}.$$

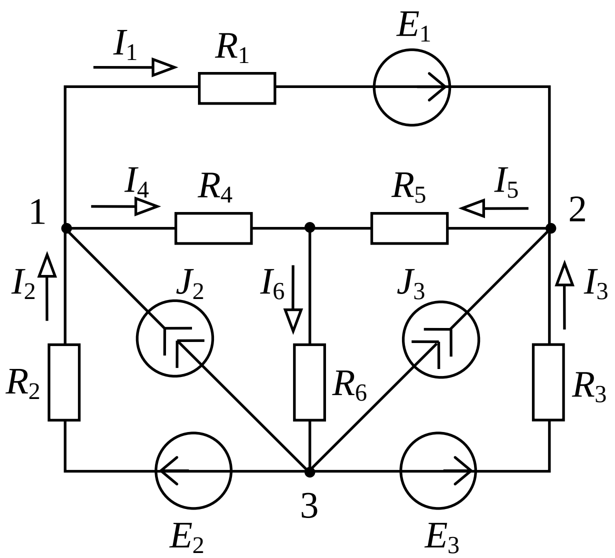


Рис. 19

Составим (n–1) уравнений по 1-му закону Кирхгофа для узлов 1, 2 и 3:

$$-I_1 + I_2 - I_4 + J_2 = 0$$

$$I_1 + I_3 - I_5 + J_3 = 0$$

$$-I_2 - I_3 + I_6 - J_2 - J_3 = 0$$

Подставим в уравнения 1-го закона Кирхгофа значения токов, выраженные ранее из потенциальных уравнений. После приведения коэффициентов получим систему узловых уравнений:

$$V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) - V_2\,\frac{1}{R_1} - V_3\,\frac{1}{R_2} = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_3} + J_2$$

$$-V_1\frac{1}{R_1}+V_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)-V_3\frac{1}{R_3}=\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_3}{R_3}+J_3$$

$$-V_1\frac{1}{R_2}-V_2\frac{1}{R_3}+V_3\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6}\right)=-\frac{E_2}{R_2}-\frac{E_3}{R_3}-J_2-J_3$$

В обобщенной форме система узловых уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} V_1\,G_{11}-V_2\,G_{12}-V_3\,G_{13}-...-V_n\,G_{1n}=J_{11} \\ -V_1\,G_{21}+V_2\,G_{22}-V_2\,G_{23}-...-V_n\,G_{2n}=J_{22} \\ -V_1\,G_{31}-V_2\,G_{32}+V_3\,G_{33}-...-V_n\,G_{3n}=J_{33} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -V_1\,G_{n1}-V_2\,G_{n2}-V_3\,G_{n3}-...+V_n\,G_{nn}=J_{nn} \end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$G_{11}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}$, $G_{22}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}$, $G_{33}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6}$ и т. д. – собственные проводимости узлов, равные суммам проводимостей всех ветвей, сходящихся в данном узле, всегда положительны;

$G_{12}=G_{21}=-\frac{1}{R_1}$, $G_{13}=G_{31}=-\frac{1}{R_2}$, $G_{23}=G_{32}=-\frac{1}{R_3}$ и т. д. – взаимные проводимости между смежными узлами (1 и 2, m и n), равные сумме проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы, всегда отрицательны;

$J_{11}=-\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_3}+J_2$, $J_{22}=\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_3}{R_3}+J_3$, $J_{33}=-\frac{E_2}{R_2}-\frac{E_3}{R_3}-J_2-J_3$ и т. д. – узловые токи узлов, равные алгебраической сумме слагаемых E/R и J от всех ветвей, сходящихся в узле (знак ”+”, если источник действует к узлу, и знак “–” , если источник действует от узла).

Система узловых уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13}\dots G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23}\dots G_{2n} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33}\dots G_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & G_{n3}\dots G_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \\ \dots \\ J_{nn} \end{bmatrix}$$ или сокращенно $[Gu]\times[Vu]=[Ju]$,

где $[Gu]$ – матрица узловых проводимостей, $[Vu]$ – матрица узловых потенциалов, $[Ju]$ – матрица узловых токов.

Последовательность (алгоритм) расчета.

1) Принимают потенциал одного из узлов схемы равным нулю, а потенциалы остальных $(n–1)$ узла считают неизвестными, подлежащими определению.

2) Руководствуясь обобщенной формой, составляют $(n−1)$ уравнение для узлов с неизвестными потенциалами.

3) Определяются коэффициенты узловых уравнений и составляются их матрицы.

4) Система узловых уравнений решается на ЭВМ по стандартной программе для решения систем линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами. В MathCAD для этой цели могут быть применены следующие программы: 1) $Vu = lsolve(Gu, Ju)$, 2) $Vu = Gu^{-1}\cdot Ju$. В результате решения системы уравнений определяются неизвестные потенциалы узлов V_1, V_2, V_3,…

5) Выбираются положительные направления токов в ветвях исходной схемы I_1, I_2 , I_3, I_4, I_5, I_6. Токи ветвей определяются из потенциальных уравнений ветвей через потенциалы узлов V_1, V_2, V_3,…

6) При необходимости определяются напряжения на отдельных элементах ($U_k = I_kR_k$), мощности источников энергии ($PE_k = E_kI_k$, $P_{Jk} = U_k\ J_k$) и приемников энергии ($P_k = I_k^2 \cdot R_k$).

Примечание: пример расчета сложной электрической цепи методом узловых потенциалов см. в Л.17 (задача 2в).

6. Метод двух узлов

Метод двух узлов является частным случаем метода узловых потенциалов при числе узлов в схеме $n = 2$. Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной схеме (рис. 20).

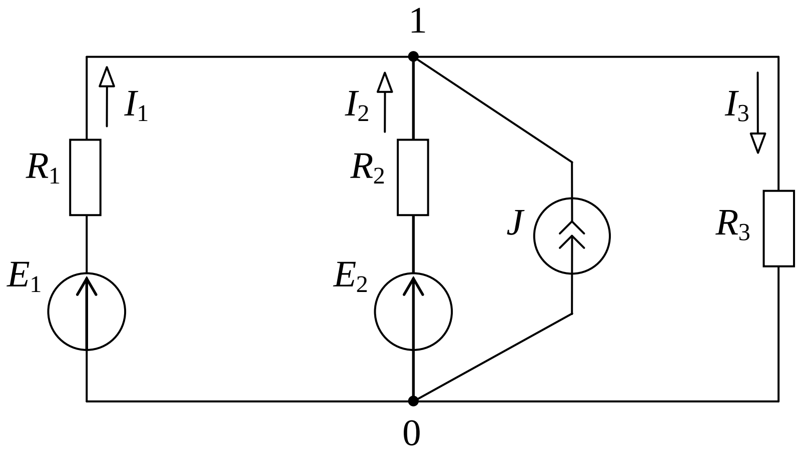


Рис. 20

Принимаем $V_0 = 0$, тогда уравнение для узла 1 по методу узловых потенциалов будет иметь вид: $V_1G_{11} = J_{11}$, откуда следует непосредственное определение напряжения между узлами схемы:

$$U_{10} = V_1 = \frac{J_{11}}{G_{11}} = \frac{\sum J + \sum E/R}{\sum 1/R}$$ – уравнение метода двух узлов.

Применительно к схеме рис. 20 данное уравнение примет конкретную форму:

$$U_{10} = V_1 = \frac{J_{11}}{G_{11}} = \frac{J + E_1/R_1 + E_2/R_2}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}.$$

Токи в ветвях схемы определяются из потенциальных уравнений:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{10}}{R_1}; \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{10}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{10}}{R_3}.$$

7. Принцип наложения. Метод наложения

Принцип (теорема) наложения гласит, что ток в любой ветви (напряжение на любом элементе) сложной схемы, содержащей несколько источников, равен алгебраической сумме частичных токов (напряжений), возникающих в этой ветви (на этом элементе) от независимого действия каждого источника в отдельности. Для упрощения доказательства теоремы выберем одну из наружных ветвей сложной схемы за номером 1, в которой действительный ток равен контурному: $I_1 = I_{k1}$. Составим для сложной схемы систему контурных уравнений $[Rk]\cdot[Ik] = [Ek]$ и решим ее относительно тока $I_1 = I_{k1}$. методом определителей (Крамера):

$$I_1 = Ik_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = E_{11}\frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22}\frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \ldots + E_{nn}\frac{\Delta_{1n}}{\Delta} =$$

$$= E_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta} + \ldots\right) + E_2\left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \ldots\right) + \ldots + E_n\left(\frac{\Delta_{1n}}{\Delta} + \ldots\right) =$$

$$= E_1G_{11} + E_2G_{12} + \ldots + E_nG_{1n} = I_{11} + I_{12} + \ldots + I_{1n}.$$

Здесь G_{11} – входная проводимость ветви 1, G_{12}, G_{13}, …, G_{1n}– взаимные проводимости между 1-й и остальными ветвями, $I_{11} = E_1G_{11}$ – частичный ток в ветви 1 от источника ЭДС E_1, $I_{12} = E_2G_{12}$, …, $I_{1n} = E_nG_{1n}$ – частичные токи в ветви 1 от источников ЭДС $E_2, \ldots, E_n$.

Принцип наложения выполняется только для тех физических величин, которые описываются линейными алгебраическими уравнениями, например, для токов и напряжений в линейных цепях. Принцип наложения не выполняется для мощности, которая с током связана нелинейным уравнением $P = I^2 \cdot R$.

Принцип наложения лежит в основе метода расчета сложных цепей, получившего название метода наложения. Сущность этого метода состоит в том, что в сложной схеме с несколькими источниками последовательно рассчитываются частичные токи от каждого источника в отдельности. Расчет частичных токов выполняют, как правило, методом преобразования схемы. Действительные токи определяются путем алгебраического сложения частичных токов с учетом их направлений.

Пример. Задана схема цепи (рис. 21) и параметры ее элементов: E_1 = 12 В; E_2 = 9 В; $R_1 = R_2 = R_3$ = 2 Ом. Требуется определить токи в ветвях схемы методом наложения.

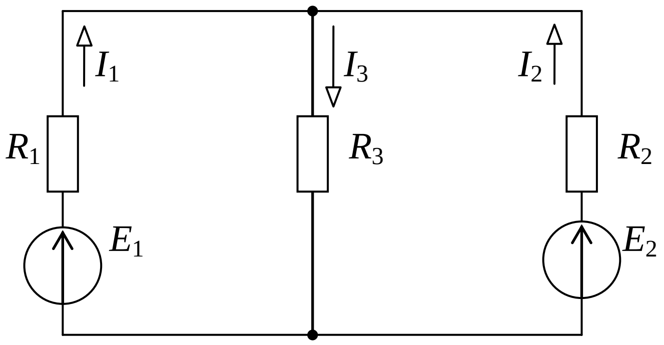


Рис. 21

На рис. 22, *а* представлена схема цепи для определения частичных токов от источника ЭДС E_1, а на рис. 22, *б* – от источника ЭДС E_2.

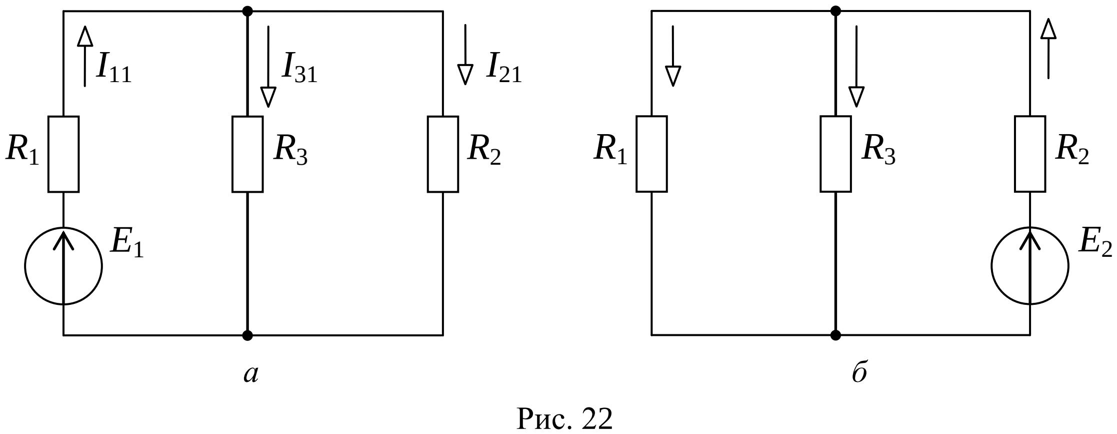


Рис. 22

Частичные токи в схеме рис. 22, *а* от E_1:

$$R_{11} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 2 + \frac{2+2}{2} = 3\,\text{Ом}; \quad I_{11} = E_1/R_{11} = 12/3 = 4\text{А}; \quad I_{21} = I_{31} = 2\text{А}.$$

Частичные токи в схеме рис. 22б от E_2:

$$R_{22} = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 2 + \frac{2+2}{2} = 3\,\text{Ом}; \qquad I_{22} = E_2/R_{22} = 9/3 = 3\text{А};$$

$$I_{12} = I_{32} = 1{,}5\text{А}.$$

Действительные токи как алгебраические суммы частичных токов:

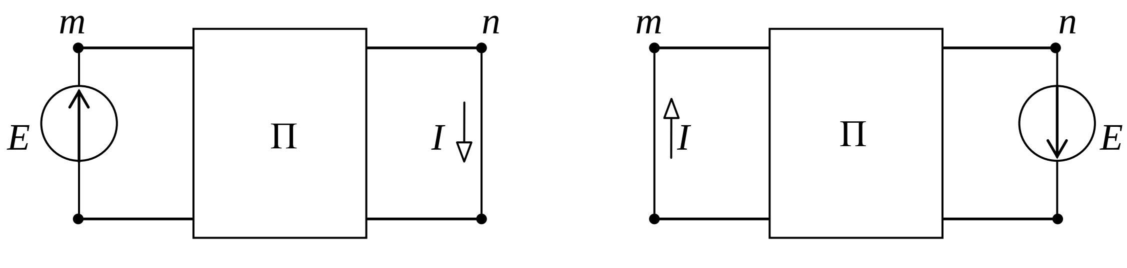
$$I_1 = I_{11} - I_{12} = 4 - 1{,}5 = 2{,}5 \text{ А}$$

$$I_2 = -I_{21} + I_{22} = -2 + 3 = 1 \text{ А}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = 2 + 1{,}5 = 3{,}5 \text{ А}$$

8. Теорема о взаимности

Выделим из сложной схемы две произвольные ветви “m” и “n”, в одной из которых включен источник ЭДС E (в ветви m). Теорема о взаимности гласит, что если источник ЭДС E, включенный в ветви “m”, вызывает в ветви “n” частичный ток I , то такой же источник ЭДС E, включенный в ветвь “n”, вызовет в ветви “m” такой же частичный ток I (рис. 23) .



а *б*

Рис. 23

Доказательство теоремы о взаимности вытекает из принципа наложения. Частичные токи равны:

$I = E \cdot G_{mn}$ – для схемы рис. 23, *а*, $I = E \cdot G_{nm}$ – для схемы рис. 23, *б*.

Так как взаимные проводимости в линейной цепи равны ($G_{mn} = G_{nm}$), то соответственно равны токи в обеих схемах.

9. Теорема о компенсации

Формулировка теоремы: любой пассивный элемент электрической схемы можно заменить а) идеальным источником напряжения с ЭДС, равной напряжению на этом элементе ($E = U$) и направленной навстречу току, б) идеальным источником тока J, равным току в этом элементе ($J = I$) и направленным согласно току I.

Выделим пассивный элемент R_k с током I_k и напряжением U_k из схемы цепи (рис. 24, *а*). Для доказательства п. а) теоремы включим последовательно с элементом R_k навстречу друг другу два идеальных источника ЭДС $E_k = E'_k = U_k$ (рис. 24, *б*). Такое включение источников ЭДС не вызовет изменения режима сложной схемы, так как их действие взаимно компенсируются. Составим потенциальное уравнение между точками "*a*" и "*d*":

$V_a - I_k R_k + E'_k = V_d$, откуда следует $V_a - V_d = U_{ad} = 0$, или $V_a = V_d$.

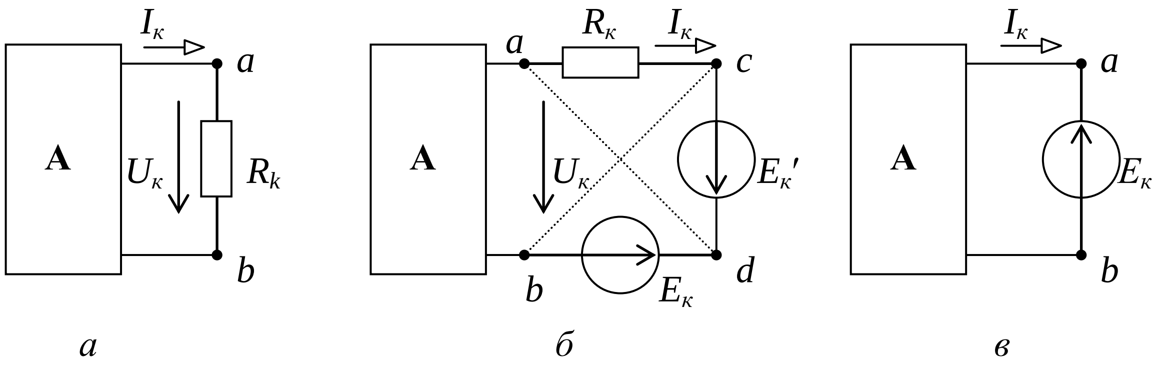


Рис. 24

Точки "*a*" и "*d*", как точки равного потенциала, можно закоротить и закороченный участок "$a-d$" из схемы удалить без нарушения ее режима. В результате удаления закороченного участка схема получает вид рис. 24, *в*, в которой пассивный элемент R_k заменен идеальным источником ЭДС $E_k = U_k$.

Для доказательства п. б) теоремы включим параллельно с элементом R_k два идеальных источника тока $J_k = J'_k = I_k$, направленные навстречу друг другу (рис. 25, *б*).

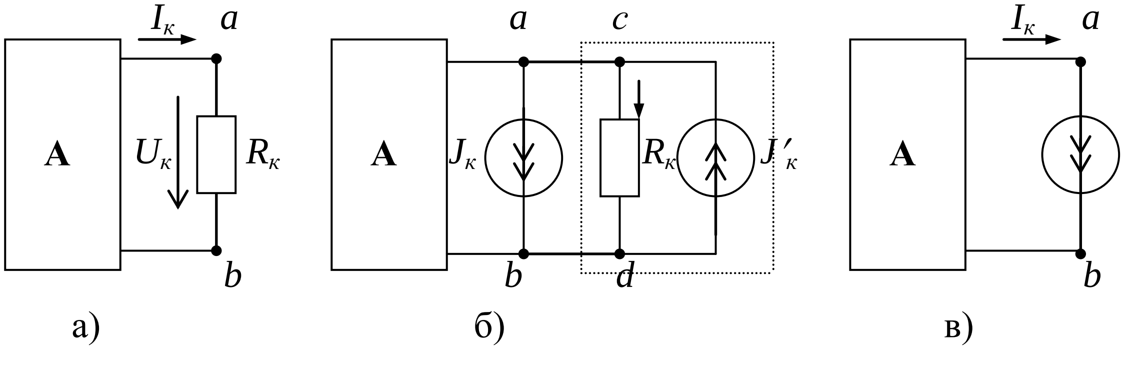


Рис. 25

Такое включение источников тока J_k, J'_k не вызывает изменения режима сложной схемы, так как их действия взаимно компенсируются. С другой стороны, ток в ветви “$a - c$” равен нулю ($I = I_k - J'_k = 0$) и эту ветвь можно отключить без нарушения режима остальной части схемы. В результате отключения схема получает вид рис. 25, *в*, в которой пассивный элемент R_k заменен идеальным источником тока $J_k = I_k$.

10. Теорема о линейных отношениях

Формулировка теоремы: если в произвольной k-ой ветви сложной схемы изменяется ЭДС источника E_k или сопротивление резистора R_k, то параметры режима в двух других ветвях (например, 1 и 2, I_1 и I_2, U_1 и U_2, U_1 и I_2, I_1 и U_2) изменяются так, что между ними сохраняется линейная зависимость ($I_1 = a + bI_2$ и т.д.).

Пусть изменяется ЭДС $E_к$. В соответствии с принципом наложения ток каждой ветви равен сумме частичных токов от каждого источника в отдельности:

$$I_1 = E_1G_{11} + E_2G_{12} + ... + E_kG_{1k} = A_1 + E_kG_{1k}$$

$$I_2 = E_1G_{21} + E_2G_{22} + ... + E_kG_{2k} = A_2 + E_kG_{2k}\,.$$

Исключим из уравнений переменную величину $E_к$ путем подстановки:

$I_1 = A_1 + \dfrac{I_2 - A_2}{G_{2k}}G_{1k} = (A_1 - A_2\dfrac{G_{1k}}{G_{2k}}) + \dfrac{G_{1k}}{G_{2k}}I_2 = a + bI_2$, что требовалось доказать.

Если в схеме изменяется сопротивление резистора $R_k = \text{var}$, то для доказательства теоремы о линейных отношениях переменный резистор $R_k = \text{var}$ следует заменить в соответствии с теоремой о компенсации переменной ЭДС $E_k = I_kR_k = \text{var}$ и повторить доказательство.

11. Теорема об эквивалентном генераторе

Формулировка теоремы: по отношению к выводам выделенной ветви или отдельного элемента остальную часть сложной схемы можно заменить а) эквивалентным генератором напряжения с ЭДС $E_Э$, равной напряжению холостого хода на выводах выделенной ветви или элемента ($E_Э = U$хх) и с внутренним сопротивлением R_0, равным входному сопротивлению схемы со стороны выделенной ветви или элемента ($R_0 = R$вх); б) эквивалентным генератором тока с $J_Э$, равным току короткого замыкания на выводах выделенной ветви или элемента ($J_Э = I$кз), и с внутренней проводимостью G_0, равной входной проводимости схемы со стороны выделенной ветви или элемента ($G_0 = G$вх).

Для доказательства п. а) теоремы удалим из схемы рис. 26, *а* выделенную ветвь и между точками ее подключения измерим (рассчитаем) напряжение холостого хода Uхх = $Va - Vb$ (рис. 26, *б*).

Включим последовательно с выделенной ветвью два направленные встречно источника ЭДС, равные напряжению холостого хода ($E_1 = E_2 = U$хх) (рис. 26, *в*). Такое включение дополнительных источников

ЭДС не изменит режим сложной схемы, так как их действие взаимно компенсируется.

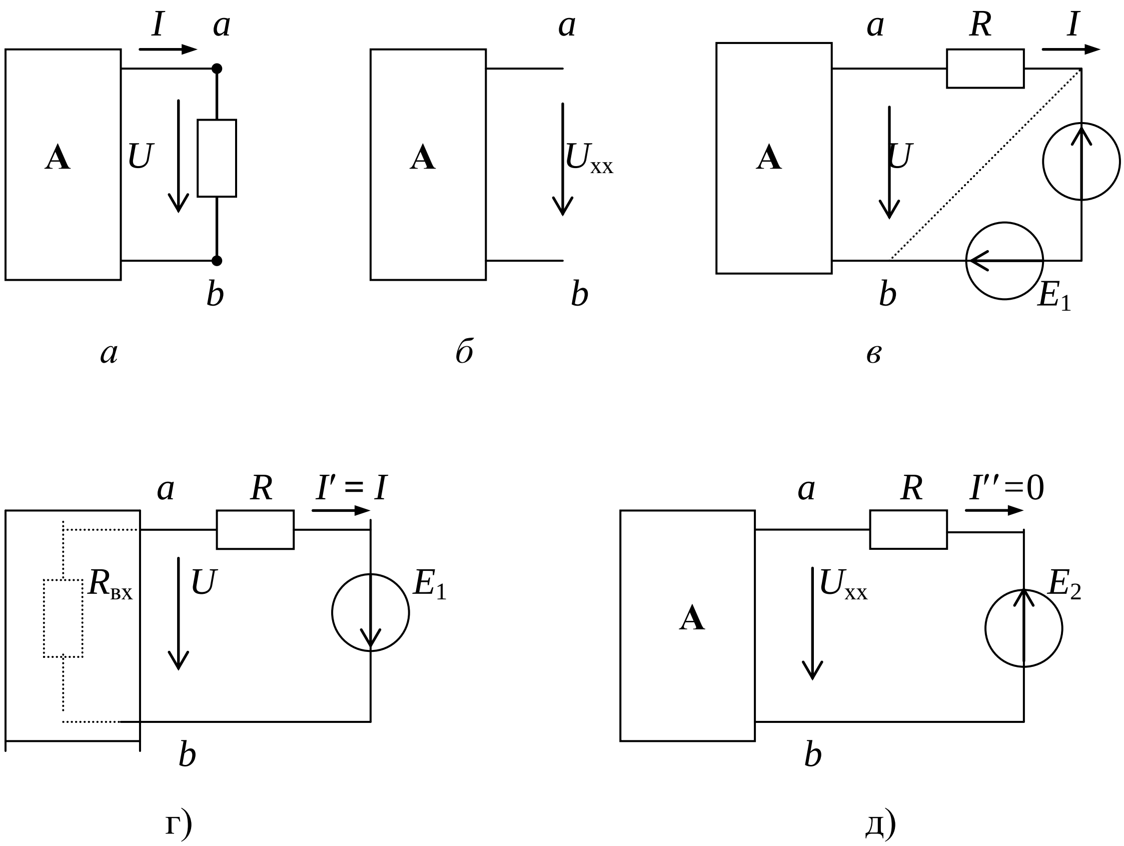


Рис. 26

Определим ток в выделенной ветви по принципу наложения, как алгебраическую сумму из двух частичных токов: а) тока I', возникающего от независимого действия ЭДС E_1 (рис. 26, *г*); б) тока I'', возникающего от совместного действия ЭДС E_2 и всех источников сложной схемы (рис. 26, *д*).

Частичный ток в схеме рис. 26, *г* по закону Ома равен:

$$I' = \frac{E_1}{R + R_{вх}} = \frac{U_{хх}}{R + R_{вх}},$$

где *R*вх – входное сопротивление схемы со стороны выделенной ветви.

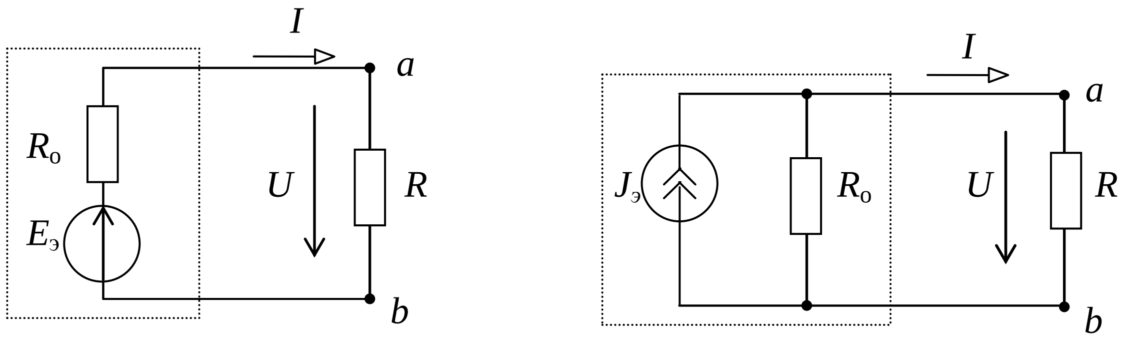
Частичный ток в схеме рис. 26, *д* равен нулю $I''0$, так как $E_2 = U_{хх}$ обеспечивает условия режима холостого хода ветви.

Результирующий ток в выделенной ветви равен:

$$I = I' + I'' = I' = \frac{E_1}{R_k + R_{вх}} = \frac{U_{хх}}{R_k + R_{вх}}.$$

Полученному уравнению соответствует эквивалентная схемы замещения рис. 27, *а*, где остальная часть схемы заменена эквивалентным генератором напряжения с параметрами $E_э$ = Uхх, $R_0 = R_{вв}$, что и требовалось доказать.

Генератор напряжения ($E_Э$, R_0) может быть заменен эквивалентным генератором тока ($J_Э$, G_0) (рис. 27, *б*) исходя из условия эквивалентности: $J_Э = \dfrac{E_Э}{R_0}; \quad G_0 = \dfrac{1}{R_0}$.



а б

Рис. 27

Параметры эквивалентного генератора тока могут быть определены (рассчитаны или измерены) независимым путем, как $J_Э$ = Iкз, G_0 = Gвх, где Iкз – ток короткого замыкания в выделенной ветви.

Метод расчета тока в выделенной ветви сложной схемы, основанный на применении теоремы об эквивалентном генераторе, получил название метода эквивалентного генератора напряжения (тока) или метода холостого хода и короткого замыкания (х.х. и к.з.). Последовательность (алгоритм) расчета выглядит так.

1) Удаляют из сложной схемы выделенную ветвь, выполняют расчет оставшейся части сложной схемы любым методом и определяют напряжение холостого хода $Uxx = Va - Vb$ между точками подключения выделенной ветви.

2) Удаляют из сложной схемы выделенную ветвь, закорачивают в схеме точки подключения выделенной ветви, выполняют расчет оставшейся части сложной схемы любым методом и определяют ток короткого замыкания $I_{кз ab}$ в закороченном участке между точками подключения выделенной ветви.

3) Удаляют из схемы выделенную ветвь, в оставшейся части схемы удаляют все источники (источники ЭДС E закорачивают, а ветви с источниками тока J удаляют из схемы), методом преобразования выполняют свертку пассивной схемы относительно точек подключения выделенной ветви и таким образом определяют Rвх.

4) Составляют одну из эквивалентных схем замещения с генератором напряжения (рис. 27а) или с генератором тока (рис. 27, *б*).

5) Выполняют расчет эквивалентной схемы (рис. 27, *а* или рис. 27, *б*) и находят искомый ток, например:

$$I = \frac{E_Э}{R_0 + R_k}$$ – по закону Ома для схемы рис. 27, *а*;

$$I = \frac{Uab}{R_k} = \frac{1}{R_k} \cdot \frac{J_Э}{1/R_0 + 1/R_k}$$ – по методу двух узлов для схемы рис. 27, *б*.

Так как между тремя параметрами эквивалентного генератора справедливо соотношение $E_Э = J_Э \cdot R_0$, то для их определения достаточно рассчитать любые два из трех параметров согласно п.п. 1), 2), 3), а третий параметр определить из приведенного соотношения.

Пример. В схеме рис. 28 с заданными параметрами элементов (E_1 = = 100 В; E_2 = 20 В; E_3 = 30 В, E_4 = 10 В; $R_1 = R_2$ = 40 Ом; $R_3 = R_4$ = 20 Ом; $R_5 = R_6$ = 10 Ом) определить ток в выделенной ветви I_6 методом эквивалентного генератора.

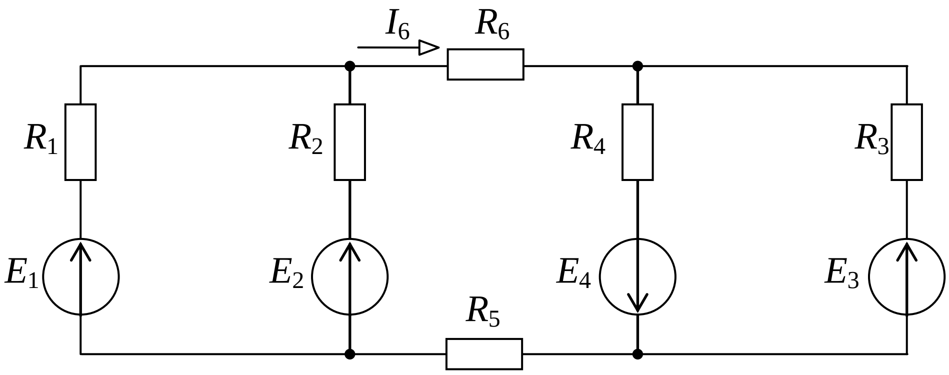


Рис. 28

Решение задачи выполняется поэтапно.

1) Определение Uхх = $E_Э$ в схеме рис. 29.

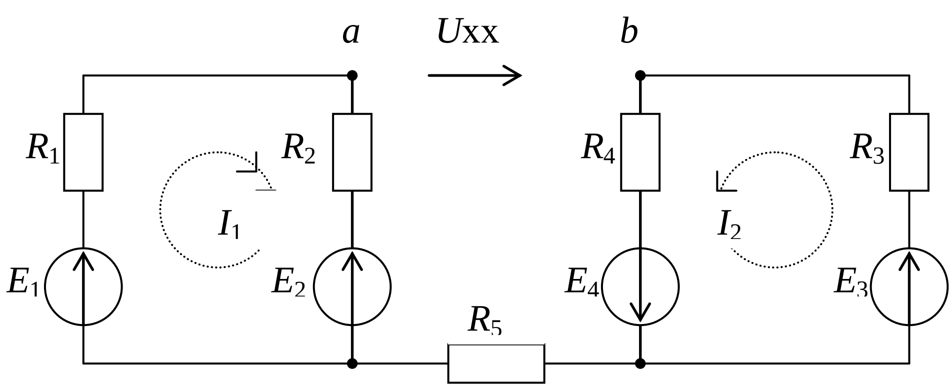


Рис. 29

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 - 20}{40 + 40} = 1\text{А}; \qquad I_2 = \frac{E_3 + E_4}{R_3 + R_4} = \frac{30 + 10}{20 + 20} = 1\text{А};$$

$$Va - I_1 R_2 - E_2 + 0 \cdot R_5 - E_4 + I_2 R_4 = Vb; \Rightarrow$$

$$Uab = Va - Vb = I_1 R_2 + E_2 + E_4 - I_2 R_4 = 40 + 20 + 10 - 20 = 50 \text{ В}$$

2) Определение Rвх = R_0 в схеме рис. 30.

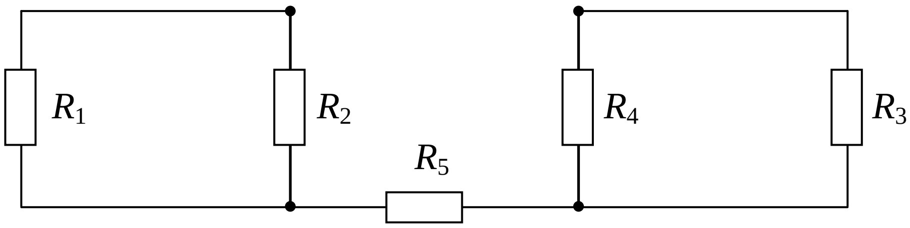


Рис. 30

$$R_{вх} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_5 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{40 \cdot 40}{40 + 40} + 10 + \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 40 \text{ Ом}$$

3) Расчет эквивалентной схемы рис. 31 и определение искомого тока I_6.

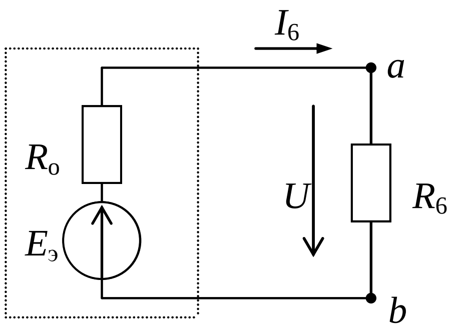


Рис. 31

$$I_6 = \frac{E_Э}{R_6 + R_0} = \frac{50}{10 + 40} = 1\text{А}$$

Примечание: пример расчета тока в выделенной ветви сложной электрической цепи методом эквивалентного генератора см. в Л.17 (задача 3).

Т3. РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

1.Топологические определения схемы

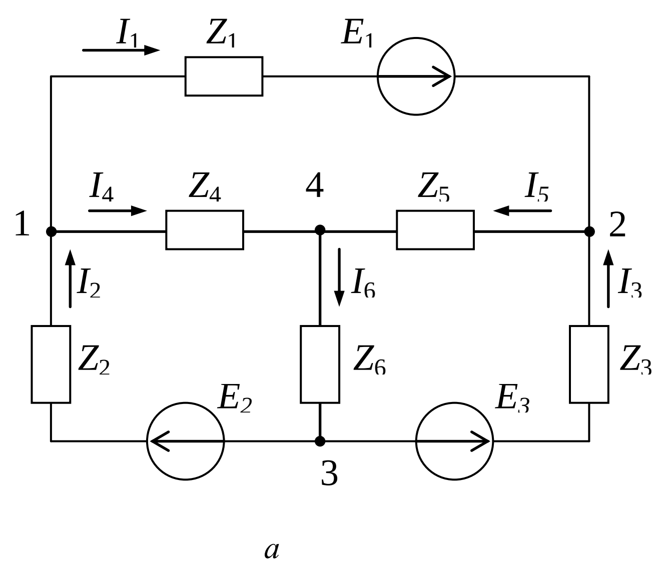
С появлением ЭВМ и их широким применением для решения сложных математических задач были разработаны специальные топологические методы расчета сложных электрических цепей на основе теории графов и матриц.

Схема сложной электрической цепи (рис. 32, *а*) может быть заменена (представлена) направленным графом (рис. 32, *б*) с соблюдением следующих условий:

1) узлы графа соответствуют узлам схемы;

2) ветви графа соответствуют ветвям схемы;

3) направления ветвей соответствуют направлениям токов в ветвях схемы.



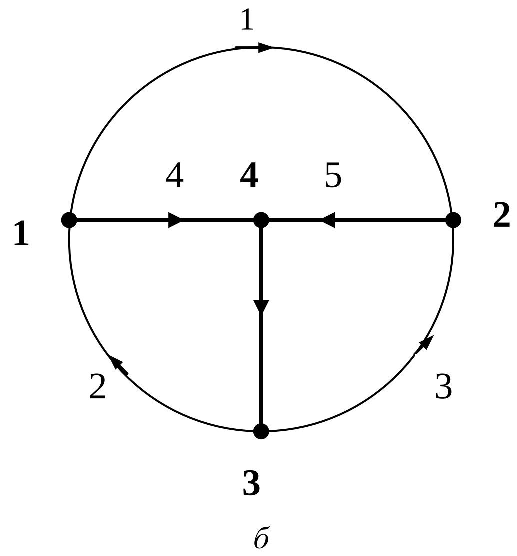


Рис. 32

Любая часть графа называется **подграфом**. Минимальный связанный подграф, соединяющий все узлы графа и не образующий контуров, называется **деревом** графа (на схеме графа дерево обозначается жирной линией). Для конкретного графа может быть составлено определенное множество вариантов деревьев, но в расчете схемы принимается любой из вариантов. Ветви графа, не входящие в его дерево, называются **связями** или **хордами**.

Структура графа и соответственно структура электрической схемы может быть описана с помощью топологических матриц или матриц соединения. Таких матриц несколько, для расчета электрических цепей используются две основные: $[A]$ – матрица соединений «узлы-ветви» и $[B]$– матрица соединений «контуры-ветви».

В общем случае сложная схема содержит «m» ветвей и «n» узлов, при этом максимальное число ветвей зависит от числа узлов: $m_{max} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Составим таблицу соединений «узлы-ветви» руководствуясь следующими правилами:

1 – ветвь выходит из узла,

–1 – ветвь входит в узел,

0 – отсутствие связи с узлом.

Таблица 1

№ узла \ № ветви	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	–1	0	1	0	0
2	–1	0	–1	0	1	0
3	0	1	1	0	0	–1
4	0	0	0	–1	–1	1

Так как каждая ветвь имеет только один вход (–1) и один выход (+1), то сумма чисел по вертикали для любого столбца равна нулю. Из этого следует, что независимыми являются только 3 из 4 строк таблицы. Матрица соединений $[A]$ – «узлы-ветви» получается из приведенной выше таблицы путем вычеркивания любой строки (например, строки № 4):

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Размерность матрицы соединений $[A]$ «узлы-ветви» равна $[(n-1) \times m]$, где n–1 – число независимых узлов, m – число ветвей.

Независимыми называются контуры графа, образованные одной из хорд и ветвями дерева. Число независимых контуров соответствующих числу хорд графа: $k = m - (n-1) = 3$, контуры нумеруются по номеру хорды (1, 2, 3). Направление обхода контура принимается по направлению хорды, которая входит в состав этого контура.

Составим таблицу соединений «контуры-ветви», руководствуясь следующими правилами:

1 – направление ветви совпадает с направлением обхода контура,

–1 – направление ветви не совпадает с направлением обхода контура,

0 – ветвь не входит в контур.

Таблица 2

№ контура \ № ветви	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	0	0	–1	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	1	1

На основе данной таблицы составляется матрица соединений [*B*] – «контуры-ветви»:

$$[B]=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Размерность матрицы соединений [*B*] равна $[k \times m]$, где $k = m-(n-1)$ – число независимых контуров, *m* – число ветвей.

Если матрицы соединений $[A]$ и $[B]$ составлены верно, то должно выполняться условие: $[B]\cdot[A]^T = 0$.

Уравнения Ома и Кирхгофа в матричной форме

Если в исследуемой сложной схеме содержатся параллельно включенные ветви, то для составления матриц соединений такие ветви необходимо заменить (объединить) одной эквивалентной ветвью.

В общем случае любая *k*-ая ветвь схемы кроме сопротивления (проводимости) $R_к = \dfrac{1}{G_к}$ может содержать источник ЭДС $E_к$, источник тока $\underline{J}_к$. Схема и граф обобщенной ветви показаны на рис. 33, *а*, *б*:

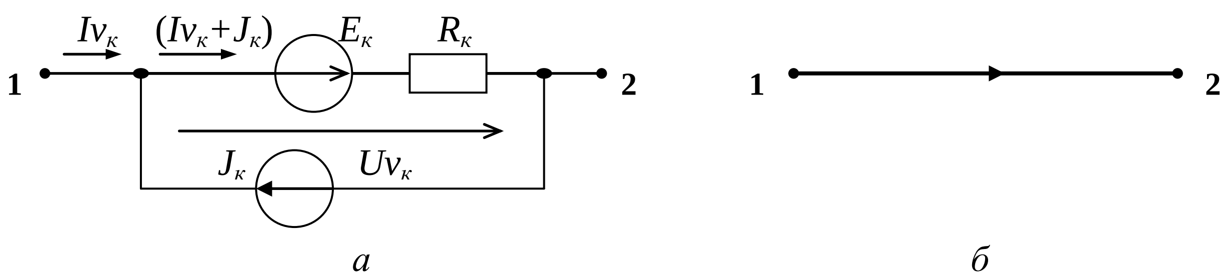


Рис. 33

Ток ветви $Iv_к$, напряжение ветви $Uv_к = V_1 - V_2$.

Из потенциального уравнения ветви $V_1 = E_k - (Iv_к - J_к)\cdot R_к = V_2$ следуют уравнения Ома для *k*-ой ветви:

$$\left.\begin{aligned} Uv_к &= R_к \cdot Iv_к + R_к \cdot J_к - E_к \\ Iv_к &= G_к \cdot Uv_к + G_к \cdot E_к - J_к \end{aligned}\right\}$$

Для всех «*m*» ветвей составим систему уравнений по этой форме:

$$\begin{cases} Uv_1 = R_1 \cdot Iv_1 + R_1 \cdot J_1 - E_1 \\ Uv_2 = R_2 \cdot Iv_2 + R_2 \cdot J_2 - E_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Uv_m = R_m \cdot Iv_m + R_m \cdot J_m - E_m \end{cases}$$

Представим полученную систему из «*m*» уравнений в матричной форме. Для этой цели введем следующие обозначения матриц:

$$[Uv] = \begin{bmatrix} Uv_1 \\ Uv_2 \\ \cdots \\ Uv_m \end{bmatrix};\ [\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} Iv_1 \\ Iv_2 \\ \cdots \\ Iv_m \end{bmatrix};\ [\mathrm{J}] = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \cdots \\ J_m \end{bmatrix};[\mathrm{E}] = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdots \\ E_m \end{bmatrix}$$

– столбцовые матрицы соответственно напряжений, токов, источников тока и источников ЭДС.

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{R}_m \end{bmatrix};\quad [G] = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{G}_m \end{bmatrix}$$

– диагональные матрицы соответственно сопротивлений и проводимостей.

Уравнения Ома в матричной форме получат вид:

$$\left.\begin{aligned} [Uv] &= [R]\cdot[Iv] + [R]\cdot[J] - [E] \\ [Iv] &= [G]\cdot[Uv] + [G]\cdot[E] - [J] \end{aligned}\right\}$$

Уравнения Кирхгофа в обычной форме имеют вид:

$\sum Iv = 0$ – первый закон Кирхгофа для узлов,

$\sum Uv = 0$ – второй закон Кирхгофа для контуров.

Система уравнений Кирхгофа в матричной форме получается через матрицы соединений $[A]$ и $[B]$:

$[A]\cdot[Iv] = 0$ – (n – 1) уравнений по 1-му закону Кирхгофа,

$[\mathrm{B}]\cdot[Uv] = 0$ – (m – n +1) уравнений по 2-му закону Кирхгофа.

Составленная система уравнений содержит “m” неизвестных токов и “m” неизвестных напряжений, всего 2“m” неизвестных, и непосредственно не может быть решена. Исключить лишние неизвестные можно методом их замены из уравнений Ома.

Сделаем подстановку в уравнения Кирхгофа напряжений $[Uv]$ из уравнений закона Ома, тогда получим:

$$[A]\cdot[Iv]=0$$
$$[B]\cdot[R]\cdot[Iv]=[B]\cdot[E]-[B]\cdot[R]\cdot[J]$$

Для сравнения приведем те же уравнения в обычной форме:

$$\sum Iv=0$$
$$\sum Iv\cdot R=\sum E-\sum J\cdot R$$

Сделаем подстановку в уравнения Кирхгофа токов $[Iv]$ из уравнений закона Ома, тогда получим:

$$[A]\cdot[G]\cdot[Uv]=[A]\cdot[J]-[A]\cdot[G]\cdot[E]$$
$$[B]\cdot[Uv]=0$$

– система из “m” уравнений Кирхгофа для напряжений в матричной форме.

Для сравнения приведем те же уравнения в обычной форме:

$$\left\{\begin{matrix}\sum Uv\cdot G=\sum J-\sum E\cdot G\\ \sum Uv=0\end{matrix}\right\}$$

3. Контурные уравнения в матричной форме

Вводим понятия контурных токов Ik . Контурные токи замыкаются по контурам-ячейкам графа, именуются по имени хорды, их направление совпадает с направлением хорды. Столбовая матрица контурных токов:

$$[\underline{I}k]=\begin{bmatrix}\underline{I}k_1\\ \underline{I}k_2\\ \dots\\ \underline{Ik_{m-(n-1)}}\end{bmatrix}$$

Действительные токи связаны с контурными через матрицу $[B]$:

$$[Iv]=[B]^T\cdot[Ik]$$

Заменим в уравнениях 2-го закона Кирхгофа для токов действительные токи $[Iv]$ на контурные Ik, в результате чего получается система контурных уравнений в матричной форме.:

$$[B]\cdot[R]\cdot[B]^T\cdot[Ik]=[B]\cdot[E]-[B]\cdot[R]\cdot[J]$$

Введем обозначения:

$$[Rk]=[B]\cdot[R]\cdot[B]^T=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots \\ R_{21} & R_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$ – матрица контурных сопротивлений,

$$[Ek]=[B]\cdot[E]-[B]\cdot[R]\cdot[J]=\begin{bmatrix} Ek_1 \\ Ek_2 \\ \dots . \end{bmatrix}$$ – матрица контурных ЭДС.

Тогда система контурных уравнений в обобщенной матричной форме получит вид:

$$[Rk]\cdot[Ik]=[Ek]$$

4. Узловые уравнения в матричной форме

Вводим понятие узловых потенциалов *Vu*. Потенциал последнего *n*-го узла, для которого отсутствует строка в матрице [*A*] принимается равным 0. Столбовая матрица узловых потенциалов:

$$[Vu]=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots . \\ V_{n-1} \end{bmatrix}$$

Напряжения ветвей связаны с потенциалами узлов через матрицу $[A]$:

$$[Uv]=[A]^T\cdot[Vu]$$

Заменим в уравнениях 1-го закона Кирхгофа $[Uv]=[A]^T\cdot[Vu]$, , в результате чего получается система узловых уравнений в матричной форме:

$$[A]\cdot[G]\cdot[A]^T\cdot[Vu]=[A]\cdot[J]-[A]\cdot[Y]\cdot[E]$$

Введем обозначения:

$$[Gu]=[A]\cdot[G]\cdot[A]^T=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots \\ G_{21} & G_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$ – матрица узловых проводимостей,

$$[Ju]=[A]\cdot[J]-[A]\cdot[Gu]\cdot[E]=\begin{bmatrix} Ju_1 \\ Ju_2 \\ \dots . \end{bmatrix}$$ – матрица узловых токов.

Тогда система узловых уравнений в обобщенной матричной форме получит вид:

$$\left[Gu\right]\cdot\left[Vu\right]=\left[Ju\right]$$

5. Расчет сложной цепи методом контурных токов в матричной форме

Пусть задана сложная схема электрической цепи и параметры ее элементов. Требуется выполнить расчет схемы и определить напряжения и токи отдельных ветвей, мощности отдельных источников и приемников энергии и проверить их баланс. Решение данной задачи в матричной форме выполняется на ЭВМ в следующей последовательности.

1) Анализируют структуру схемы. Если в схеме имеются параллельно включенные ветви, то их заменяют одной эквивалентной ветвью. Задаются (произвольно) положительными направлениями токов в ветвях схемы.

2) Заданные параметры отдельных источников напряжения и тока представляют в виде столбцовых матриц $[E]$ и $[J]$, сопротивления ветвей представляют в виде диагональной матрицы $[R]$, индексируя элементы по номеру ветви.

3) Составляют направленный граф схемы, в соответствии с графом составляют матрицы соединений $[A]$ и $[B]$.

4) Составляют систему контурных уравнений:

$$[Rk]\cdot[Ik] = [Ek],$$

где $[Rk] = [B]\cdot[R]\cdot[B]^T$ − матрица контурных сопротивлений,

$[Ek] = [B]\cdot[E] - [B]\cdot[R]\cdot[J]$ − матрица контурных ЭДС.

5) Решают систему контурных уравнений и определяют контурные токи: $[Ik] = [Rk]^{-1}\cdot[Ek]$.

6) Определяют токи и напряжения:

$[Iv] = [B]^T\cdot[Ik]$ − матрица токов ветвей,

$[I] = [Iv] + [J]$ − матрица токов в пассивных элементах,

$[Uv] = [R]\cdot[Iv] + [R]\cdot[J] - [E]$ − матрица напряжений на ветвях,

$[U] = [Rv] + [E]$ − матрица напряжений на пассивных элементах.

7) Далее определяют мощности источников и приемников ($k = 1...m$):

$E_k = E_k\cdot I_k$ − матрица мощностей источников ЭДС,

$PJ_k = Uv_k\cdot I_k$ − матрица мощностей источников тока,

$P_k = U_k\cdot I_k$ − матрица мощностей приемников.

8) Проверяют баланс мощностей: $PE+\sum PJ=\sum P$

Примечание: примеры расчета сложных электрических цепей методом контурных токов в матричной форме см. в Л.17 (задачи 4 и 4а).

6. Расчет сложной цепи методом узловых потенциалов в матричной форме

Пусть задана сложная схема электрической цепи и параметры ее отдельных элементов. Требуется выполнить расчет схемы и определить напряжения и токи отдельных ветвей, мощности отдельных источников и приемников энергии и проверить их баланс. Решение данной задачи выполняется в матричной форме на ЭВМ в следующей последовательности.

1) Анализируют структуру схемы. Если в схеме имеются параллельно включенные ветви, то их заменяют одной эквивалентной ветвью. Задаются (произвольно) положительными направлениями токов в ветвях схемы.

2) Заданные параметры отдельных источников напряжения и тока представляют в виде столбцовых матриц $[E]$ и $[J]$, сопротивления ветвей представляют в виде диагональной матрицы $[R]$, индексируя элементы по номеру ветви. Матрицу проводимостей получают путем обращения матрицы сопротивлений: $[G] = [R]^{-1}$.

3) Составляют направленный граф схемы, в соответствии с графом составляют матрицы соединений $[A]$ и $[B]$.

4) Составляют систему узловых уравнений: $[Gu]\cdot[Vu] = [Ju]$,
где $[Gu] = [A] \cdot [G] \cdot [A]^T$ – матрица узловых проводимостей,
$[Ju] = [A] \cdot [J] - [A] \cdot [G] \cdot [E]$ – матрица узловых токов.

5) Решают систему узловых уравнений и определяют потенциалы узлов:

$$[Vu] = [Gu]^{-1} \cdot [Ju].$$

6) Определяют напряжения и токи:

$[Uv] = [A]^T \cdot [Ju]$ – матрица напряжений на ветвях,
$[U] = [Uv] + [E]$ – матрица напряжений на пассивных элементах,
$[Iv] = [G] \cdot [Uv] + [G] \cdot [E - [J]$ – матрица токов ветвей,
$[I] = [Iv] + [J]$ – матрица токов в пассивных элементах.

7) Далее определяют мощности ($k = 1...m$):

$PE_k = E_k \cdot I_k$ – матрица мощностей источников ЭДС,
$PJ_k = Uv_k \cdot I_k$ – матрица мощностей источников тока,
$P_k = U_k \cdot I_k$ – матрица мощностей приемников.

Проверяют баланс мощностей: $PE + \sum PJ = \sum P$

Примечание: примеры расчета сложных электрических цепей методом контурных токов в матричной форме см. в Л.17 (задачи 4 и 4а).

Т4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1. Переменный ток (напряжение) и характеризующие его величины

Переменным называется ток $i(t)$ [напряжение $u(t)$], периодически изменяющийся во времени по произвольному закону. В электроэнергетике понятие “переменный’’ употребляют в более узком смысле, а именно: под переменным понимают ток (напряжение), изменяющийся во времени по синусоидальному закону:

$$i(t) = Im \cdot \sin(\omega t + \psi_i), \qquad u(t) = Um \cdot \sin(\omega t + \psi_u)$$

Графические диаграммы этих функций имеют вид рис. 34:

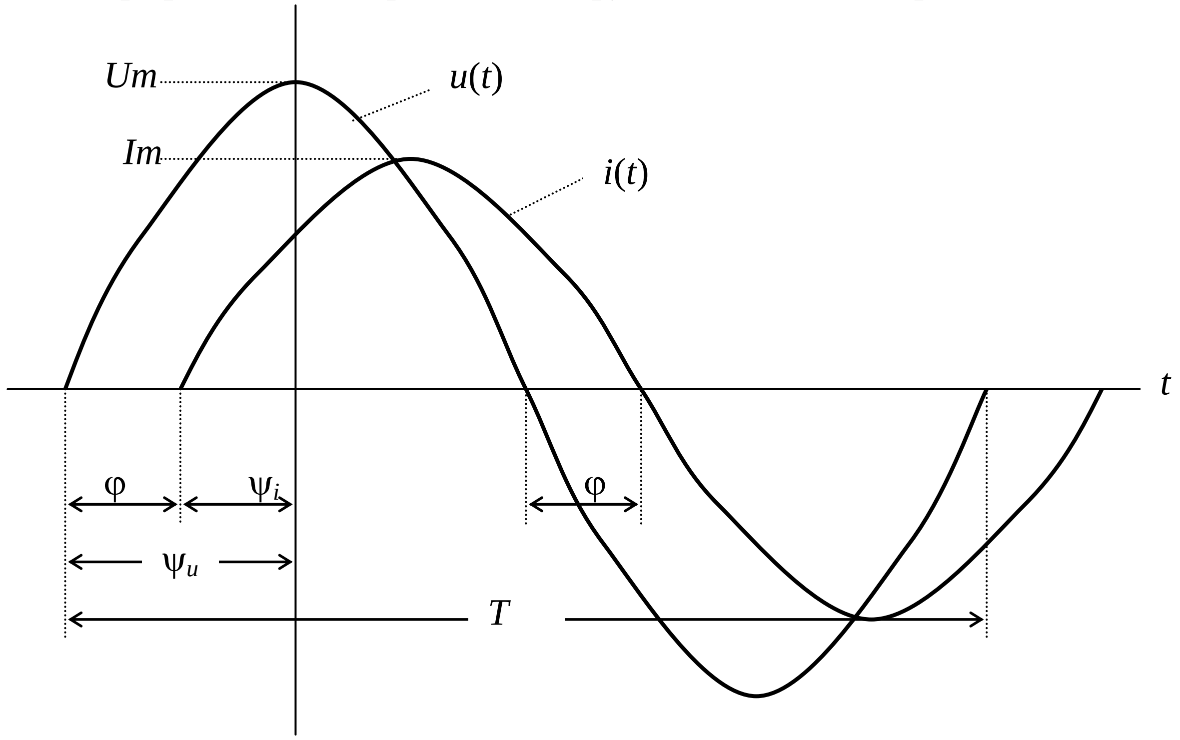


Рис. 34

Время, за которое происходит одно полное колебание, называется периодом и обозначается буквой *T*. Число полных колебаний (периодов) в единицу времени называется частотой *f*:

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Гц}]$$

Из математики известно, что синусоидальная функция времени может быть описана вращающимся вектором со скоростью вращения ω. В технике эта величина получила название угловой частоты:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [\text{с}^{-1}] \text{ или } [\text{рад/с}]$$

В выражениях функций $i(t)$ и $u(t)$ приняты обозначения:

$u(t)$, $i(t)$ или u, i – мгновенные значения функций, т.е. их значения в произвольно выбранный момент времени;

Um, Im – амплитудные (максимальные) значения функций;

$(\omega t + \psi)$ – фаза, определяющая момент времени;

ψ_u, ψ_i – начальные фазы функций, определяющие их значения в момент $t = 0$, зависят от выбора начала отсчета времени;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$ – угол сдвига фаз (разность начальных фаз) между напряжением и током, не зависит от выбора начала отсчета времени.

Синусоидальная форма для функций токов и напряжений в электроэнергетике утверждена в качестве стандарта и является одним из показателей качества электроэнергии как товара.

Из физических законов следует, что при протекании синусоидального тока $i = Im \cdot \sin\omega t$ через любой линейный элемент электрической цепи напряжение на его зажимах также будет синусоидальным, и наоборот, при синусоидальном напряжении ток также будет иметь синусоидальную форму.

Из закона Ома для резистора R следует:

$$u_R = R \cdot i = R \cdot Im \cdot \sin\omega t = Um \cdot \sin\omega t.$$

Из закона электромагнитной индукции для катушки L следует:

$$u_L = -e = L\frac{di}{dt} = \omega L \cdot Im \cdot \cos\omega t = Um \cdot \sin(\omega t + 90°).$$

Из закона сохранения заряда для конденсатора C следует:

$$u_C = \frac{1}{C}\int i \cdot dt = -\frac{I_m}{\omega C}\cos\omega t = Um \cdot \sin(\omega t - 90°).$$

Таким образом, в цепи переменного тока любой сложности напряжения и токи на всех участках будут изменяться по синусоидальному закону при условии, что источники энергии обеспечивают синусоидальную форму напряжений на их выводах.

Диапазон частот токов и напряжений, применяемых в различных отраслях современной техники, очень велик: от 10^{-1} Гц до 10^{9} Гц. В электроэнергетике в качестве стандарта частоты в Европе принята частота $f = 50$ Гц ($\omega = 2\pi f = 314$ с$^{-1}$), а в США и Канаде $f = 60$ Гц ($\omega = 377$ с$^{-1}$), в других странах возможны оба варианта или один из них.

Частота $f = 50$ Гц принята в качестве стандарта исторически на заре развития электроэнергетики и уже не соответствует сегодняшнему уровню развития техники. Оптимальной на сегодня была бы частота в диапазоне 150…200 Гц. Однако переход на оптимальную частоту связан с большими техническими сложностями и в ближайшее время не может быть осуществлен.

2. Среднее и действующее значения переменного тока и напряжения

Среднее или среднеарифметическое значение $F_{\text{ср}}$ произвольной функции времени $f(t)$ за интервал времени T определяется по формуле :

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot dt$$

Численно среднее значение $F_{ср}$ равно высоте прямоугольника, равновеликого по площади фигуре, ограниченной кривой $f(t)$, осью t и пределами интегрирования $0 - T$ (рис. 35).

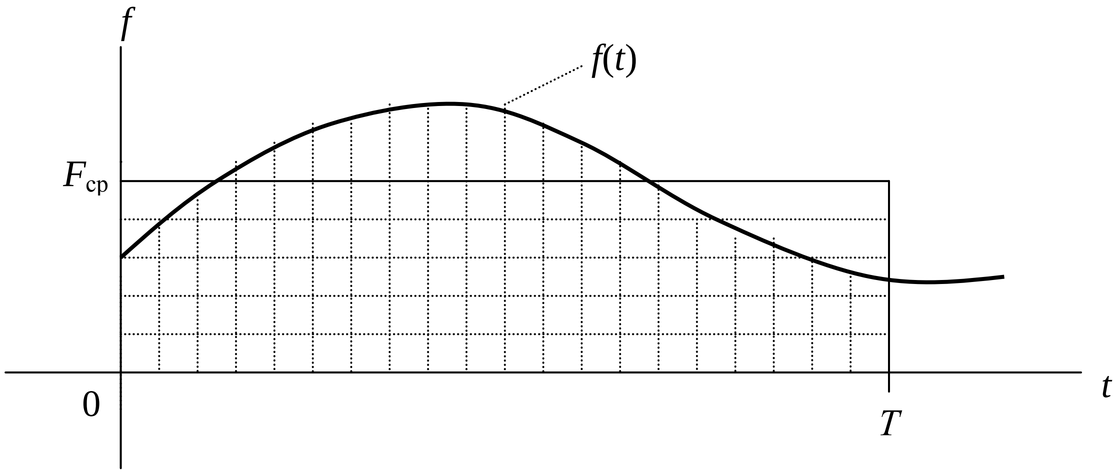


Рис. 35

Для синусоидальной функции среднее значение за полный период T (или за целое число полных периодов) равно нулю, так как площади положительной и отрицательной полуволн этой функции равны. Для переменного синусоидального напряжения определяют среднее по модулю значение за полный период T или среднее значение за половину периода ($T/2$) между двумя нулевыми значениями (рис. 36) :

$$U_{ср} = \frac{1}{\frac{2}{T}}\int_0^{\frac{T}{2}} U_m \cdot \sin\omega t\, dt = \frac{2U_m}{\omega T}\int_0^{\pi}\sin\omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2U_m}{\frac{2\pi}{T}T}\left|-\cos\omega t\right|_0^{\pi} = \frac{2U_m}{\pi} \approx 0{,}637\,U_m$$

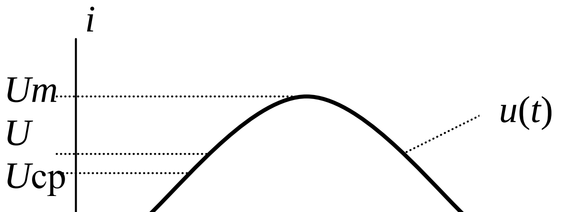
Аналогично получим для тока: $I_{ср} = \dfrac{2I_m}{\pi} \approx 0.637 I_m$

Действующее значение переменного напряжения определяется как среднеквадратичное значение функции за период :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T Um^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{Um^2}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t\right)dt} = \sqrt{\frac{Um^2}{T}\cdot\frac{1}{2}T} = \frac{Um}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 Um$$

Аналогично получим для тока: $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \cdot I_m$



Количество энергии, выделяемое переменным током в резисторе R за время T, по закону Джоуля будет равно $W = \int_0^T i^2 R dt = I^2 RT$, а активная мощность соответственно $P = \frac{W}{T} = I^2 R$. Таким образом, количественные параметры электрической энергии на переменном токе (количество энергии, мощность) определяются действующими значениями напряжения U и тока I. По этой причине в электроэнергетике все теоретические расчеты и экспериментальные измерения принято выполнять для действующих значений токов и напряжений. В радиотехнике и в технике связи, наоборот, оперируют максимальными значениями этих функций.

Приведенные выше формулы для энергии и мощности переменного тока полностью совпадают с аналогичными формулами для постоянного тока. На этом основании можно утверждать, что энергетически постоянному току эквивалентно действующее значение переменного тока.

Синусоидальная функция времени, как периодическая функция, характеризуется следующими коэффициентами :

$K_{а} = \frac{I_m}{I} = \frac{U_m}{U} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ – коэффициент амплитуды,

$K_{ф} = \frac{I}{I_{ср}} = \frac{U}{U_{ср}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$ – коэффициент формы.

3. Векторные диаграммы переменных токов и напряжений

Из курса математики известно, что любую синусоидальную функцию времени, например $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t+\alpha)$, можно изобразить вращающимся вектором при соблюдении следующих условий :

а) длина вектора в масштабе равна амплитуде функции I_m;

б) начальное положение вектора при $t = 0$ определяется начальной фазой α;

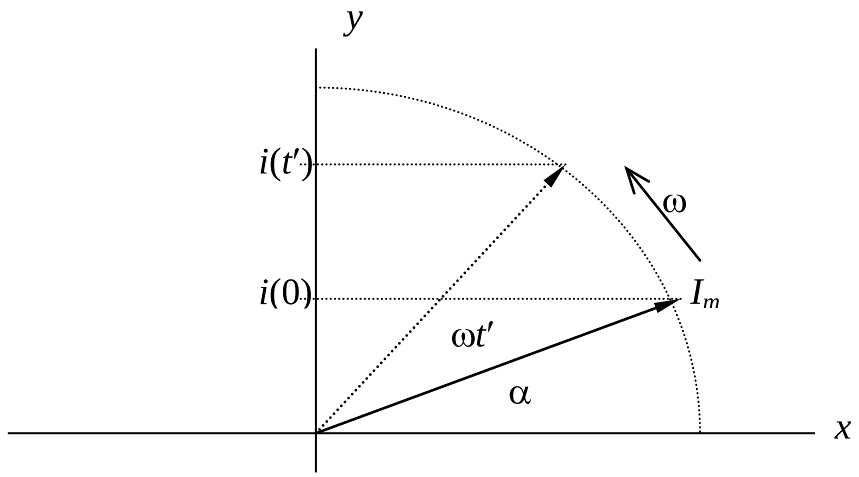


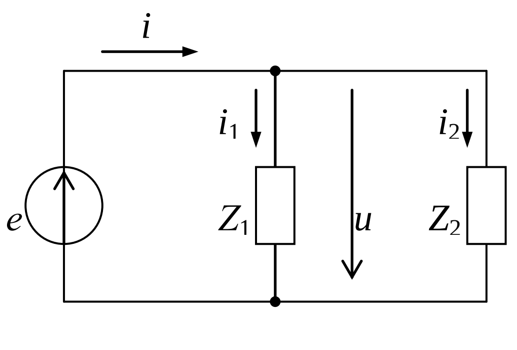
Рис. 37

в) вектор равномерно вращается с угловой скоростью ω, равной угловой частоте функции.

При соблюдении названных условий проекция вращающегося вектора на вертикальную ось y в системе координат $x - y$ в любой момент времени t' равна мгновенному значению функции $i(t')$, следовательно

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t+\alpha)$$

Рассмотрим процессы в схеме электрической цепи рис. 36. Изобразим синусоидальные функции токов и напряжений вращающимися векторами для произвольного момента времени, например $t = 0$ (рис. 37, *а*). При рассмотрении установившегося режима в схеме мгновенные значения функций не представляют интереса, поэтому момент времени, для которого строится векторная диаграмма, может быть выбран произвольно. Целесообразно один из векторов принять начальным или исходным и совместить его на диаграмме с одной из осей координат (вектор E на рис. 37, *б* совмещен с осью y), при этом остальные векторы располагают по отношению к исходному вектору под углами, равными их сдвигам фаз.



$$u = e = Em \cdot \sin(\omega t+\alpha)$$
$$i_1 = Im_1 \cdot \sin(\omega t+\psi_1)$$
$$i_2 = Im_2 \cdot \sin(\omega t+\psi_2)$$
$$i = I_m \cdot sin(\omega t+\psi)$$

Рис. 38

Так как на практике интерес представляют действующие значения токов и напряжений, то на векторных диаграммах длины векторов принимают равными в выбранных масштабах их действующим значениям (рис. 39, *б*).

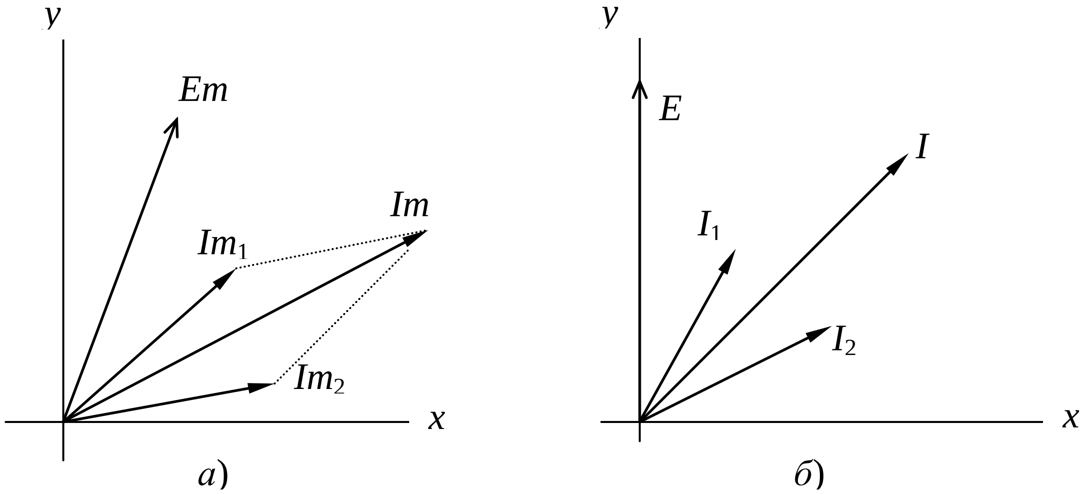


Рис. 39

Совокупность векторов токов и напряжений, характеризующих процессы в цепи переменного тока, построенных в выбранных масштабах и с соблюдением правильной их ориентации друг относительно друга, называется векторной диаграммой.

4. Теоретические основы комплексного метода расчета цепей переменного тока

Из курса математики известно, что комплексное число $\underline{Z}$ может быть представлено в следующих трех формах: показательной, тригонометрической и алгебраической:

$$\underbrace{\underline{Z} = Ze^{j\alpha}}_{\text{показательная}} = \underbrace{Z(\cos\alpha + j\sin\alpha)}_{\text{тригонометрическая}} = \underbrace{\alpha + jb.}_{\text{алгебраическая}}$$

В основе перехода от одной формы комплексного числа к другой лежит известная из математики формула Эйлера: $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$

Здесь обозначены:

$j = \sqrt{-1}$ – мнимое единичное число,

Z – модуль комплексного числа,

α – аргумент комплексного числа,

a – вещественная часть комплексного числа,

jb – мнимая часть комплексного числа.

Соотношения между коэффициентами различных форм комплексного числа вытекают из формулы Эйлера :

$$a = Z \cdot \cos\alpha \;; \quad b = Z \cdot \sin\alpha \;; \quad Z = \sqrt{a^2 + b^2} \;; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \;.$$

Ниже приведены наиболее часто встречающиеся численные соотношения:

$$e^{j0} = 1; \quad e^{\pm j180°} = -1; \quad e^{j90°} = +j \;; \quad e^{-j90°} = -j \;;$$

$$1/j = -j \;; \quad j^2 = -1; \quad j^3 = -j.$$

Комплексное число $\underline{Z} = Z\,e^{j\alpha} = a + jb$ может быть изображено вектором на комплексной плоскости (рис. 40), при этом алгебраической форме числа $\underline{Z} = \alpha + jb$ соответствует декартовая система координат ($a \to x$; $b \to y$), а показательной форме числа $\underline{Z} = Ze^{j\alpha}$ – полярная система координат ($Z \to \rho$; $\alpha \to \theta$).

Можно утверждать, что каждой точке (вектору) на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, и наоборот, каждому комплексному числу соответствует определенная точка (вектор) на комплексной плоскости.

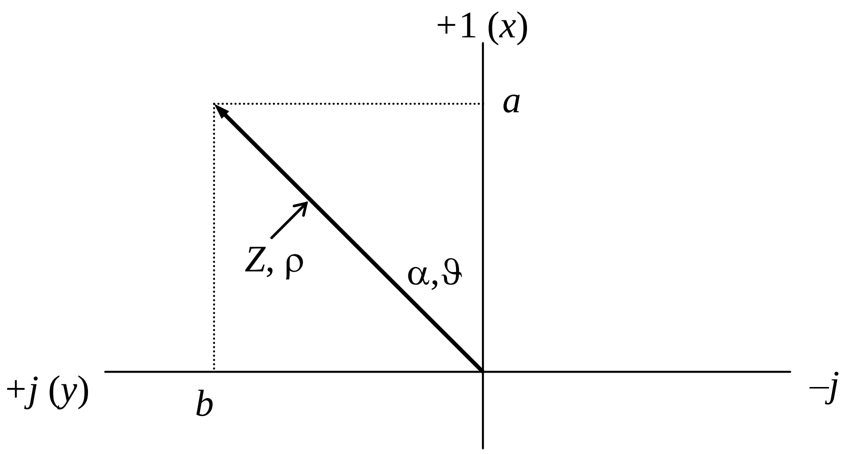


Рис. 40

Известно, что синусоидальную функцию можно изобразить вектором, а вектор в свою очередь можно представить комплексным числом. Таким образом, синусоидальные токи и напряжения, характеризующие установившийся режим цепи переменного тока, могут быть представлены комплексными числами :

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t) \Leftrightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j0} = I + j \cdot 0$$

$$i = I_m \cdot \cos(\omega t) = I_m \cdot \sin(\omega t + 90^{o}) \Leftrightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j90} = 0 + jI$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j\psi} = a + jb$$

Здесь $\Leftrightarrow$ – означает знак соответствия, а выражения справа от знака соответствия – комплексные действующие значения функций.

При расчете цепей переменного тока возникает необходимость выполнения различного рода математических операций с синусоидальными функциями. При замене синусоидальных функций (оригиналов) комплексными числами (изображениями) соответствующие математические операции выполняются с комплексными числами.

Сложение (вычитание) комплексных чисел производится в алгебраической форме

$$\underline{Z} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) = a + jb = Ze^{j\alpha}$$

Умножение комплексных чисел может выполняться, как в алгебраической, так и в показательной формах:

$$\underline{Z} = \underline{Z_1} \cdot \underline{Z_2} = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) = a + jb = Ze^{j\alpha}$$

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_1 \cdot \mathrm{Z}_2 = \mathrm{Z}_1 e^{j\alpha_1} \cdot \mathrm{Z}_2 e^{j\alpha_2} = \mathrm{Z}_1 \mathrm{Z}_2 \cdot e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} = Ze^{j\alpha} = a + jb$$

Деление комплексных чисел может выполняться как в алгебраической, так и в показательной формах:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2{}^2 + b_2{}^2} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2{}^2 + b_2{}^2} + j\,\frac{(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2{}^2 + b_2{}^2} = a + jb = Ze^{j\alpha}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\mathrm{Z}_1 e^{j\alpha_1}}{\mathrm{Z}_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{\mathrm{Z}_1}{\mathrm{Z}_2} \cdot e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = Ze^{j\alpha} = a + jb\,.$$

Возведение в степень (извлечение корня) комплексного числа выполняется только в показательной форме:

$$\underline{Z} = (M \cdot e^{j\psi})^n = M^n \cdot e^{jn\psi} = Ze^{j\alpha}$$

$$\underline{Z} = \sqrt{M \cdot e^{j\psi}} = \sqrt{M} \cdot e^{j\frac{\psi}{2}} = Ze^{j\alpha}$$

Установим порядок дифференцирования и интегрирования синусоидальных функций в комплексной форме. Пусть задана некоторая функция тока и ее комплексное изображение:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{U} = Ue^{j\psi}$$

Производная и интеграл от этой функции их комплексные изображения будут равны:

$$\frac{du}{dt} = U_m\omega \cdot \cos(\omega t + \psi) = U_m\omega \cdot \sin(\omega t + \psi + 90^\circ) \Leftrightarrow U\omega \cdot e^{j(\psi + 90^\circ)} = U\omega \cdot e^{j\psi}e^{j90^\circ} = j\omega \cdot \underline{U};$$

$$\int u \cdot dt = -\frac{U_m}{\omega} \cdot \cos(\omega t + \psi) = \frac{U_m}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \psi - 90^\circ) \Leftrightarrow \frac{U}{\omega} e^{j(\psi - 90^\circ)} = \frac{U}{\omega} e^{j\psi} \cdot e^{-j90^\circ} = \frac{\underline{U}}{j\omega}.$$

Таким образом, дифференцированию синусоидальной функции времени соответствует в комплексной форме умножение ее комплексного изображения на множитель $j\omega$, а интегрированию – соответственно деление на тот же коэффициент:

$$\frac{du}{dt} \Leftrightarrow j\omega\underline{U}; \qquad \int udt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}\underline{U}.$$

Замена математических операций 2-го рода (дифференцирование, интегрирование) операциями 1-го рода (умножение, деление) существенно упрощает расчет цепей переменного тока в комплексной форме.

Современные инженерные калькуляторы в режиме «cmplx» позволяют выполнять все действия с комплексными числами непосредственно так же, как с обычными числами. При этом следует принять во внимание, что калькулятор выполняет действия над комплексными числами только в алгебраической форме $(\underline{Z} = a + jb)$ и результаты расчета выдает также в алгебраической форме. Если исходные комплексные числа заданы в показательной форме $(\underline{Z} = Ze^{j\alpha})$, то после их ввода необходимо выполнить операцию преобразования их в алгебраическую форму. Действия с комплексными числами в mathCAD выполняются так же, как и с обычными числами.

Комплексный метод расчета цепей переменного тока был разработан в 1910-1912гг. американским инженером Штейнметцом и сыграл большую роль в развитии теории электрических цепей переменного тока.

5. Мощность переменного тока

В сложной электрической цепи, состоящей из разнородных элементов *R, L, C*, одновременно происходят следующие физические процессы:

а) необратимый процесс преобразования электрической энергии в другие виды (тепловую, механическую и др.), который называется активным;

б) обратимый процесс колебания энергии между переменным электрическим полем конденсаторов $(W_Э = \frac{Cu^2}{2})$, магнитным полем катушек $(W_М = \frac{Li^2}{2})$ и источником энергии, который называется реактивным.

Процесс преобразования и процесс колебания энергии взаимно накладываются друг на друга, создавая в цепи единый сложный энергетический процесс.

Пусть электрическая цепь носит активно-индуктивный характер и может быть представлена простой схемой, состоящей из источника ЭДС *e* и пассивных элементов *R* и *L*, включенных последовательно (рис. 41):

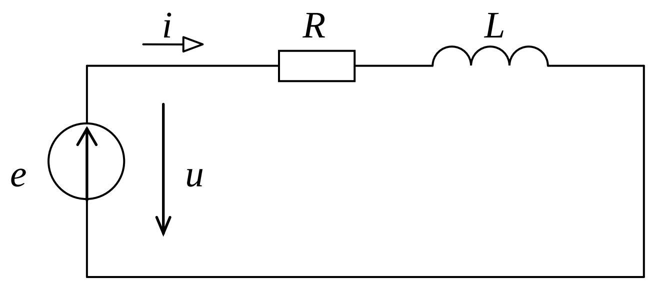


Рис. 41

Напряжение и ток на входе схемы как функции времени и их комплексные изображения будут равны:

$$u = U_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = Ue^{j0};$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I} = Ie^{-j\varphi}.$$

Мгновенная мощность, как функция времени, состоит из двух слагаемых:

$$p(t) = u \cdot i = U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m \cdot I_m}{2}\cos\varphi + \frac{U_m \cdot I_m}{2}\cos(2\omega t - \varphi) =$$

$$= p_1(t) + p_2(t).$$

Первое слагаемое $\left[p_1(t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2}\cos\varphi > 0 \right]$ характеризует процесс преобразования электрической энергии в другие виды (активный процесс).

Второе слагаемое $\left[p_2(t)=\frac{U_m \cdot I_m}{2}\cos(2\omega t-\varphi)\right]$ изменяется по периодическому закону с частотой 2ω и характеризует процесс обмена энергией между магнитным полем приемника и источником энергии (реактивный процесс).

Количество энергии, которое преобразуется в приемнике в другие виды в единицу времени, называется активной мощностью P. Математически активная мощность может быть получена как среднее значение мгновенной мощности за период:

$$P=P_{\text{ср}}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\cdot dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{U_m\cdot I_m}{2}\cos\varphi\cdot dt-\frac{1}{T}\int_0^T\frac{U_m\cdot I_m}{2}\cos(2\omega t-\varphi)\cdot dt=$$

$$=\frac{U_m\cdot I_m}{2}\cos\varphi=U\cdot I\cdot\cos\varphi.$$

Реактивная мощность Q характеризует интенсивность обмена энергией между магнитным полем приемника и источником и определяется по формуле:

$$Q=UI\cdot\sin\varphi=I^2\omega L=\omega\cdot\frac{LI_m{}^2}{2}=W_{\max}\cdot\omega.$$

Реактивная мощность индуктивного характера ($\varphi < 0$) положительна, а емкостного характера ($\varphi < 0$) отрицательна. Противоположность знаков указывает на тот факт, что колебания энергии в разнородных элементах совершаются в противофазе.

В технике используется понятие полной мощности S, которая не имеет физического смысла и определяется по формуле:

$$S=UI=\sqrt{P^2+Q^2}\ .$$

Мощности S, P, Q образуют прямоугольный треугольник, который называется треугольником мощностей (рис. 42).

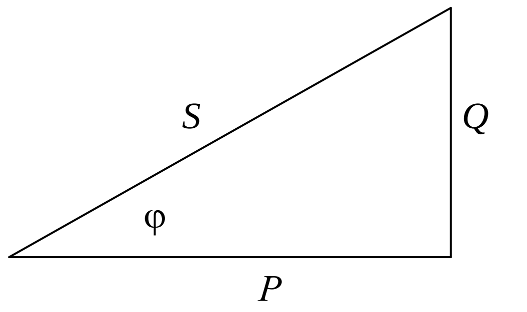


Рис. 42

Хотя физическая размерность мощностей *S, P, Q* одинакова, а именно $[BA]$, для каждой из них на практике применяется своя единица измерения: для активной мощности P – ватт $[Bm]$, для реактивной мощности Q – вольтампер реактивный $[вар]$, для полной мощности S – вольтампер $[BA]$.

В соответствии с законом сохранения энергии в цепи переменного тока должны балансироваться независимо друг от друга активные и реактивные мощности приемников и источников энергии: $\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{пр}}$ и $\sum Q_{\text{ист}} = \sum Q_{\text{пр}}$. Баланс для полных мощностей не соблюдается.

При расчете цепей переменного тока комплексным методом мощности *S, P, Q* представляют в комплексной форме:

$$\underline{S} = P + jQ = I^2 R + jI^2 X = I^2 (R + jX) = \underline{I}^* \underline{I} \cdot Z = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

где $\underline{I}^*$ – сопряженный комплекс тока $\underline{I}$.

Таким образом

$S = Mod[\underline{S}] = Mod[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]$ – модуль комплексной мощности;

$P = \mathrm{Re}[\underline{S}] = \mathrm{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]$ – вещественная часть;

$Q = I_m[\underline{S}] = I_m[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]$ – мнимая часть.

6. Переменные ток в однородных идеальных элементах

Существует три типа идеальных схемных элементов: резистор *R*, катушка *L* и конденсатор *C*. Рассмотрим процессы в цепи с каждым из названных элементов в отдельности.

а) Цепь с идеальным резистором *R.*

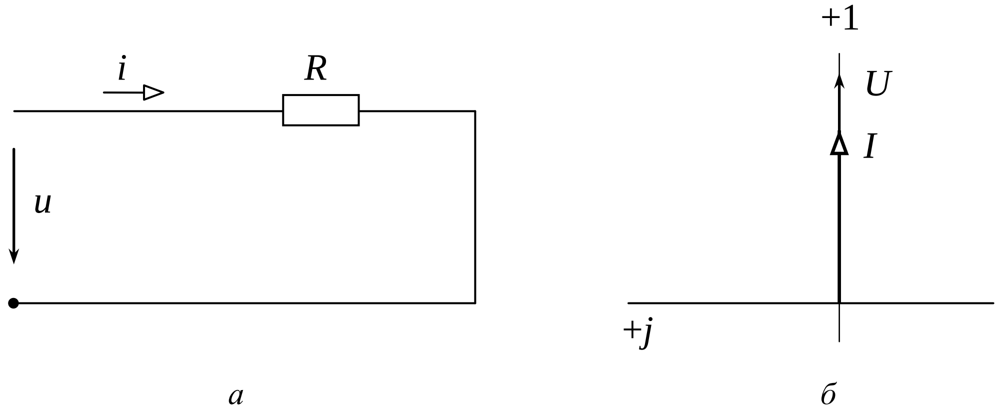


Рис. 43

Пусть к цепи с резистором R (рис. 43, *а*) приложено переменное напряжение:

$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = Ue^{j0}.$$

Ток и напряжение на зажимах резистора связаны между собой физическим законом Ома, т. е.

$$i(t) = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{I} = Ie^{j0},$$

где $I_m = \dfrac{U_m}{R}$, $I = \dfrac{U}{R}$ – уравнения закона Ома для амплитудных и действующих значений функций.

Угол сдвига фаз между напряжением и током $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 0 = 0$, следовательно, в цепи с резистором R ток и напряжение совпадают по фазе.

Комплексное сопротивление резистора является чисто вещественным:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j0}}{I \cdot e^{j0}} = R \cdot e^{j0} = R + j0$$

.

Мгновенная мощность в цепи с резистором R всегда положительна:

$$p(t) = u \cdot i = U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin \omega t = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t \geq 0$$

Это означает, что в цепи с резистором R протекает только процесс преобразования электрической энергии в другие виды (активный процесс). По этой причине сопротивление резистора R на переменном токе называется активным.

Графические диаграммы функций времени $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$ представлены на рис. 44, а векторная диаграмма напряжения и тока – на рис. 43, *б*.

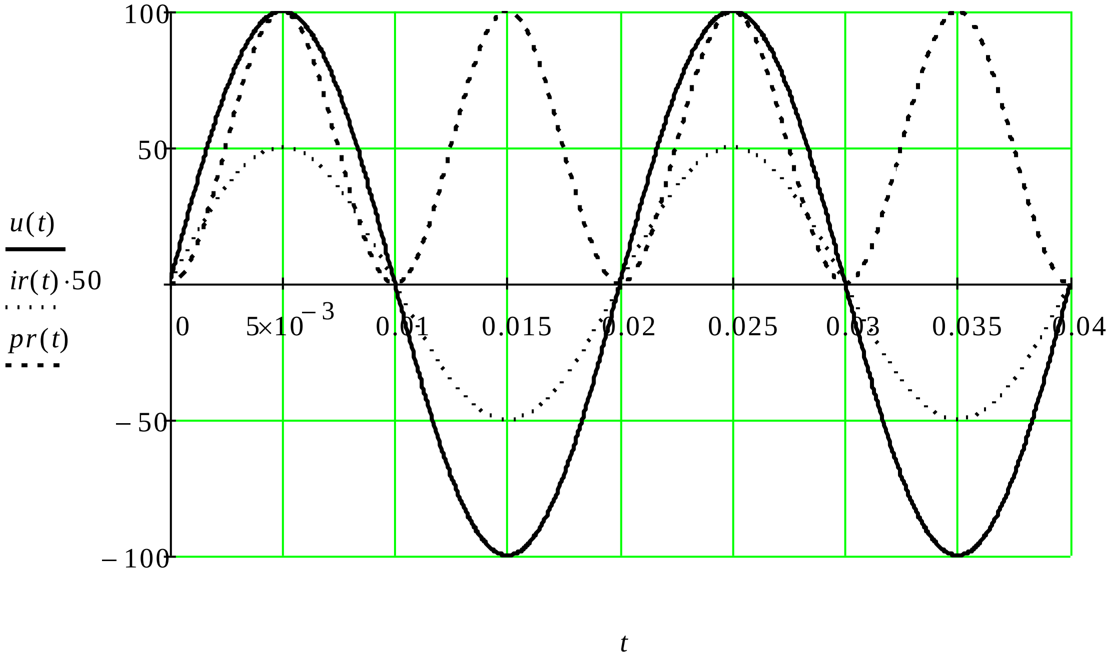


Рис. 44

б) Цепь с идеальной катушкой *L*

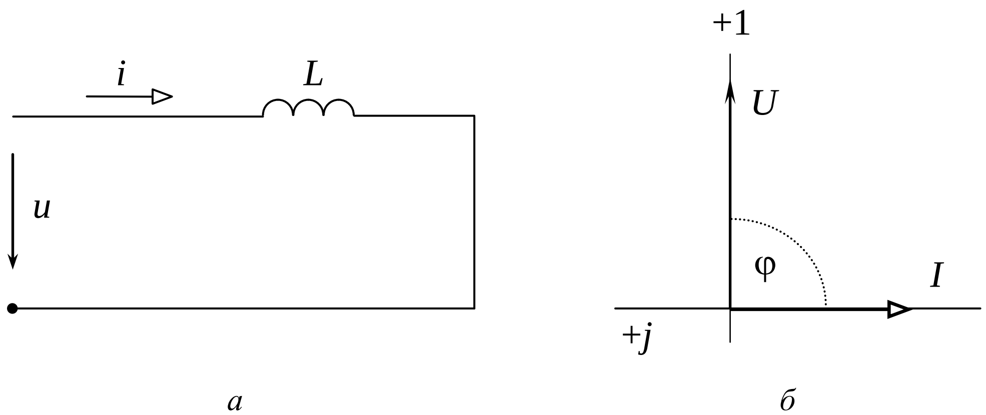


Рис. 45

Пусть к цепи с идеальной катушкой *L* (рис. 45, *а*) приложено переменное напряжение: $u(t) = Um \cdot \sin\omega t \Leftrightarrow \underline{U} = Ue^{j0}$

Ток и напряжение на зажимах катушки связаны между собой физическим законом электромагнитной индукции $u = -e = L\dfrac{di}{dt}$, откуда следует:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int u \cdot dt = \frac{U_m}{L}\int \sin\omega t \cdot dt = \frac{Um}{\omega L}(-\cos\omega t) = \mathrm{Im} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) \Leftrightarrow \underline{I} = Ie^{-j90^\circ},$$

где $\omega L = X_L$ – индуктивное реактивное сопротивление катушки, Уравнения закона Ома для амплитудных и действующих значений функций: $I_m = \dfrac{U_m}{X_L}$, $I = \dfrac{U}{X_L}$.

Угол сдвига фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - (-90^\circ) = 90^\circ$, т.е. в цепи с катушкой L ток отстает от напряжения (напряжение опережает ток) на угол 90°.

Комплексное сопротивление катушки является чисто мнимым и положительным: $\underline{Z}_L = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{Ue^{j0}}{Ie^{-j90}} = X_L e^{j90} = 0 + jX_L$.

Мгновенная мощность цепи изменяется по синусоидальному закону с частотой 2ω:

$$p(t) = U_m \cdot \sin\omega t \cdot I_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)\omega t =$$

$$= \frac{Um \cdot I_m}{2}\cos 90^\circ - \frac{U_m \cdot I_m}{2}\cos(2\omega t - 90^\circ) = -\frac{U_m \cdot I_m}{2}\sin 2\omega t$$

Это означает, что в цепи с катушкой L происходит только периодический процесс обмена энергией между магнитным полем катушки $(W_m = \dfrac{Li^2}{2})$ и источником (реактивный процесс). По этой причине сопротивление катушки переменному току $X_L = \omega L$ называется реактивным.

Графические диаграммы функций времени $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$ представлены на рис. 46, а векторная диаграмма напряжения и тока – на рис. 45, *б*.

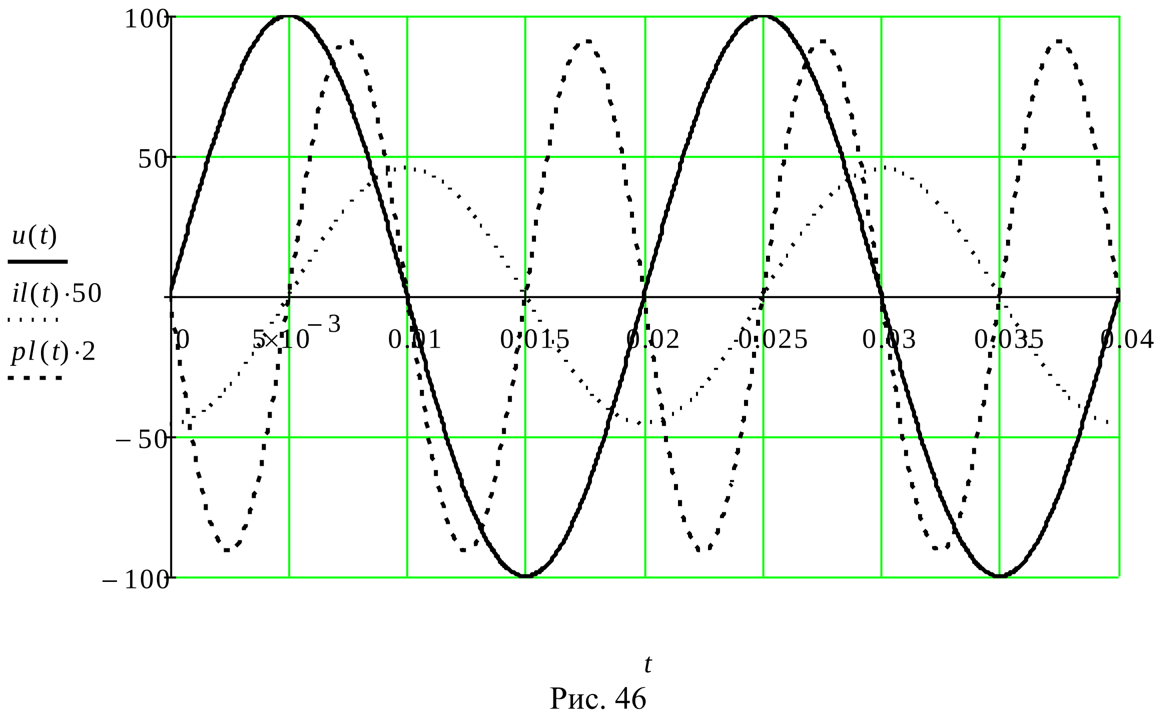


Рис. 46

в). Цепь с идеальным конденсатором *C*.

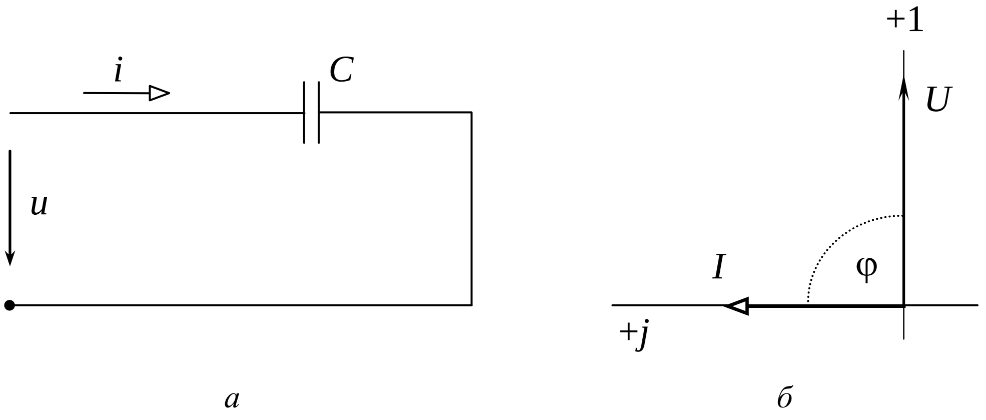


Рис. 47

Пусть к цепи с идеальным конденсатором C (рис. 47а) приложено переменное напряжение

$$u(t) = Um \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = Ue^{j0}$$

Ток и напряжение на зажимах конденсатора связаны между собой физическим законом сохранения заряда:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} = U_m C \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = \frac{U_m}{1/\omega C} \cos \omega t = \mathrm{Im} \cdot \sin(\omega t + 90^o) \Leftrightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j90^o},$$

где $\frac{1}{\omega C} = X_C$ – емкостное реактивное сопротивление [Ом].

Уравнения закона Ома для амплитудных и действующих значений функций: $\mathrm{Im} = \frac{Um}{X_C}, I = \frac{U}{X_C}$

Угол сдвига фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 90^\circ = -90^\circ$, т. е. в цепи с конденсатором C ток опережает напряжение (напряжение отстает от тока) на угол 90°.

Комплексное сопротивление конденсатора является чисто мнимым и отрицательным: $\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j0}}{Ie^{j90}} = X_C e^{-j90} = 0 - jX_C$.

Мгновенная мощность цепи изменяется по синусоидальному закону с частотой 2ω:

$$p(t) = U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) =$$

$$= \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(-90^\circ) - \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(2\omega t + 90^\circ) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \sin 2\omega t$$

Это означает, что в цепи с конденсатором C происходит только периодический процесс обмена энергией между электрическим полем конденсатора $(W_Э = \frac{Cu^2}{2})$ и источником (реактивный процесс). По этой причине сопротивление конденсатора переменному току $X_C = \frac{1}{\omega C}$ называется реактивным.

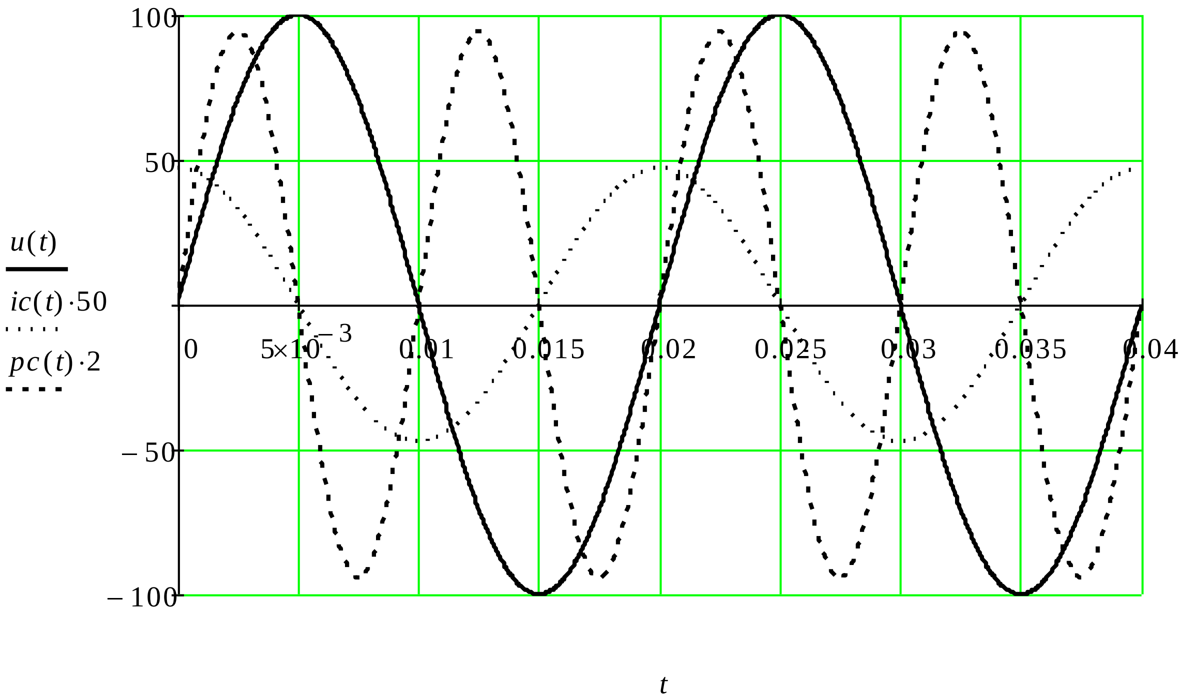


Рис. 48

Графические диаграммы функций времени $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$ представлены на рис. 48, а векторная диаграмма напряжения и тока – на рис. 47, *б*.

7. Электрическая цепь с последовательным соединением элементов *R, L* и *C*

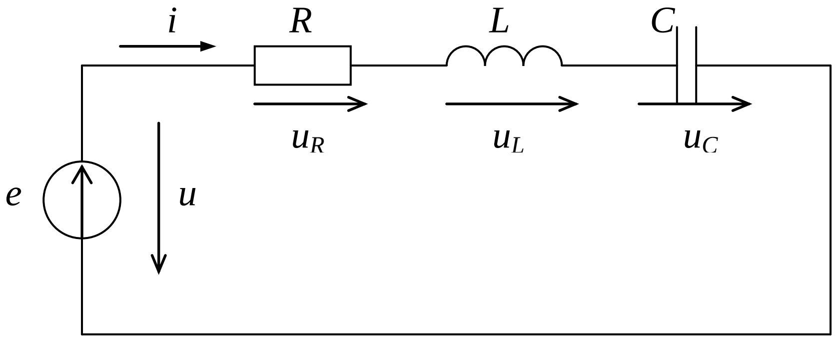


Рис. 49

Пусть в заданной схеме с последовательным соединением элементов *R, L* и *C* (рис. 49) протекает переменный ток

$$i(t) = I_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{I} = Ie^{j0}.$$

По 2-му закону Кирхгофа для мгновенных значений функций получим уравнение в дифференциальной форме:

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt\,.$$

То же уравнение в комплексной форме получит вид:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}R + \underline{I}\,jX_L + \underline{I}(-jX_C) = \underline{I}(R + jX_L - jX_C) = \underline{I}\,\underline{Z},$$

где $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Ze^{j\varphi}$ – комплексное сопротивление, $X = X_L - X_C$ – реактивное (эквивалентное) сопротивление, $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ – модуль комплексного или полное сопротивление, $\varphi = arctg\,\frac{X_L - X_C}{R}$ – аргумент комплексного сопротивления или угол сдвига фаз между напряжением и током на входе схемы. При $(X_L - X_C) > 0$ фазный угол $\varphi > 0$, при этом цепь в целом носит активно-индуктивный характер, а при $(X_L - X_C) < 0$ и $\varphi < 0$ – цепь в целом носит активно-емкостный характер.

Уравнение закона Ома для последовательной схемы будет иметь вид:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j(X_L - X_C)}$$ – в комплексной форме,

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$ – в обычной форме для модулей.

Векторная диаграмма тока и напряжений при φ > 0 показана на рис. 50.

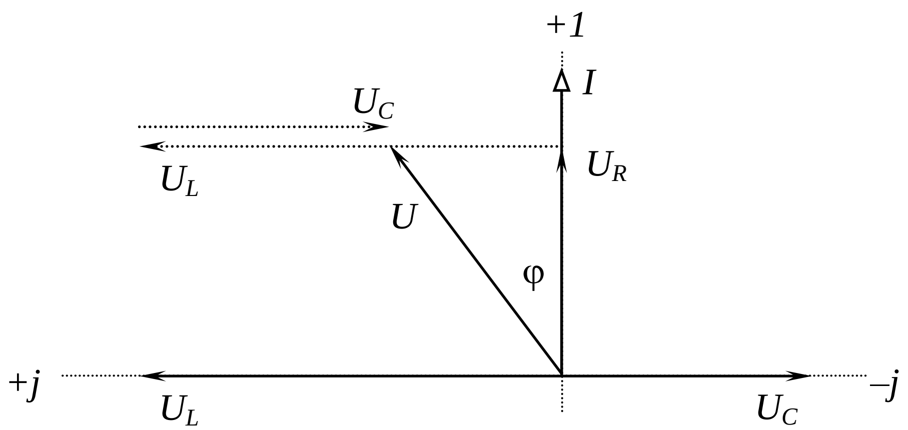


Рис. 50

В рассматриваемой цепи на переменном токе будут происходить одновременно два физических процесса: преобразование энергии в другие виды в резисторе R (активный процесс) и взаимный обмен энергией между магнитным полем катушки, электрическим полем конденсатора и источником энергии (реактивный процесс).

8. Электрическая цепь с параллельным соединением элементов *R, L* и *C*

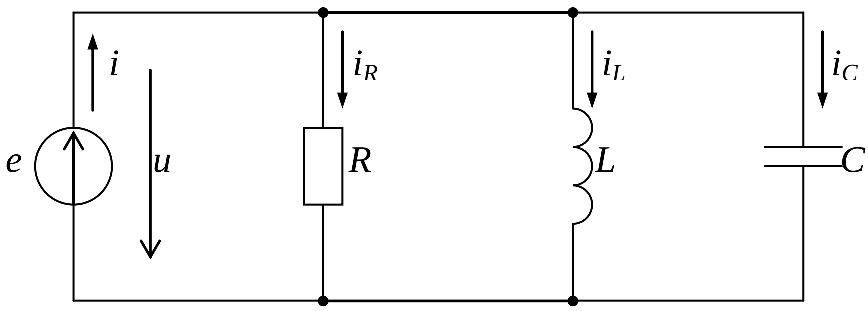


Рис. 51

Пусть на входе схемы рис. 51 действует переменное напряжение:

$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = Ue^{j0}$

По 1-му закону Кирхгофа для мгновенных значений функций получаем уравнение в дифференциальной форме:

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{U}{R} + \frac{1}{L}\int idt + C\frac{du}{dt}.$$

То же уравнение в комплексной форме получит вид:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{jX_L} + \frac{\underline{U}}{-jX_C} = \underline{U}(G - jB_L + jB_C) = \underline{U} \cdot \underline{Y},$$

где $\underline{Y} = G - j(B_L - B_C) = G - jB = Ye^{-j\varphi}$ – комплексная проводимость, $G = \frac{1}{R}$ – активная проводимость, $B_L = \frac{1}{X_L}$ – реактивная индуктивная проводимость, $B_C = \frac{1}{X_C}$ – реактивная емкостная проводимость, $B = B_L - B_C$ – реактивная (эквивалентная) проводимость, $Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$ – модуль комплексной проводимости или полная проводимость, $\varphi = arctg\frac{B_L - B_C}{G}$ – аргумент комплексной проводимости или угол сдвига фаз между напряжением и током на входе схемы. При $(B_L - B_C) > 0$ и $\varphi > 0$ – цепь в целом носит активно-индуктивный характер, а при $(B_L - B_C) < 0$ и $\varphi < 0$ – цепь в целом носит активно-емкостный характер.

Уравнение закона Ома для параллельной схемы будет иметь вид:

$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = \underline{U} \cdot \left[G - j(B_L - B_C)\right]$ – в комплексной форме;

$$I = U \cdot Y = U \cdot \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$ – в обычной форме для модулей.

Векторная диаграмма токов и напряжения при φ > 0 показана на рис. 52.

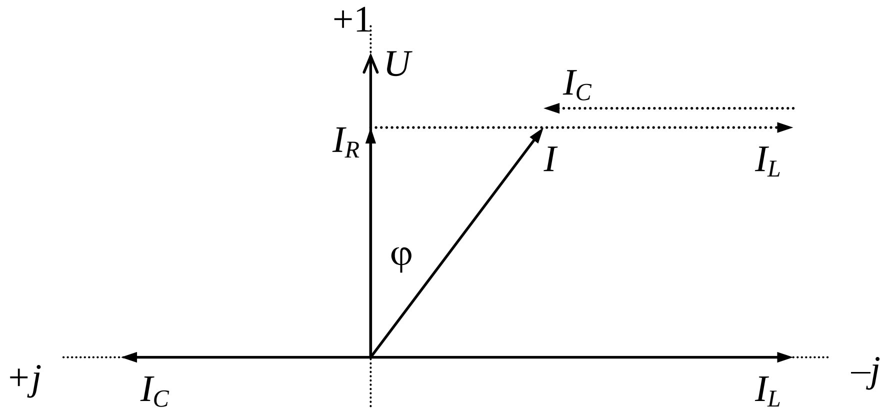


Рис. 52

На переменном токе в рассматриваемой цепи будут происходить одновременно два физических процесса: преобразование электрической энергии в другие виды (активный процесс) и взаимный обмен энергией между магнитным полем катушки, электрическим полем конденсатора и источником энергии (реактивный процесс).

9. Активные и реактивные составляющие токов и напряжений

При расчете электрических цепей переменного тока реальные элементы цепи (приемники, источники) заменяются эквивалентными схемами замещения, состоящими из комбинации идеальных схемных элементов *R*, *L* и *C*.

Пусть некоторый приемник энергии носит в целом активно-индуктивный характер (например, электродвигатель). Такой приемник может быть представлен двумя простейшими схемами замещения, состоящими из 2-х схемных элементов *R* и *L*: а) последовательной (рис. 53, *а*) и б) параллельной (рис. 53, *б*):

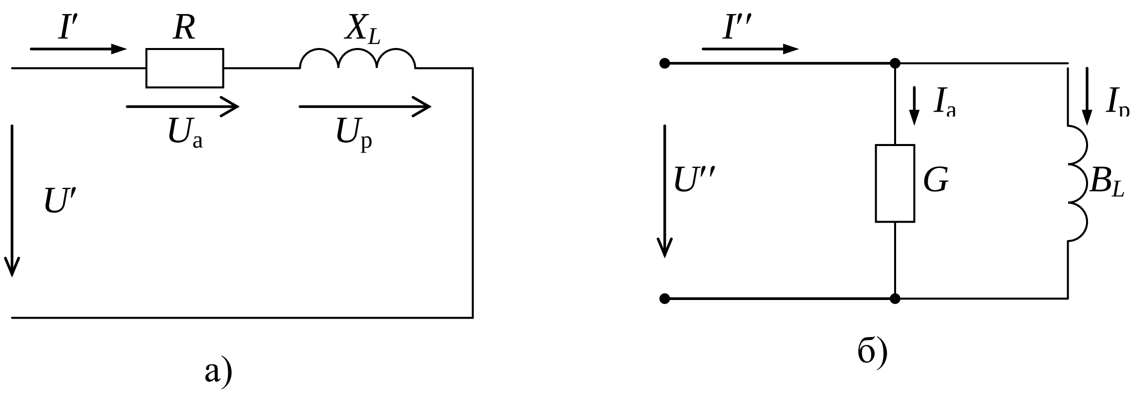


Рис. 53

Обе схемы будут эквивалентны друг другу при условии равенства параметров режима на входе: $\underline{U} = \underline{U}' = \underline{U}''$, $\underline{I} = \underline{I}' = \underline{I}''$.

Для последовательной схемы (рис. 53а) справедливы соотношения:

$$\underline{I}' = \frac{\underline{U}'}{R + jX_L} = \frac{\underline{U}'(R - jX_L)}{R^2 + X_L{}^2} = \underline{U}' \cdot \left(\frac{R}{R^2 + X_L{}^2} - j\frac{X_L}{R^2 + X_L{}^2} \right) = \underline{U}' \cdot \underline{Y},$$

$$\underline{U}' = \underline{I}' \cdot \underline{Z} = \underline{I}' \cdot (R + jX_L).$$

Для параллельной схемы (рис. 53б) справедливы соотношения:

$$\underline{I}'' = \underline{U}'' \cdot \underline{Y} = \underline{U}'' \cdot (G - jB_L),$$

$$\underline{U}'' = \frac{\underline{I}''}{G - jB_L} = \frac{\underline{U}'(G + jB_L)}{G^2 + B_L{}^2} = \underline{I}'' \cdot \left(\frac{G}{G^2 + B_L{}^2} + j\frac{B_L}{G^2 + B_L{}^2} \right) = \underline{I}'' \cdot \underline{Z}.$$

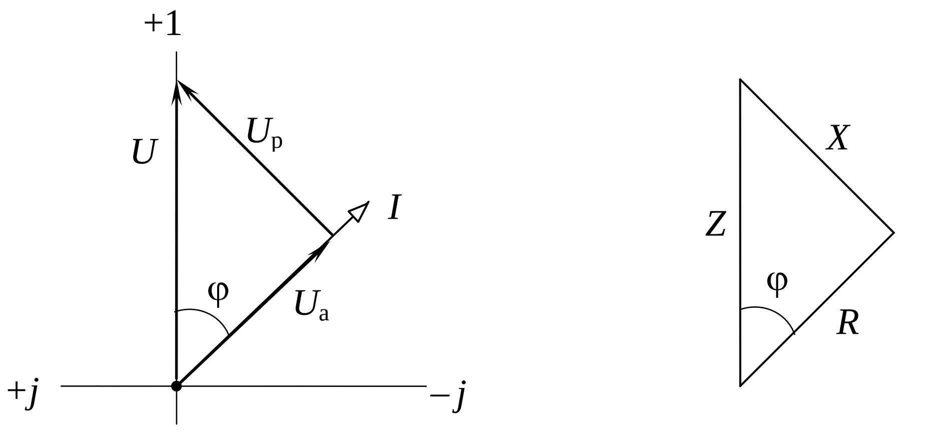
Сравнивая правые части уравнений для $\underline{U}$ и $\underline{I}$, получим соотношения между параметрами эквивалентных схем:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}, \quad R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}.$$

Из анализа полученных уравнений следует сделать вывод, что в общем случае $R \neq \frac{1}{G}$ и $B \neq \frac{1}{X}$ и соответственно $R \neq \frac{1}{G}$ и $X \neq \frac{1}{B}$, как это имеет место для цепей постоянного тока.

Математически любой вектор можно представить состоящим из суммы нескольких векторов или составляющих.

Последовательной схеме замещения соответствует представление вектора напряжения в виде суммы двух составляющих: активной составляющей $U_{\text{а}}$, совпадающей с вектором тока I, и реактивной составляющей $U_{\text{р}}$, перпендикулярной к вектору тока (рис. 54, *а*):



а – треугольник напряжений *б* – треугольник сопротивлений

Рис. 54

Из геометрии рис. 54, *а* следуют соотношения:

$$U_{\text{а}} = U \cdot \cos\varphi = IR, \ \ U_{\text{р}} = U \cdot \sin\varphi = IX, \ \ U = \sqrt{U_{\text{а}}^{2} + U_{\text{р}}^{2}} = IZ.$$

Треугольник, составленный из векторов $\overline{U}$, $\overline{U_{\text{а}}}$, $\overline{U_{\text{р}}}$ получил название треугольника напряжений (рис. 54, *а*).

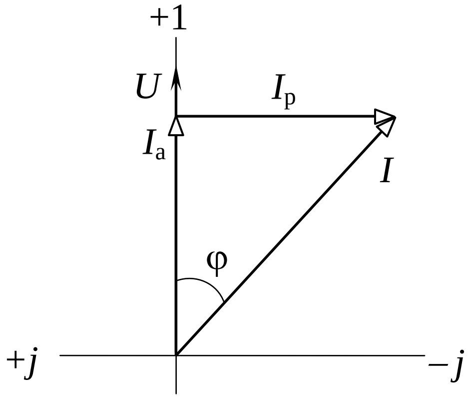
Если стороны треугольника напряжений разделить на ток I, то получится новый треугольник, подобный исходному, но сторонами которого являются полное сопротивление Z, активное сопротивление R и реактивное сопротивление X. Треугольник со сторонами Z, R, X называется треугольником сопротивлений (рис. 54, *б*). Из треугольника сопротивлений следуют соотношения: $R = Z \cdot \cos\varphi$, $X = Z \cdot \sin\varphi$, $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, $\varphi = arctg\,\dfrac{X}{R}$.

Параллельной схеме замещения соответствует представление вектора тока в виде суммы двух составляющих: активной составляющей $I_{\text{а}}$, совпадающей с вектором напряжения U, и реактивной составляющей $I_{\text{р}}$, перпендикулярной к вектору U (рис. 55, *а*).

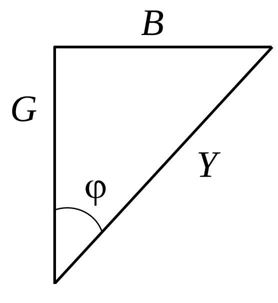
Из геометрии рисунка следуют соотношения:

$$I_{\text{а}} = I \cdot \cos\varphi = UG, \quad I_{\text{р}} = I \cdot \sin\varphi = UB, \quad I = \sqrt{I_{\text{а}}^{2} + I_{\text{р}}^{2}} = UY.$$

Треугольник, составленный из векторов $\overline{I}$, $\overline{I_{\text{а}}}$, $\overline{I_{\text{р}}}$ получил название треугольника токов (рис. 55, *а*).



а – треугольник токов



б – треугольник проводимостей

Рис. 55

Если стороны треугольника токов разделить на напряжение U, то получится новый треугольник, подобный исходному, но сторонами которого являются проводимости: полная – Y, активная –G, реактивная – B (рис. 55, *б*).

Треугольник со сторонами Y, G, B называется треугольником проводимостей. Из треугольника проводимостей следуют соотношения:

$$G = Y\cos\varphi, \quad B = Y\sin\varphi, \quad Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \varphi = arctg\,\frac{B}{G}.$$

Разложение напряжений и токов на активные и реактивные составляющие является математическим приемом и применяется на практике для расчета сравнительно несложных цепей переменного тока.

10. Передача энергии от активного двухполюсника (источника) к пассивному двухполюснику (приемнику)

Двухполюсником называется устройство или часть схемы (цепи) с двумя выводами (полюсами). Если внутри двухполюсника содержатся источники энергии, то он называется активным (А), в противном случае – пассивным (П).

Энергетические характеристики передачи энергии от активного двухполюсника (источника) к пассивному двухполюснику (приемнику) на переменном токе зависят от соотношения параметров приемника и источника между собой (рис. 56).

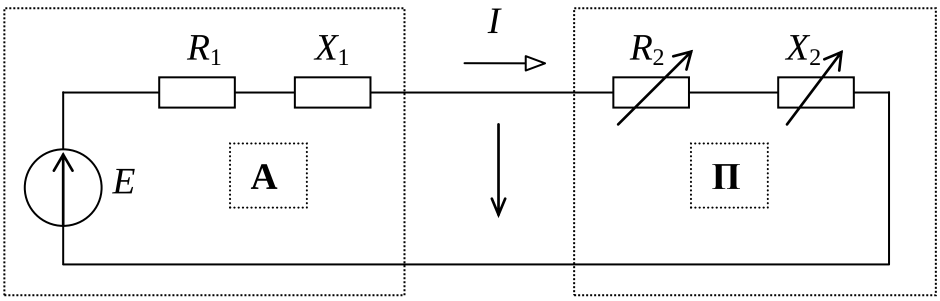


Рис. 56

По закону Ома ток в схеме равен:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}.$$

Активная мощность приемника:

$$P_2 = I^2 \cdot R_2 = \frac{E^2 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}.$$

Активная мощность источника: $P_E = E \cdot I$.

При постоянных параметрах источника энергии активная мощность приемника зависит от его параметров: $P_2 = f(R_2, X_2)$. Исследуем эту функцию на максимум при изменении отдельных параметров.

Условие первое: X_2 = var, R_2 = const:

$$\frac{dP_2}{dX_2} = 0, \quad \Rightarrow \quad -E^2 R_2 (2X_1 + 2X_2) = 0 \text{ или } X_2 = -X_1 .$$

Максимум мощности приемника P_{2max} имеет место при условии равенства реактивных сопротивлений приемника и источника по модулю и противоположности их по знаку, например, если реактивное сопротивление источника носит индуктивный характер, то реактивное сопротивление приемника должно быть емкостным, и наоборот.

Условие второе: $R_2 = \text{var}$, $X_2 = \text{const}$.

$$\frac{dP_2}{dR_2} = 0, \quad \Rightarrow \quad E^2 (R_1 + R_2)^2 - E^2 R_2 (2R_1 + 2R_2) = 0 \quad \text{или } R_2 = R_1 .$$

Максимум мощности приемника имеет место при равенстве активных сопротивлений приемника и источника.

Абсолютный максимум мощности приемника наблюдается при выполнении обоих условий и равен:

$$P_2 \max = \frac{E_2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{E^2}{4R_1} .$$

В режиме максимума потребляемой мощности работают приемники в линиях связи.

Коэффициент полезного действия передачи энергии от источника к приемнику равен отношению активных мощностей $\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ и не зависит от величины их реактивных сопротивлений. В режиме максимума мощности ($R_2 = R_1$) КПД передачи составляет 0,5. Линии электропередачи (ЛЭП) работают с КПД η = 0,90…0,95, что соответствует соотношению активных сопротивлений приемника и источника (генератора + ЛЭП) R_2 / R_1 = 10…20.

На графической диаграмме рис. 57 показаны энергетические характеристики передачи энергии при $R_2 = \text{var}$, $X_2 = \text{const}$: P_2, $\eta = f(R_2)$.

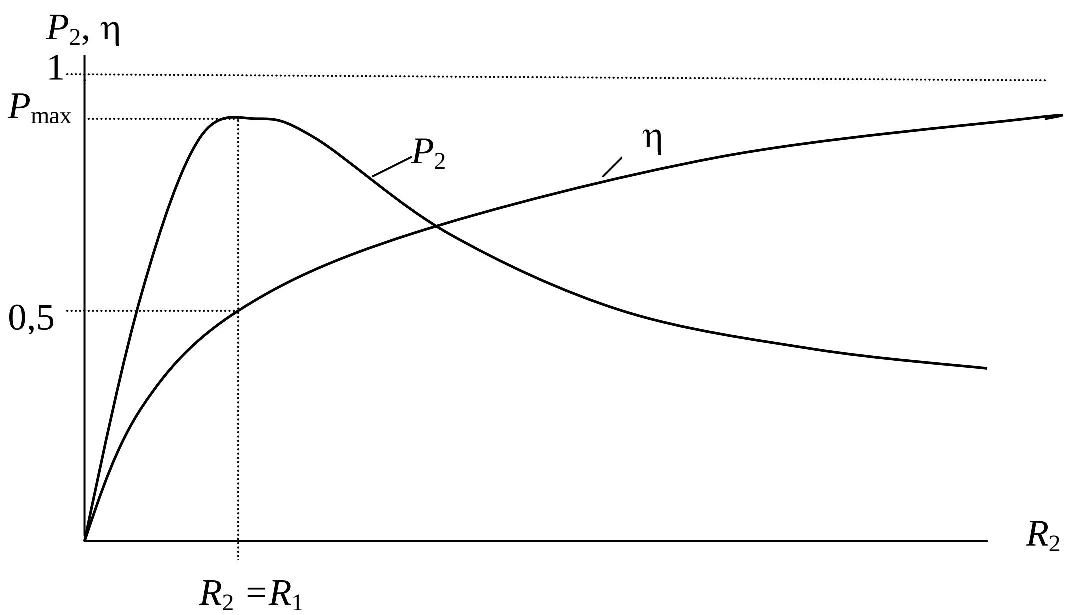


Рис. 57

11. Компенсация реактивной мощности приемников энергии

Активная мощность приемника $P = UI\cos\varphi$ характеризует интенсивность потребления им энергии и зависит от режима его работы.

Реактивная мощность приемника $Q = UI\sin\varphi$ характеризует интенсивность обмена энергией между электромагнитным полем приемника и остальной цепью. Эта мощность положительна при индуктивном характере приемника ($\varphi > 0$) и отрицательна при емкостном характере ($\varphi < 0$). В промышленных условиях преобладающее большинство приемников имеют активно-индуктивный характер ($\varphi > 0$) и потребляют положительную реактивную мощность $Q_L > 0$. Параллельное подключение к таким приемникам конденсаторов, потребляющих отрицательную реактивную мощность $Q_C < 0$ и, таким образом, являющихся генераторами реактивной мощности для приемников, позволяет уменьшить (компенсировать) суммарную реактивную мощность: $Q = Q_L - Q_C$.

Компенсация реактивной мощности позволяет при неизменной активной мощности уменьшить потребляемый от сети ток:

$$I = \frac{\sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}}{U}.$$

Схема цепи в режиме компенсации реактивной мощности показана на рис. 58.

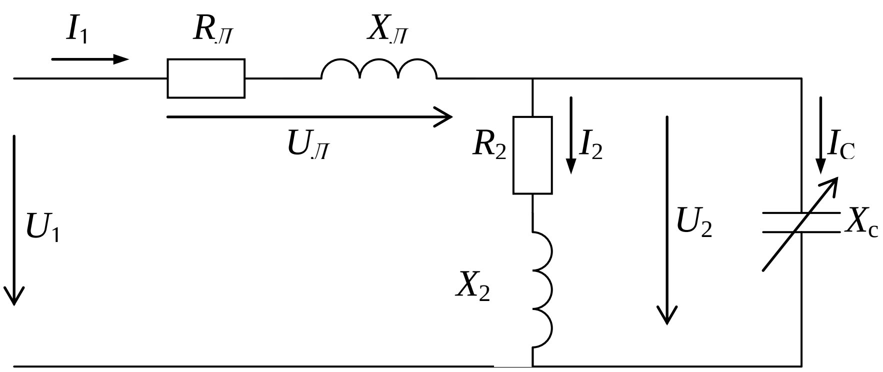


Рис. 58

При увеличении емкости компенсирующего конденсатора C пропорционально будет увеличиваться потребляемый им ток $I_C = U_2 \cdot \omega C$. Ток линии, равный геометрической сумме токов нагрузки и конденсатора

($\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_C$), вначале будет уменьшаться (при $Q_L > Q_C$), достигнет своего минимального значения при полной компенсации реактивной мощности $I_{1\min} = Ia = I_2 \cos\varphi_2$, а затем начнет возрастать при $Q_C > Q_L$ (рис. 59).

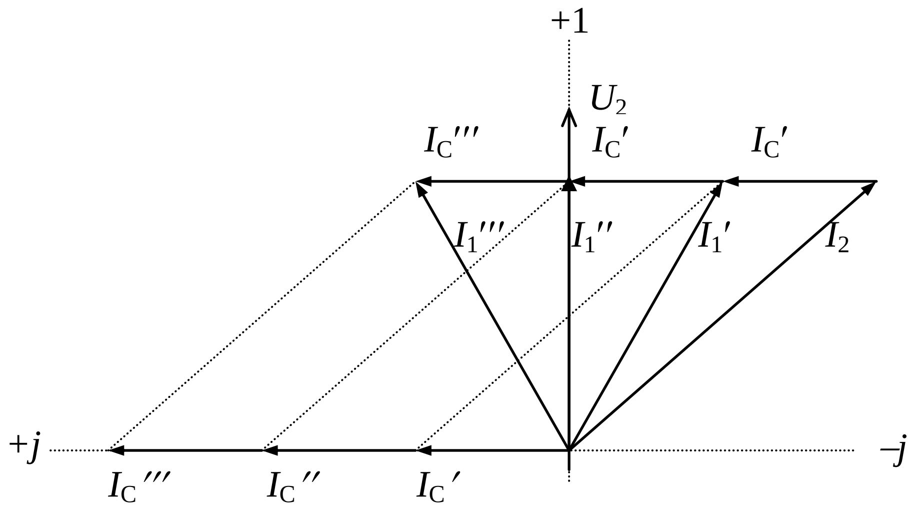


Рис. 59

Из геометрии рис. 59 следует соотношение:

$$I'_C = I_a \cdot \mathrm{tg}\varphi_2 - I_a \cdot \mathrm{tg}\varphi'_2 = \frac{P}{U}(\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi'_2).$$

Тот же ток из закона Ома:

$$I'_C = \frac{U_2}{X_C} = U_2 \cdot \omega C'.$$

Из совместного решения этих двух уравнений вытекает формула для расчета емкости компенсирующего устройства от первоначального значения $\mathrm{tg}\varphi_2$ до заданного $\mathrm{tg}\varphi_2'$:

$$C' = \frac{P \cdot 10^6}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi'_2) \text{ [мкФ]}.$$

Сопротивление воздушных ЛЭП носит активно-индуктивный характер с существенным преобладанием реактивного сопротивления ($X_Л >> R_Л$), поэтому падение напряжения в линии $\underline{U}_Л = \underline{I}\cdot(R_Л + jX_Л)$ почти на 90^o опережает ток. На рис. 58 показано семейство векторных диаграмм токов и напряжений для разных значений компенсирующей емкости C = var при постоянном значении напряжения в начале линии $\underline{U}_1 = const$.

Из анализа семейства векторных диаграмм рис. 58 следует, что увеличение степени компенсации реактивной мощности повышает напряжение на выводах нагрузки ($U_2''' > U_2'' > U_2'$), при этом потеря напряжения в линии $\Delta U = U_1 - U_2$ уменьшается и может быть даже отрицательной. На практике указанная функциональная зависимость $U_2 = f(C)$ используется для поддержания заданного уровня напряжения на выводах (шинах) нагрузки U_2 = const при изменении ее параметров.

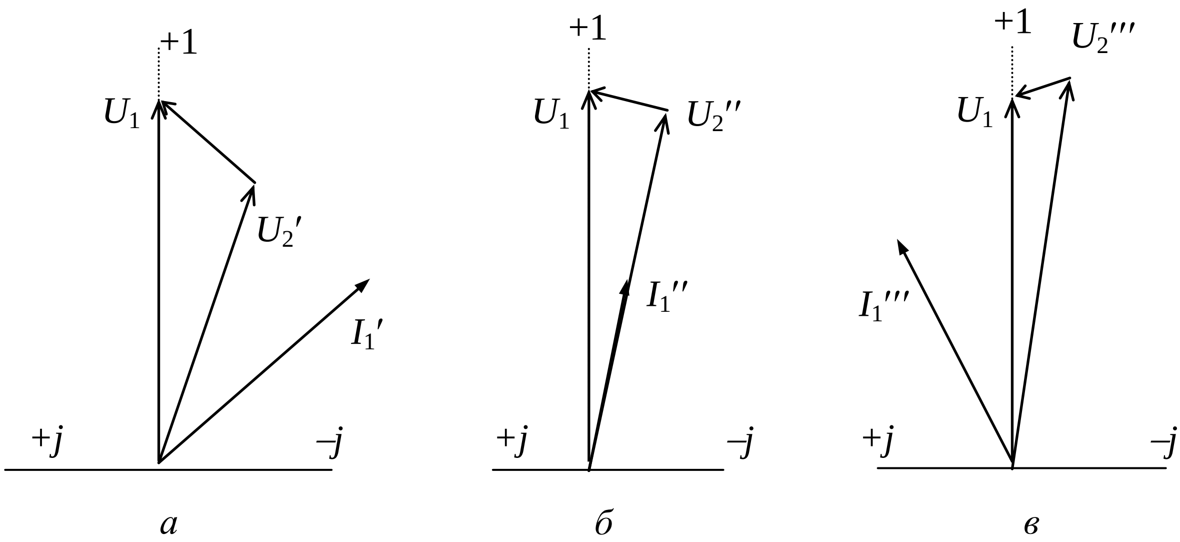


Рис. 60

Таким образом, посредством компенсации реактивной мощности нагрузки в энергосистеме решаются две важные технико-экономические задачи. Во-первых, это уменьшение потерь мощности в линии электропередачи ($\boldsymbol{P}_Л = \boldsymbol{I}^2\boldsymbol{R}_Л$) и повышение ее КПД вследствие уменьшения тока. Во-вторых, с помощью регулируемых компенсирующих устройств осуществляется управление напряжением в конце линии, поддержание его на заданном номинальном уровне при изменении потребляемой мощности в широком диапазоне.

12. Методы расчета цепей переменного тока

Для расчета электрических цепей переменного тока применимы все расчетные методы, полученные ранее для цепей постоянного тока, а именно:

а) метод преобразования (свертки) схемы;
б) метод законов Кирхгофа;
в) метод контурных токов;
г) метод узловых потенциалов;
д) метод двух узлов;
е) метод эквивалентного генератора.

Отличительной особенностью расчета цепей переменного тока является то, что исходные параметры отдельных элементов схемы задаются в комплексной форме. Целью расчета цепей переменного тока энергетического характера является определение действующих значений напряжений и токов, а также активных и реактивных мощностей отдельных источников и приемников энергии. По этой причине на начальном этапе расчета синусоидальные по форме источники энергии заменяют их комлексными действующими значениями по форме $e(t) = Em \cdot \sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \underline{E} = \frac{Em}{\sqrt{2}} e^{j\alpha}$, все математические операции в процессе решения выполняются также в комплексной форме. Результаты расчета для напряжений и токов представляют в показательной форме $\underline{U} = Ue^{j\psi}$, а для мощностей − в алгебраической форме $\underline{S} = P + jQ$. В цепи переменного тока каждой точке электрической схемы соответствует определенное значение комплексного потенциала. Если на комплексной плоскости в выбранном масштабе нанести координаты всех точек схемы, а затем соединить точки на графической диаграмме прямолинейными отрезками точно так, как они соединены между собой на электрической схеме, то получим топографическую диаграмму потенциалов. На топографической диаграмме потенциалов можно графически определить напряжение между двумя произвольно выбранными точками, для этого достаточно соединить выбранные точки отрезком прямой, при этом длина отрезка в выбранном масштабе равна модулю, а угол с вещественной осью − аргументу комплексного числа.

Расчет цепей переменного тока, как правило, иллюстрируется построением топографической диаграммы потенциалов, совмещенной с векторной диаграммой токов. Ниже приведен пример расчета сложной цепи переменного тока с построением топографической диаграммы потенциалов и векторной диаграммы токов. Все операции расчета выполнены на ЭВМ в MathCAD.

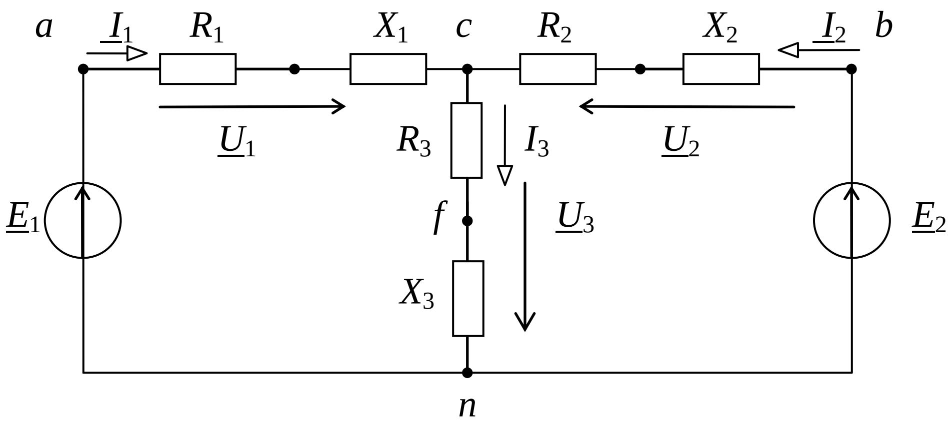


Рис. 61

Задана схема цепи (рис. 61) и параметры отдельных элементов в комплексной форме:

$$E := \begin{pmatrix} 146e^{j\cdot 28deg} \\ 152e^{-j\cdot 35deg} \\ 0 \end{pmatrix}\cdot V \qquad Z := \begin{pmatrix} 48+31j \\ 43-22j \\ 56-32j \end{pmatrix}\Omega$$

Расчет схемы методом узловых потенциалов:

$$V2 := 0 \quad V1 := \frac{\dfrac{E_1}{Z_1}+\dfrac{E_2}{Z_2}}{\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_3}} \qquad |V1| = 120.727\ V \qquad arg(V1) = -15.835\cdot deg$$

$$Va := V2 + E_1 \qquad |Va| = 146\ V \qquad arg(Va) = 28\,deg$$

$$Vb := V2 + E_2 \qquad |Vb| = 152\ V \qquad arg(Vb) = -35\,deg$$

$$I_1 := \frac{V2 - V1 + E_1}{Z_1} \qquad I_2 := \frac{V2 - V1 + E_2}{Z_2} \qquad I_3 := \frac{V1 - V2}{Z_3}$$

$$\overrightarrow{|I|} = \begin{pmatrix} 1.79 \\ 1.136 \\ 1.872 \end{pmatrix} A \qquad arg(I) = \begin{pmatrix} 49.975 \\ -54.137 \\ 13.91 \end{pmatrix}\cdot deg$$

Топографическая диаграмма потенциалов и векторная диаграмма токов

$$V := (0\ \ Va\ \ V1\ \ 0\ \ Vb\ \ V1)^T \qquad J := (0\ \ I_1\ \ 0\ \ I_2\ \ 0\ \ I_3)^T$$

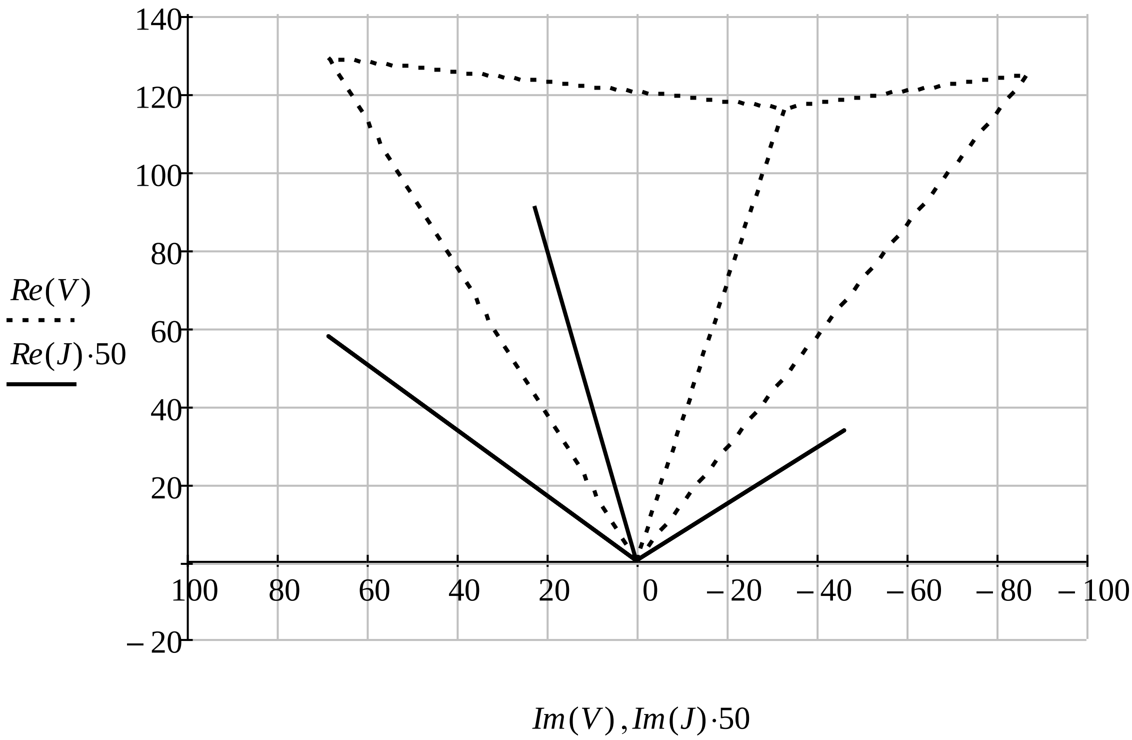


Рис. 62

Т5. РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

1. Определение резонанса

В электрической цепи, содержащей катушки индуктивности L и конденсаторы C, возможны свободные гармонические колебания энергии между магнитным полем катушки $W_M = \frac{Li^2}{2}$ и электрическим полем конденсатора $W_Э = \frac{Cu^2}{2}$. Угловая частота этих колебаний $\omega_о$, называемых свободными или собственными, определяется структурой цепи и параметрами ее отдельных элементов R, L, C.

Резонансным режимом цепи или просто резонансом называется явление увеличения амплитуды гармонических колебаний энергии в цепи, наблюдаемое при совпадении частоты собственных колебаний $\omega_о$ с частотой вынужденных колебаний ω, сообщаемых цепи источником энергии ($\omega_о = \omega$).

В резонансном режиме колебания энергии между магнитным и электрическим полями замыкаются внутри цепи, обмен энергией между источником и цепью отсутствует, а вся поступающая от источника энергия преобразуется в другие виды, т.е. электрическая цепь по отношению к источнику энергии ведет себя как чисто активное сопротивление R (активная проводимость G). На этом основании условие для резонансного режима можно сформулировать через параметры элементов схемы, а именно: входное сопротивление и, соответственно, входная проводимость схемы со стороны выводов источника энергии должна носить чисто активный характер:

$$Z_{вх} = R_{вх}; \quad Y_{вх} = G_{вх}; \quad X_{вх} = 0; \quad B_{вх} = 0;$$

или в комплексной форме: $I_m[\underline{Z}_{вх}] = 0, \quad I_m[\underline{Y}_{вх}] = 0.$

2. Резонанс напряжений

Резонанс в цепи с последовательным соединением источника энергии и реактивных элементов L и C получил название резонанса напряжений. Простейшая схема такой цепи показана на рис. 63.

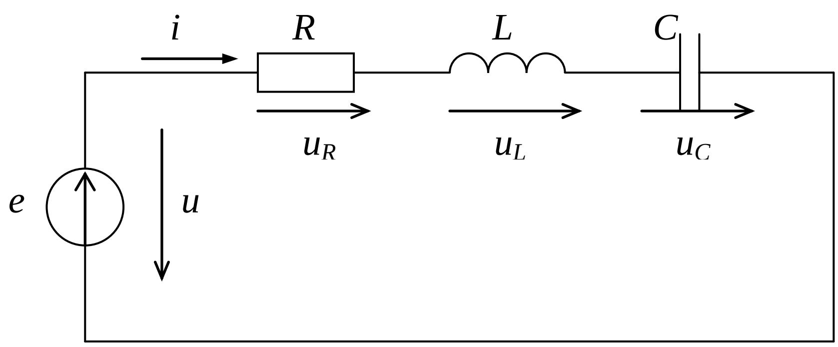


Рис. 63

Комплексное входное сопротивление схемы: $\underline{Z}_{\text{вх}} = R + j(X_L - X_C) = R$.

Условие резонанса напряжений: $X_Э = X_L - X_C = 0$ или $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, откуда $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная или собственная частота.

Из полученного равенства следует, что резонансного режима в цепи можно достичь изменением параметров элементов L и C или частоты источника ω.

В резонансном режиме полное сопротивление схемы имеет минимальное значение и равно активному сопротивлению:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R,$$

а ток максимален и совпадает по фазе с напряжением источника: $I = E / R$; $\varphi = 0$.

Векторная диаграмма напряжений и тока показана на рис. 64.

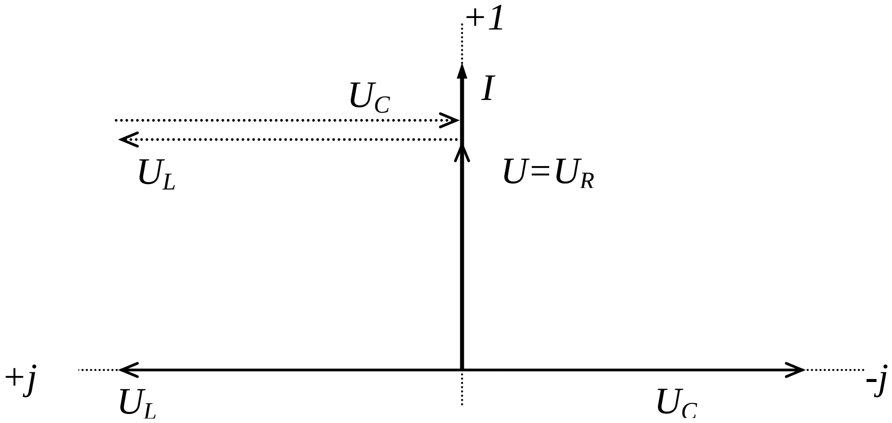


Рис. 64

Напряжения на реактивных элементах равны по модулю, противоположны по фазе и взаимно компенсируют друг друга:

$$\underline{U}_L = \underline{I} jX_L = j\underline{U}\frac{X_L}{R}; \quad \underline{U}_C = \underline{I}(-jX_C) = -j\underline{U}\frac{X_C}{R},$$

а напряжение на резисторе равно напряжению источника: $\underline{U}_R = \underline{I}R = \underline{U} = \underline{E}$.

Напряжения на реактивных элементах $U_L = U_C = U\frac{X_L}{R} = U\frac{X_C}{R}$ могут значительно превосходить напряжение источника $U = E$ при условии, что $X_L = X_C >> R$.

Выясним энергетические процессы, протекающие в цепи в резонансном режиме. Пусть в цепи протекает ток $i = I_m \sin\omega t$, тогда напряжение на конденсаторе составит:

$$u_C = \frac{1}{C}\int i \cdot dt = \frac{I_m}{\omega C}\cos\omega t = \frac{I_m}{\frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot C}\cos\omega t = I_m\sqrt{\frac{L}{C}}\cos\omega t.$$

Сумма энергий магнитного и электрического полей равна:

$$W = W_М + W_Э = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = \frac{L\cdot I_m{}^2}{2}\sin^2\omega t + C\frac{L}{C}I_m{}^2\cos^2\omega t = \frac{L\cdot I_m{}^2}{2} = \text{const}.$$

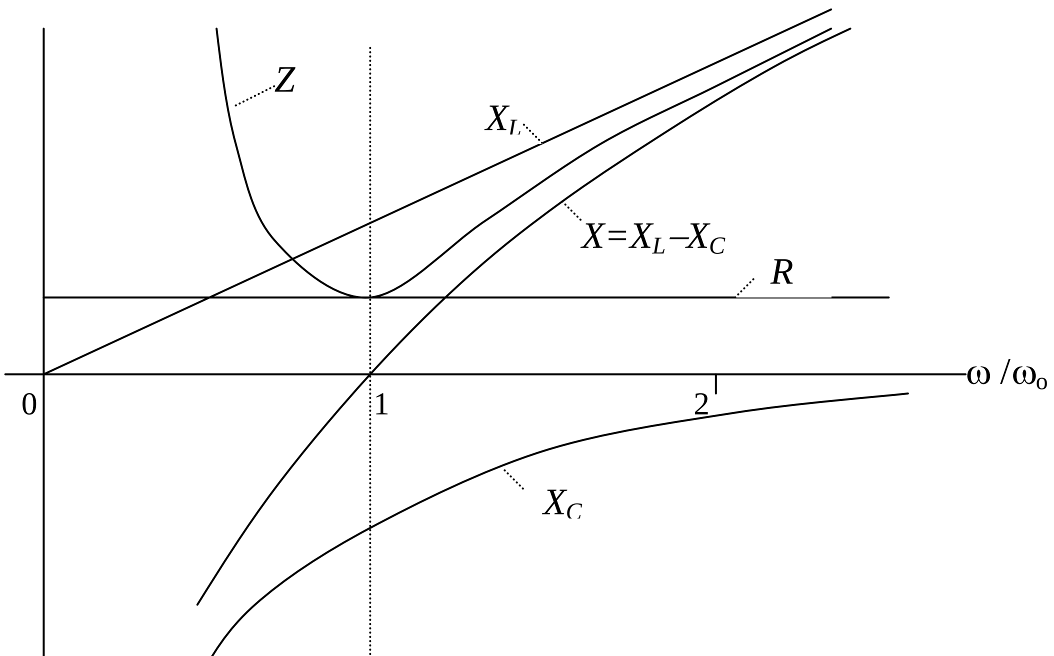
Таким образом, сумма энергий магнитного и электрического полей равна постоянному значению. Это значит, что между магнитным и электрическим полями происходит непрерывный обмен энергией, суммарное значение которой постоянно, а обмен энергией между источником и цепью отсутствует, при этом поступающая от источника энергия преобразуется в другие виды.

Электрическая цепь с последовательным соединением элементов R, L, C в технике получила название последовательного колебательного контура. Свойства такой цепи как колебательного контура характеризуют следующие параметры: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота, ρ = $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – волновое сопротивление, $Q = \frac{\rho}{R}$ – добротность контура.

Чем больше добротность контура Q, тем выразительнее проявляются в нем резонансные явления, например, напряжения на реактивных элементах больше напряжения источника в Q раз: $U_L = U_C = UQ$.

При изменении частоты источника ω = var будут изменяться сопротивления реактивных элементов и, как следствие, будут изменяться ток в цепи и напряжения на отдельных участках.

Частотными характеристиками контура называются зависимости сопротивлений отдельных элементов и участков от частоты $X_L = \omega L$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$, $X = X_L - X_C$, $Z = \sqrt{R + \left(X_L + X_C\right)^2}$ (рис. 61).



Резонансными характеристиками называются зависимости режимных параметров от частоты: U_L, U_C, I, $\varphi = f(\omega)$ (рис. 66).

Полосой пропускания резонансного контура называют область частот $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, на границах которой ток I в $\sqrt{2}$ раз меньше своего максимального значения, т.е. $I = 0{,}707 I_{\max}$. Полоса пропускания контура обратно пропорциональна его добротности: $\Delta\omega = \frac{1}{Q}$. На рис. 63 в относительных единицах представлено семейство резонансных характеристик с различными значениями добротности.

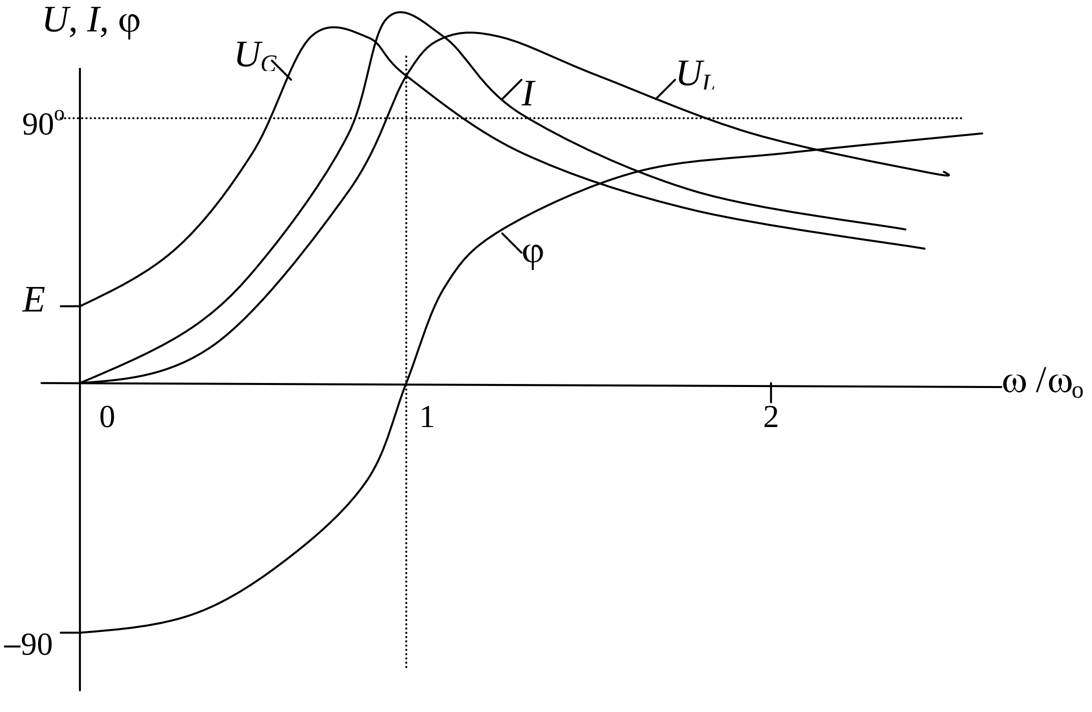
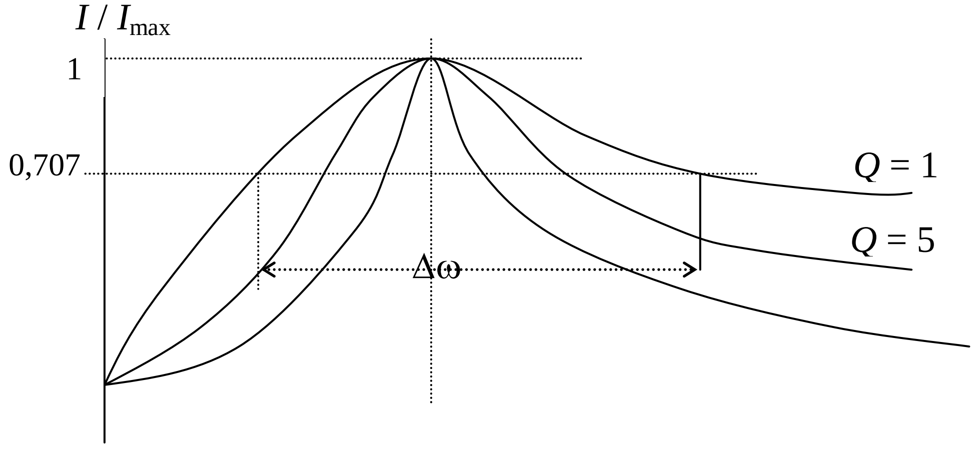


Рис. 66



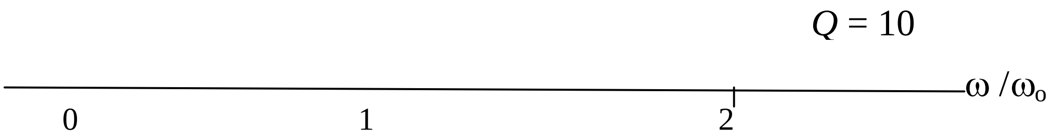


Рис. 67

Практическое применение резонанс напряжений находит в области радиотехники и техники связи. В электроэнергетике явление резонанса напряжений из-за сопутствующих ему перенапряжений может привести к нежелательным последствиям. Например, при подключении к генератору или трансформатору кабельной линии, не замкнутой на приемном конце на нагрузку (в режиме холостого хода), вся цепь может оказаться в резонансном режиме, при этом напряжения на отдельных участках цепи могут появиться высокие напряжения.

3. Резонанс токов

Резонанс в цепи с параллельным соединением источника энергии и реактивных элементов L и C получил название резонанса токов. Простейшая схема такой цепи показана на рис. 68.

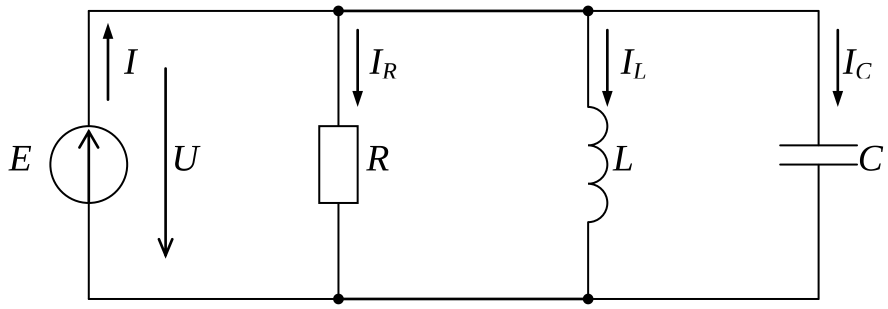


Рис. 68

Комплексная входная проводимость схемы:

$$\underline{Y}_{BX} = G - j\left(B_L + B_C\right) = G\,.$$

Условие резонанса токов: $B_Э = B_L - B_C = 0$ или $\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0$, откуда $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная (собственная) частота.

Из полученного равенства следует, что резонансного режима в цепи можно достичь изменением параметров элементов L и C или частоты источника ω.

В резонансном режиме полная проводимость схемы равна активной проводимости и имеет минимальное значение: $Y=\sqrt{G^2+\left(B_L-B_C\right)^2}=G$, а ток источника также минимален и совпадает по фазе с напряжением источника ($\varphi = 0$): $I = UY = UG$.

Токи в ветвях с реактивными элементами $\underline{I}_L = \underline{U}(-jB_L)$, $\underline{I}_C = \underline{U}(jB_C)$ равны по модулю, противоположны по фазе и компенсируют друг друга, а ток в резисторе G равен току источника ($I = I_G = UG$). Равные по модулю токи в реактивных элементах $I_L = I_C$ могут значительно превосходить ток источника I при условии, что $B_L = B_C >> G$.

Векторная диаграмма токов и напряжений показана на рис. 69.

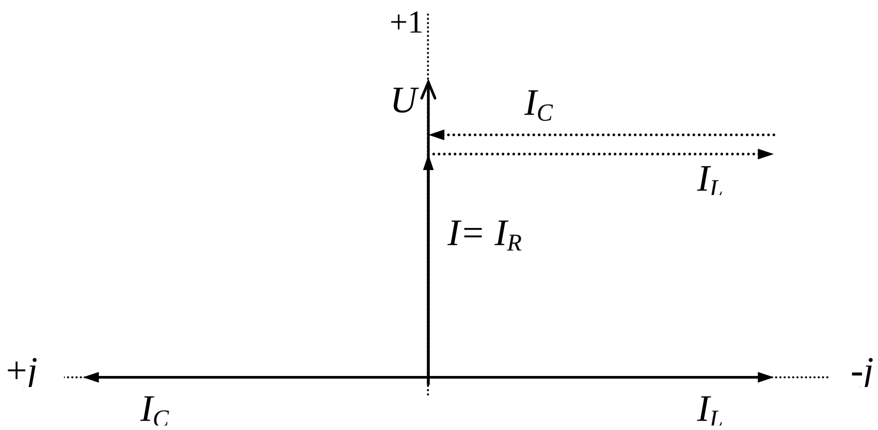
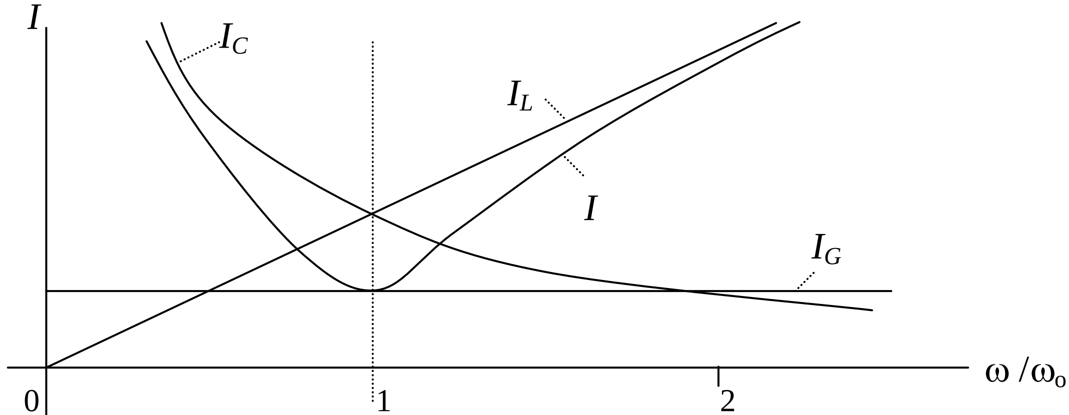


Рис. 69

Электрическая цепь с параллельным соединением элементов G, L и C в технике получила название параллельного колебательного контура. Свойства такой цепи как колебательного контура характеризуют следующие параметры: $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота; $\gamma=\dfrac{1}{\omega_0 L}=\omega_0 C=\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ – волновая проводимость; $Q=\dfrac{\gamma}{G}$ – добротность контура.

Резонансные характеристики параллельного контура представлены на рис. 70.



Резонанс токов находит широкое применение в области радиотехники и техники связи. В электроэнергетике компенсация реактивной мощности на промышленных предприятиях с помощью параллельного подключения конденсаторных батарей, по сути дела, представляет собой мероприятие, при котором также достигается резонанс токов.

4. Резонанс в сложных схемах

Схемы замещения реальных электрических цепей могут существенно отличаться от рассмотренных выше простейших последовательной или параллельной схем. Хотя условие резонансного режима в общем виде [$I_m(\underline{Z}_{вх}) = 0$ и $I_m(\underline{Y}_{вх}) = 0$] для любой схемы сохраняется, однако конкретное содержание этих уравнений будет определяться структурой схемы замещения.

На рис. 71 приведена эквивалентная схема параллельного контура, в которой реальные элементы цепи (катушка и конденсатор) представлены последовательными схемами замещения.

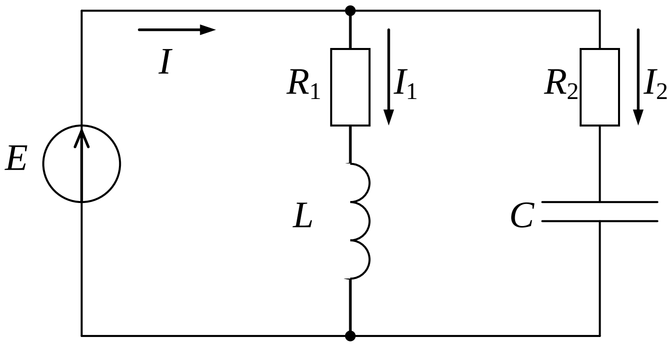


Рис. 71

Входная комплексная проводимость схемы:

$$\underline{Y}_{BX} = \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} = \left(\frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X^2{}_C}\right) - j\left(\frac{X_L}{R_1{}^2 + X_L{}^2} - \frac{X_C}{R_2{}^2 + X_C{}^2}\right) = G_Э - jB_Э$$

Условие резонанса:

$$B_Э = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_2^2 + X_c^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}{R_2^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = 0$$

Отличие данного условия резонанса от аналогичного условия для простейшей схемы рис. 68 состоит в том, что в этом уравнении присутствуют параметры активных элементов R_1 и R_2.

Анализ полученного уравнения показывает, что при изменении параметров одного из элементов схемы возможны различные варианты решения.

При изменении сопротивлений R_1 и R_2 возможны два варианта решения: 1) существует одна точка резонанса (корни уравнения вещественные;

один положительный, а другой отрицательный); 2) резонанс в схеме невозможен (корни уравнения комплексные).

При изменении индуктивности L или емкости C возможны три варианта решения: 1) существует две точки резонанса (корни уравнения вещественные и оба положительные); 2) существует одна точка резонанса (корни уравнения равные и положительные); 3) резонанс в схеме невозможен (корни уравнения комплексные).

Решая уравнение резонанса относительно частоты, получим:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}$$

Анализ этого уравнения показывает, что при $R_1 = R_2$ резонансная частота имеет выражение $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, как и для простейшей схемы рис. 1, *а* при $\dfrac{L}{C} = R_1^2 = R_2^2$ для ω_0 получается неопределенное решение, что физически означает резонансный режим на любой частоте.

На рис. 72 приведена схема последовательного контура, в которой реальные элементы (катушка и конденсатор) представлены различными схемами замещения.

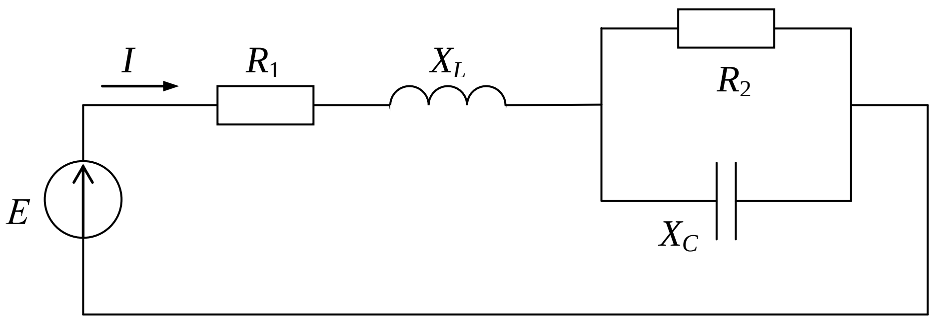


Рис. 72

Входное комплексное сопротивление схемы:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R_1 + jX_L + \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = \left(R_1 + \frac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + X_C^2}\right) + j\left(X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2}\right) = R_Э + jX_Э$$

Условие резонанса:

$$X_Э = X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2} = 0 \quad \text{или} \quad \omega L - \frac{R_2^2\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0$$

Анализ этого уравнения показывает неоднозначную зависимость условия резонанса от значений параметров каждого элемента схемы.

Если сложная схема содержит в своей структуре несколько (более двух) разнородных реактивных элементов, то при изменении частоты в ней могут наблюдаться несколько резонансных режимов (как тока, так и напряжения) в зависимости от структуры схемы.

Т6. МАГНИТНОСВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

1.Общие определения

Если магнитное поле, создаваемое одной из катушек, пересекает плоскость витков (сцеплено с витками) второй катушки, то такие катушки принято называть магнитносвязанными (индуктивносвязанными) (рис. 73, *а*).

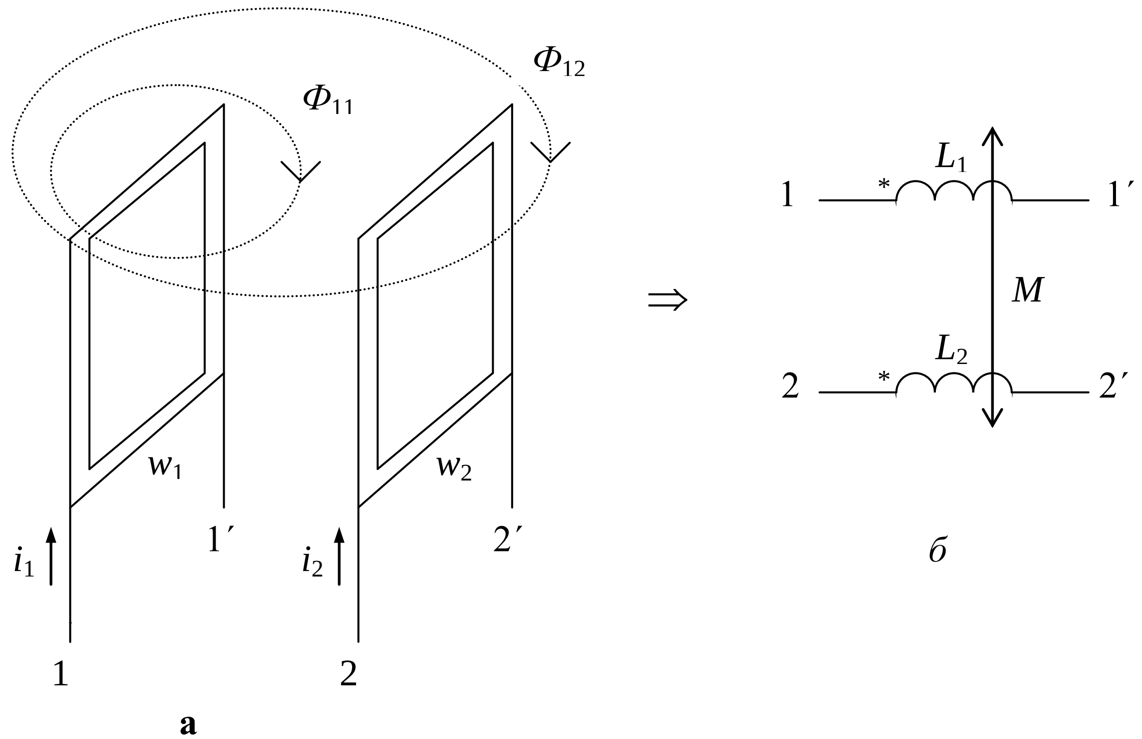


Рис. 73

Φ_{11} – часть магнитного потока, создаваемого током i_1, который сцеплен только с витками катушки w1.

Φ_{12} – часть магнитного потока, создаваемого током i_1, который сцеплен с витками обеих катушек (взаимный поток).

$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$ – суммарный магнитный поток, создаваемый током i_1.

Собственной индуктивностью катушки L называется отношение ее собственного потокосцепления к току в ней:

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{i_1} = \frac{\Phi_1 w_1}{i_1}.$$

Взаимной индуктивностью M называется отношение взаимного потокосцепления 2-й катушки к току в 1-й или наоборот:

$$M = \frac{\Phi_{12} w_2}{i_1} = \frac{\Phi_{21} w_1}{i_2}.$$

Степень магнитной связи между катушками характеризуется коэффициентом связи: $k_{\text{св}} = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, значение которого изменяется в пределах от 0 до 1.

При протекании одновременно по обеим катушкам постоянных токов i_1 и i_2 их собственные и взаимные магнитные потоки могут совпадать по направлению (направлены согласно), и тогда происходит усиление магнитного поля, или могут не совпадать (направлены встречно), тогда происходит ослабление магнитного поля. Если при выбранных направлениях токов в катушках их собственные и взаимные потоки совпадают, то такие направления токов принято называть согласными (в противном случае – встречными). Выводы катушек, относительно которых согласно направленные токи ориентированы одинаково (например, от вывода в катушку), называются одноименными или однополярными. На схемах электрических цепей одноименные выводы катушек обозначаются одинаковыми символьными знаками (звездочка, точка), а наличие взаимной магнитной связи – дугой со стрелками на концах (рис. 69, *б*). Полярность выводов магнитносвязанных катушек может быть определена на основе правила правоходового винта, если известны их геометрия и направление намотки, или путем экспериментальных измерений.

При протекании по катушкам переменных синусоидальных токов $i_1 = I_{m1} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1)$ и $i_2 = I_{m2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_2)$ в них по закону электромагнитной индукции будут наводиться одновременно ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимной индукции, которые в сумме уравновесят приложенные к катушкам напряжения:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -e_{1соб} - e_{1вз} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= -e_{2соб} - e_{2вз} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}\right\}$$ – дифференциальная форма уравнений 2-го закона Кирхгофа,

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{I}_2 jX_2 \pm \underline{I}_1 jX_м \\ \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 jX_1 \pm \underline{I}_2 jX_м \end{aligned}\right\}$$ – комплексная форма уравнений 2-го закона Кирхгофа.

Здесь знак “+” употребляется при согласном направлении токов в катушках, а знак “–” – при встречном направлении.

2. Последовательное соединение магнитносвязанных катушек

Пусть две магнитносвязанные катушки (R_1, L_1, R_2, L_2, M) соединены последовательно с источником ЭДС E (рис. 74).

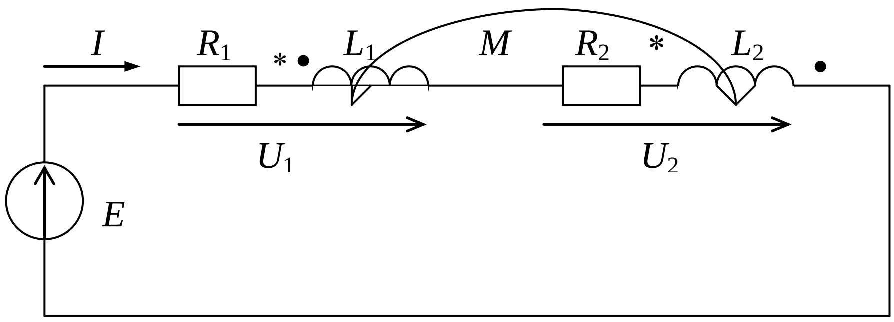


Рис. 74

При последовательном соединении положительное направление тока выбирается одновременно для обеих катушек, поэтому его направление относительно одноименных выводов зависит только от способа соединения катушек между собой: а) согласное (*) и б) встречное (•).

При согласном включении собственные и взаимные магнитные потоки будут складываться, а при встречном – вычитаться. По второму закону Кирхгофа:

$$e = u_1 + u_2 = iR_1 + L_1\frac{di}{dt} \pm M\frac{di}{dt} + iR_2 + L_2\frac{di}{dt} \pm M\frac{di}{dt}$$ – дифференциальная форма,

$$\underline{E} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{I}R_1 + \underline{I}jX_1 \pm \underline{I}jX_M + \underline{I}R_2 + \underline{I}jX_2 \pm \underline{I}jX_M$$ – комплексная форма.

Здесь и далее знак “+” соответствует согласному включению, а знак “–” – встречному.

Комплексному уравнению соответствуют векторные диаграммы тока и напряжений (рис. 71, *а* – для согласного включения, рис. 71, *б* – для встречного включения).

Из комплексного уравнения следует:

$$\underline{Z}_Э = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2 \pm 2X_M) = R_Э + jX_Э,$$

где $R_Э = R_1 + R_2$, $X_Э = X_1 + X_2 \pm 2X_M$, откуда следует, что

$$Xссо = X_1 + X_2 + 2X_M, \quad Xввс = X_1 + X_2 - 2X_M$$

Решая совместно последние уравнения, получим:

$$X_M = \frac{Xccо - Xввс}{4} \; ; \quad M = \frac{Lccо - Lввс}{4}$$

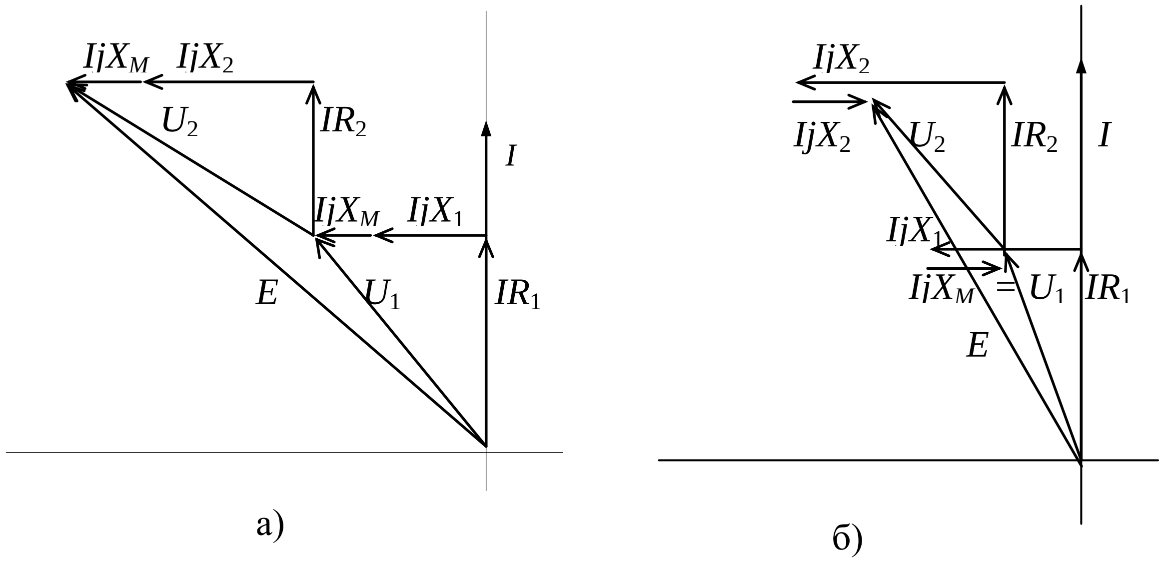


Рис. 75

Полученное соотношение используется на практике для экспериментального определения взаимного реактивного сопротивления X_M и соответственно взаимной индуктивности *M*. Для этого в цепи согласно схемы рис. 76 фиксируют показания трех измерительных приборов (U, I, φ) при согласном (1) и встречном (2) включении катушек и по показаниям приборов определяют эквивалентные параметры цепи:

$$\underline{Z}_1 = \frac{U_1}{I_1} e^{j\varphi_1} = Rэ + jXcXc \; , \quad \underline{Z}_2 = \frac{U_2}{I_2} e^{j\varphi_2} = Rэ + jXвXв$$

Большему значению $X_Э$ соответствует согласное включение, меньшему – встречное.

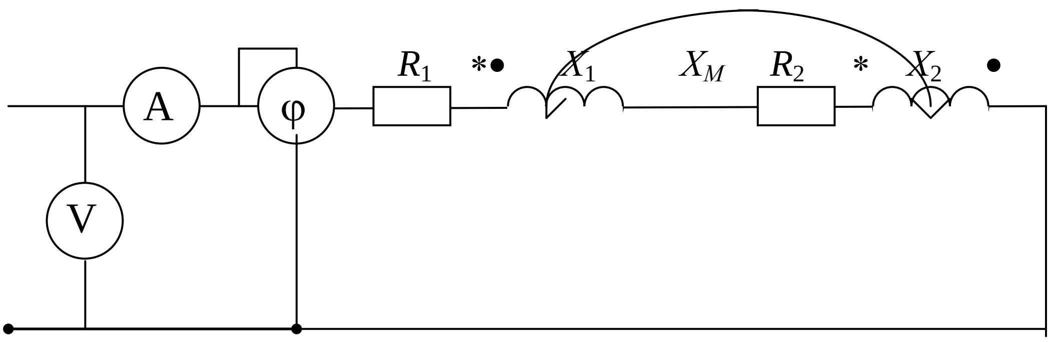


Рис. 76

3. Параллельное соединение магнитносвязанных катушек

В сложной цепи магнитосвязанные катушки могут находиться в любых ветвях. Так как направления токов в ветвях схемы выбираются произвольно, то токи в ветвях, содержащих магнитносвязанные катушки, могут быть направлены как согласно, так и встречно.

Расчет токов в сложной схеме с магнитносвязанными катушками производится, как правило, методом законов Кирхгофа. К расчету таких цепей неприменим метод узловых потенциалов и метод эквивалентного генератора. Учет всех слагаемых в уравнениях метода контурных токов довольно сложен, по этой причине его также не применяют.

Рассмотрим расчет схемы на конкретном примере рис. 77:

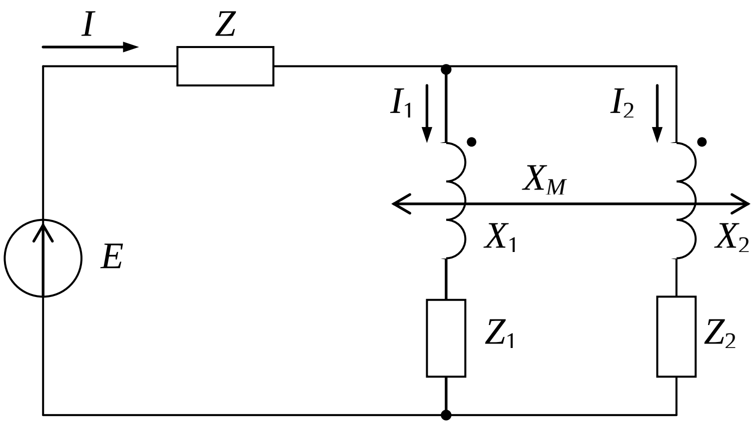


Рис. 77

Система уравнений Кирхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0 & (1) \\ \underline{I}\underline{Z} + \underline{I}_1 jX_1 + \underline{I}_2 jX_m + \underline{I}_1\underline{Z}_1 = \underline{\mathrm{E}} & (2) \\ \underline{I}\underline{Z} + \underline{I}_2 jX_2 + \underline{I}_1 jX_m + \underline{I}_2\underline{Z}_2 = \underline{\mathrm{E}} & (3) \end{cases}$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует соблюдать правило полярности токов, а именно, падение напряжения от собственного тока ветви на собственном реактивном сопротивлении ($\underline{I}_1 jX_1$) и падение напряжения на взаимном реактивном сопротивлении от тока связанной ветви ($\underline{I}_2 jX_\mathrm{M}$) принимаются одного знака при согласном направлении этих токов, и противоположного знака при встречном направлении (в рассматриваемом примере токи направлены согласно).

Сделаем подстановки $\underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1$ в уравнение (2) и $\underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_2$ в уравнение (3), в результате получим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0 \\ \underline{I}\left(\underline{Z}_1 + \underline{I}\,jX_M\right) + \underline{I_1}\left(jX_1 - jX_M\right) + \underline{I}_1\underline{Z}_1 = \underline{E} \\ \underline{I}\left(\underline{Z}_1 + \underline{I}\,jX_M\right) + \underline{I_2}\left(jX_2 - jX_M\right) + \underline{I}_2\underline{Z}_2 = \underline{E} \end{cases} .$$

Новой системе уравнений соответствует некоторая новая эквивалентная схема без магнитных связей (рис. 78):

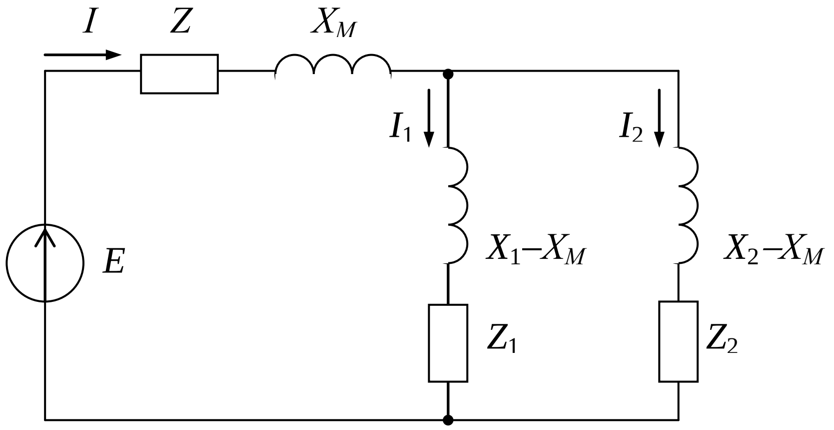


Рис. 78

Если ветви с магнитносвязанными катушкам присоединены к общему узлу одноименными выводами, то магнитная развязка имеет вид рис. 79:

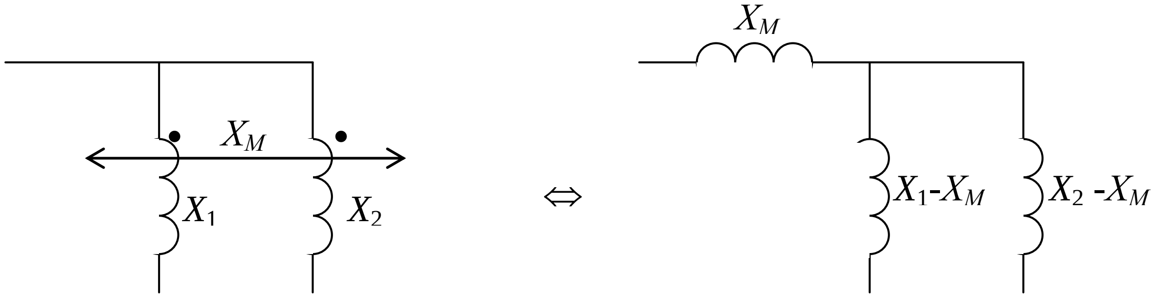


Рис. 79

Если ветви с магнитносвязанными катушкам присоединены к общему узлу разноименными выводами, то магнитная развязка имеет вид рис. 80:

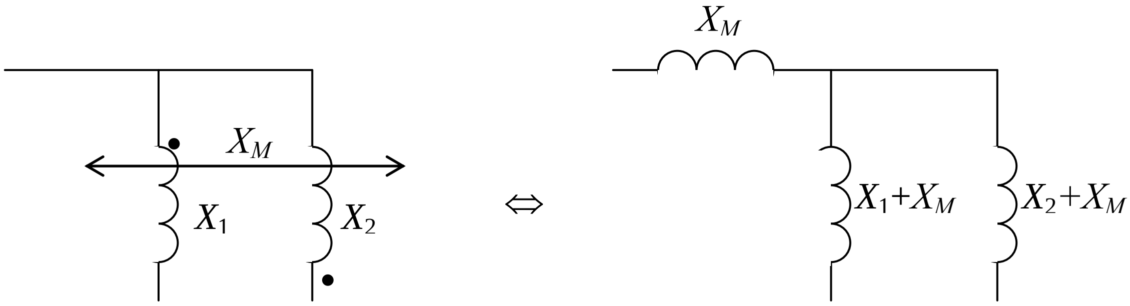


Рис. 80

Замена исходной схемы с магнитносвязанными катушками эквивалентной схемой без магнитных связей называется развязкой магнитных связей или магнитной развязкой. Магнитная развязка электрических схем применяется для упрощения их расчета. После выполнения магнитной развязки к расчету схемы применим любой метод расчета сложных схем.

4. Линейный (без сердечника) трансформатор

Схема линейного трансформатора состоит из двух магнитносвязанных катушек, к одной из которых (первичной) подключается источник ЭДС E, а ко второй (вторичной) – нагрузка $\underline{Z}_{\text{Н}}$ (рис. 81).

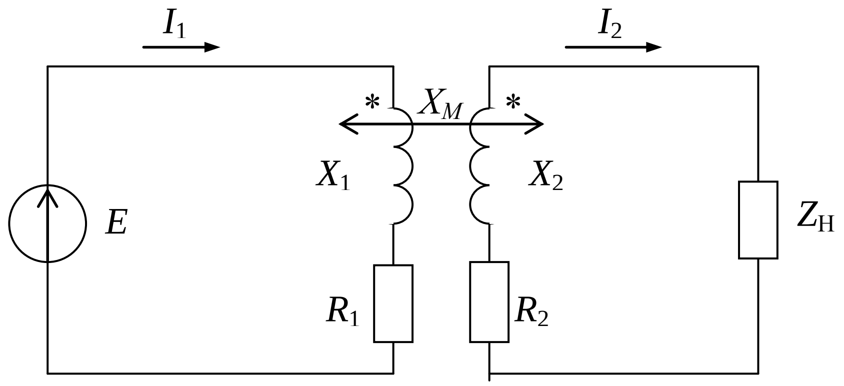


Рис. 81

Уравнения Кирхгофа для схемы трансформатора в комплексной форме имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 jX_1 - \underline{I}_2 jX_M + \underline{I}_1 R_1 = \underline{E} & (1) \\ \underline{I}_2 jX_2 - \underline{I}_1 jX_M + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_H = 0 & (2) \end{cases}$$

С целью магнитной развязки схемы добавим в уравнение (1) слагаемые ($\underline{I}_1 jX_M - \underline{I}_1 jX_M$), а в уравнении (2) – слагаемые ($\underline{I}_2 jX_M - \underline{I}_2 jX_M$), в результате получим:

$$\begin{cases} \underline{I}_1\left[R_1 + j\left(X_1 - X_M\right) + jX_M\right] - \underline{I}_2 jX_M = \underline{E} \\ \underline{I}_2\left[R_2 + j\left(X_2 - X_M\right) + \underline{Z}_2\right] - \underline{I}_1 jX_M = 0 \end{cases}$$

Новые уравнения являются контурными для некоторой новой эквивалентной схемы без магнитных связей (рис. 82):

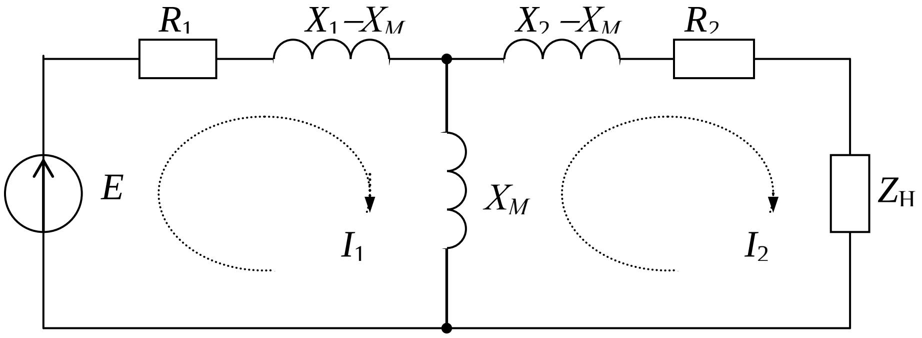


Рис. 82

Таким образом, магнитная развязка трансформатора имеет вид рис. 83:

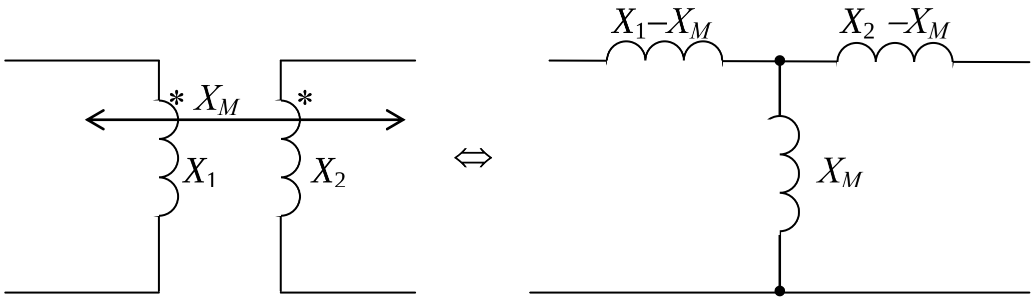


Рис. 83

Следует иметь в виду, что магнитная развязка является математическим приемом, направленным на упрощение расчета схемы цепи, и физически не всегда может быть заменена электрической цепью.

Например, схема рис. 83 может быть реализована цепью только при условии $X_1 - X_{\text{М}} > 0$ и $X_2 - X_{\text{М}} > 0$.

Т6. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ ВЕКТОРНЫХ И КРУГОВЫХ ДИАГРАММ.

Уравнение дуги окружности в комплексной форме.

При изменении параметров одного из элементов сложной цепи токи всех ветвей, напряжения на всех элементах изменяются так, что концы векторов этих величин описывают дуги некоторых окружностей. Для исследования зависимости любой векторной величины ($\underline{U}$, $\underline{I}$) от переменного параметра достаточно определить дугу окружности, по которой перемещается конец этого вектора, другими словами, построить круговую диаграмму.

Уравнение дуги окружности в комплексной форме имеют вид:

$$\underline{M} = \frac{\underline{M}_0}{1 + \frac{n}{a} e^{j\psi}},$$

где $\underline{M} = Me^{j\beta}$ – исследуемый вектор, $\underline{M}_0$ – вектор-хорда дуги окружности, a = const – постоянный коэффициент, ψ = const – постоянный угол, n = var = = (0 – ∞) – переменный параметр.

Порядок построения круговой диаграммы по заданному уравнению:

$$\underline{M} = \frac{\underline{M}_0}{1 + \frac{n}{a} e^{j\psi}} = \frac{5e^{j20}}{1 + \frac{n}{20} e^{j120}}$$

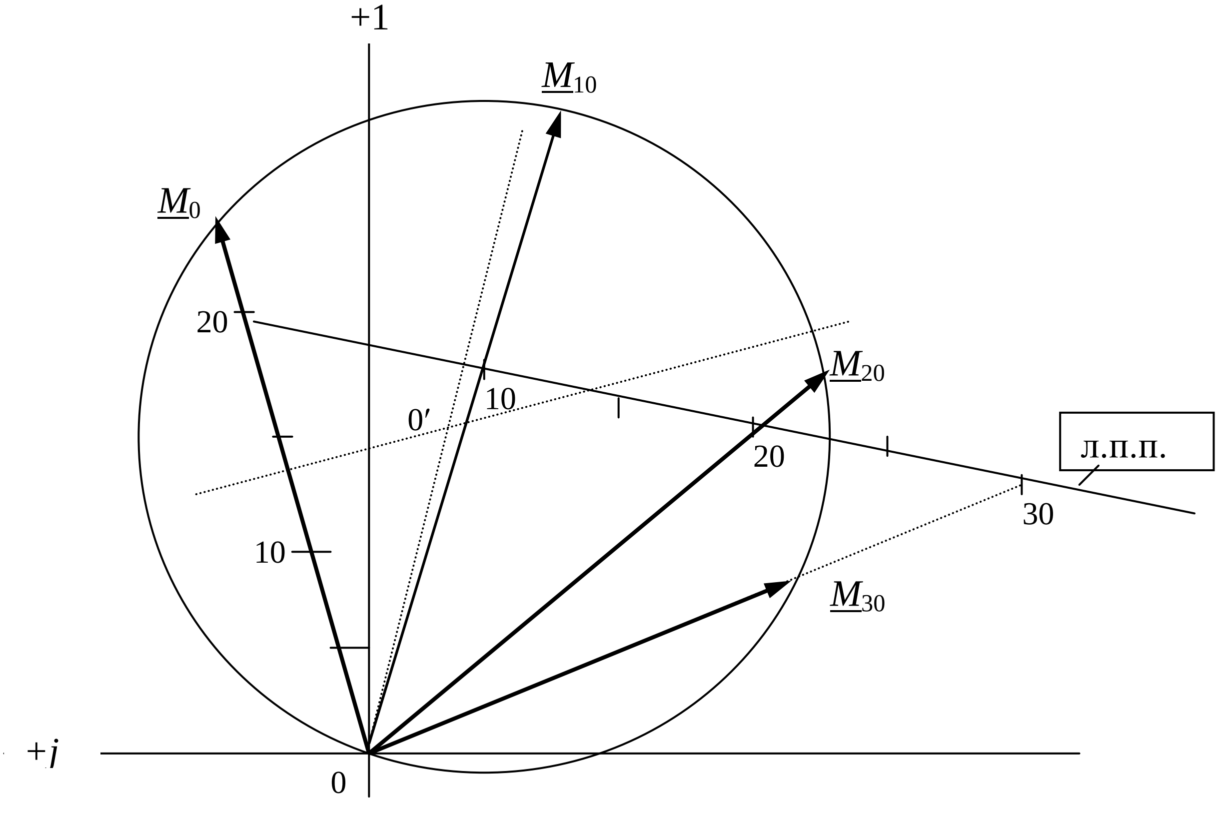


Рис. 84

1) На комплексной плоскости в выбранном масштабе $m_м$ откладывают вектор $\underline{M}_0 = 5e^{j20}$ – хорду дуги окружности (рис. 84).

2) Вдоль вектора-хорды $\underline{M}_0$ от его начала в выбранном масштабе m_a откладывают отрезок, равный коэффициенту “a”.

3) Из конца отрезка “a” под углом $-\psi$ к вектору $\underline{M}_0$ проводят линию переменного параметра (л.п.п.), на которой наносят масштаб m_a, принятый ранее для отрезка “a”.

4) Определят положение центра дуги как точку пересечения двух перпендикуляров: первый проводят через середину вектора-хорды $\underline{M}_0$, а второй – из начала координат к линии переменного параметра.

5) Проводят рабочую дугу по ту сторону от вектора-хорды $\underline{M}_0$, где расположена линия переменного параметра.

6) Вдоль линии переменного параметра откладывают текущее значение параметра “n” соединяют точку с началом вектора $\underline{M}_0$ (началом координат) и продолжают прямую линию до пересечения с дугой окружности. Искомый вектор $\underline{M}$ соответствует отрезку от начала координат до точки пересечения прямой линии с дугой окружности, при этом модуль вектора равен длине отрезка в масштабе $m_м$, а начальная фаза вектора – углу между вещественной осью +1 и напрвлением вектора.

На рис. 80 показано семейство векторов $\underline{M}$, построенных для различных значений переменного параметра “n” (n = 0; 10; 20; 30).

2. Круговая диаграмма тока и напряжений для элементов последовательной цепи

Рассмотрим схему цепи, состоящую из последовательно включенных источника ЭДС $\underline{E}$ и пассивных элементов $\underline{Z}_1$, и $\underline{Z}_2$ (рис. 85). Задано, что $\underline{E}$ = $= Ee^{j\alpha}$ = const, $\underline{Z}_1 = Z_1e^{j\varphi1}$ = const, $\underline{Z}_2 = Z_2e^{j\varphi2}$, где φ_2 = const, а Z_2 = var = $0 \div \infty$ – переменный параметр.

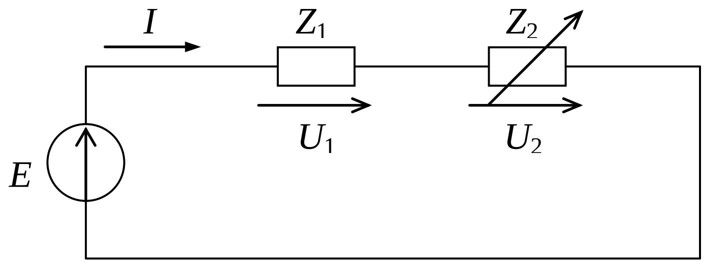


Рис. 85

Преобразуем уравнение закона Ома для схемы к виду дуги окружности в комплексной форме:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}_1}}{1 + \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}} = \frac{\underline{I}k}{1 + \dfrac{Z_2}{Z_1} e^{j(\varphi1-\varphi2)}} = \frac{\underline{M}_0}{1 + \dfrac{n}{a} e^{j\phi}},$$

где $\underline{M}_0 = \underline{I}_к = \underline{E}/\underline{Z}_1$ – ток короткого замыкания, соответствует вектору-хорде дуги окружности, $Z_2 = n$ = var – переменный параметр, $Z_1 = a$ = const – постоянный коэффициент, $\varphi_2 - \varphi_1 = \psi$ = const – постоянный угол.

Таким образом, уравнение для тока $\underline{I}$ является уравнением дуги окружности.

Напряжение на первом элементе представляет собой уравнение дуги окружности:

$$\underline{U}_1 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_1 = \frac{\underline{E} \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{E}}{1 + \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}} = \frac{\underline{E}}{1 + \dfrac{Z_2}{Z_1} e^{j(\varphi 2 - \varphi 1)}} .$$

Напряжение на втором элементе представляет собой уравнение дуги окружности:

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_2 = \frac{\underline{E} \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{E}}{1 + \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} = \frac{\underline{E}}{1 + \dfrac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1}} = \frac{\underline{E}}{1 + \dfrac{Y_2}{Y_1} e^{-j(\varphi 2 - \varphi 1)}} .$$

Для каждого из векторов $\underline{I}$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ может быть построена круговая диаграмма согласно полученным уравнениям и по ним исследована их зависимость от переменного параметра $n = Z_2$.

Круговая диаграмма для произвольного тока и напряжения в сложной цепи

Пусть в схеме сложной цепи изменяется параметр сопротивления в k-той ветви $\underline{Z}_k = Z_k \cdot e^{j\varphi k}$ так, что фазный угол φ_k = const, а модуль $Z_k = 0 \ldots \infty$ = = var – переменный параметр.

Выделим k-тую ветвь из сложной схемы, а остальную часть схемы по отношению к ветви заменим эквивалентным генератором напряжения с параметрами $\underline{E}_э = \underline{U}_{хх}$, $\underline{Z}_0 = Z_0 \cdot e^{j\varphi^\circ} = \underline{Z}_{вх}$ (рис 86):

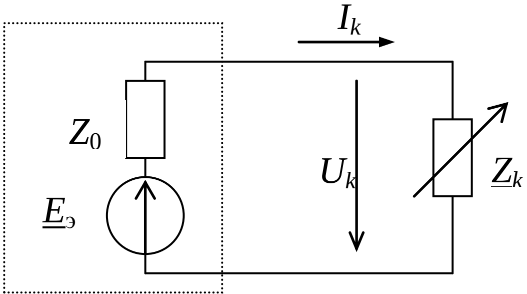


Рис. 86

Таким образом, получившаяся эквивалентная схема рис. 86 ничем не отличается от рассмотренной ранее схемы рис. 81, и, следовательно, для переменных векторов $\underline{I}_k$, $\underline{U}_k$ по аналогии могут быть могут быть записанные уравнения дуги в комплексной форме, например:

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{E}_э}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_k} = \frac{\underline{I}_k}{1 + \dfrac{Z_k}{Z_0} e^{j(\varphi_k - \varphi_0)}} = \frac{\underline{M}_0}{1 + \dfrac{n}{a} e^{j\varphi}}$$ – есть уравнение дуги.

Докажем, что для тока $\underline{I}_n$ произвольной n- ой ветви сложной схемы также может быть получено уравнение дуги в комплексной форме.

В соответствии с теоремой о линейных отношениях исследуемый $\underline{I}_n$ и ток $\underline{I}_k$ связаны между собой линейной зависимостью:

$\underline{I}_n = \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{I}_к$,

где $\underline{A}$, $\underline{B}$ – комплексные коэффициенты, значения которых можно найти из крайних режимов схемы (холостого хода и короткого замыкания).

В режиме холостого хода $Z_k = \infty$, $I_k = 0$, тогда $\underline{I}_n x = \underline{A}$.

В режиме короткого замыкания $Zк = 0$, тогда $\underline{I}nк = \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{I}кк = \underline{I}nx +$ $+ \underline{B} \cdot \underline{I}кк$, откуда получаем:

$$\underline{B} = \frac{\underline{I}nk - \underline{I}nx}{\underline{I}nk}.$$

Подставим найденные значения коэффициентов $\underline{A}$ и $\underline{B}$ и уравнение дуги для тока $\underline{I}_k$ в уравнение связи:

$$\underline{I}n = \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{I}k = \underline{I}nx + \frac{\underline{I}nk - \underline{I}nx}{\underline{I}nk} \underline{I}k = \underline{Inx} + \frac{\underline{I}nk - \underline{I}nx}{1 + \frac{Zk}{Z_0} e^{j(\varphi к - \varphi o)}}.$$

Уравнение для произвольного тока $\underline{I}n$ состоит из суммы двух векторов: а) постоянного вектора $\underline{I}nx$, равного его значению в режиме холостого хода при $Zk = \infty$, и б) переменного вектора, изменяющегося по дуге окружности с хордой $\underline{I}nк - \underline{I}nx$. При построении круговой диаграммы тока $\underline{I}n$ по этому уравнению вначале строится его постоянная составляющая $\underline{I}nx$, в конце которой строится круговая диаграмма для переменной составляющей, результирующий вектор получают как сумму двух составляющих.

Уравнение круговой диаграммы для произвольного напряжения может быть получено путем аналогичных логических выводов.

Т7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ТРЕХФАЗНОГО ТОКА

1.Трехфазная система

Многофазной системой называется совокупность, состоящая из “*n*” отдельных одинаковых электрических цепей или электрических схем, режимные параметры в которых (*e*, *u*, *i*) сдвинуты во времени на равные отрезки $\Delta t = T/n$ или по фазе $\Delta\omega t = 2\pi/n = 360^\circ/n$.

Отдельные части системы называются фазами. Термин “фаза” в электротехнике имеет два смысловых значения: первое – как момент времени для синусоидальной функции тока или напряжения, второе – как часть многофазной системы. В технике нашли применение 2-х, 3-х, 6-и и более фазные системы. В электроэнергетике наибольшее распространение получила трехфазная система, обладающая рядом преимуществ перед системами с другим числом фаз.

Трехфазная система состоит из трех электрических цепей или электрических схем (фаз), параметры режима (*u*,*i*) в которых сдвинуты во времени на $\Delta\omega t = 2\pi/3 = 360^\circ/3 = 120^\circ$. Отдельные фазы трехфазной системы согласно ГОСТ обозначаются (именуются) заглавными латинскими буквами *A*, *B*, *C* (основное обозначение), или цифрами 1, 2, 3 (допустимое обозначение), или заглавными латинскими буквами *R, S, T* (международное обозначение).

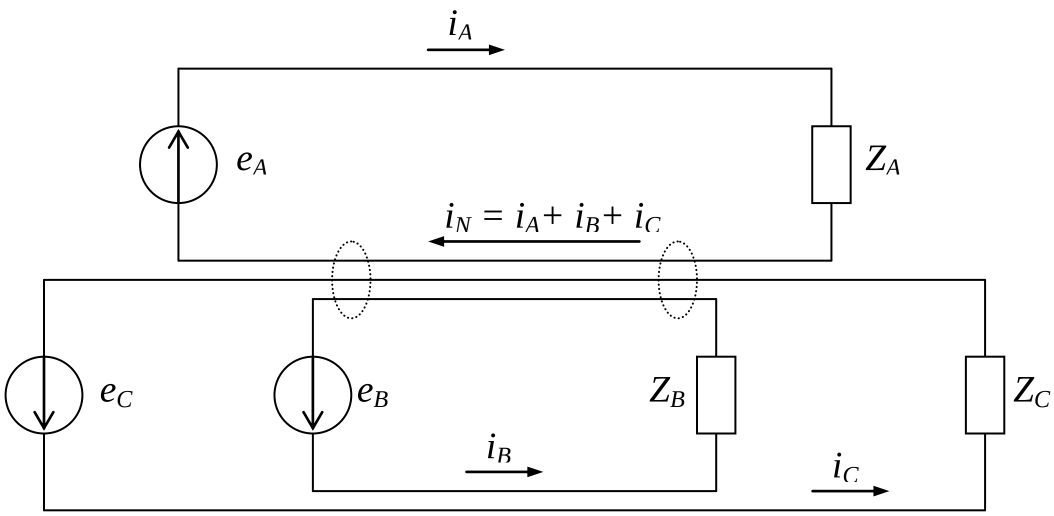


Рис. 87

Не имеет значения, какую из трех фаз именовать какой буквой *A*, *B* или *C*, существенным является их порядок следования друг за другом во времени. Прямым порядком следования фаз называется $A \to B \to C \to A$, при котором параметры режима (*u*, *i*) в фазе *B* отстают от аналогичных параметров в фазе *A* на 120°, а в фазе *C* – опережают на 120°. При обратном порядке следования фаз $A \to C \to B \to A$ параметры режима в фазе C отстают от аналогичных параметров в фазе A на 120°, а в фазе B – опережают на 120°.

Если отдельные фазы системы работают изолировано и независимо друг от друга, то система называется несвязанной. Рассмотрим работу простейшей несвязанной трехфазной системы (рис. 85). Мгновенные значения фазных ЭДС генератора сдвинуты во времени на 120° в порядке следования фаз $A \to B \to C \to A$:

$$e_A(t) = E_m \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{E}_A = E \cdot e^{j0};$$

$$e_B(t) = E_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ) \Leftrightarrow \underline{E}_B = E \cdot e^{-j120}$$

$$e_C(t) = E_m \cdot \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \cdot \sin(\omega t + 120^\circ) \Leftrightarrow \underline{E}_C = E \cdot e^{j120^\circ}$$

Графические диаграммы этих функций показаны на рис. 88, а векторные – на рис. 89.

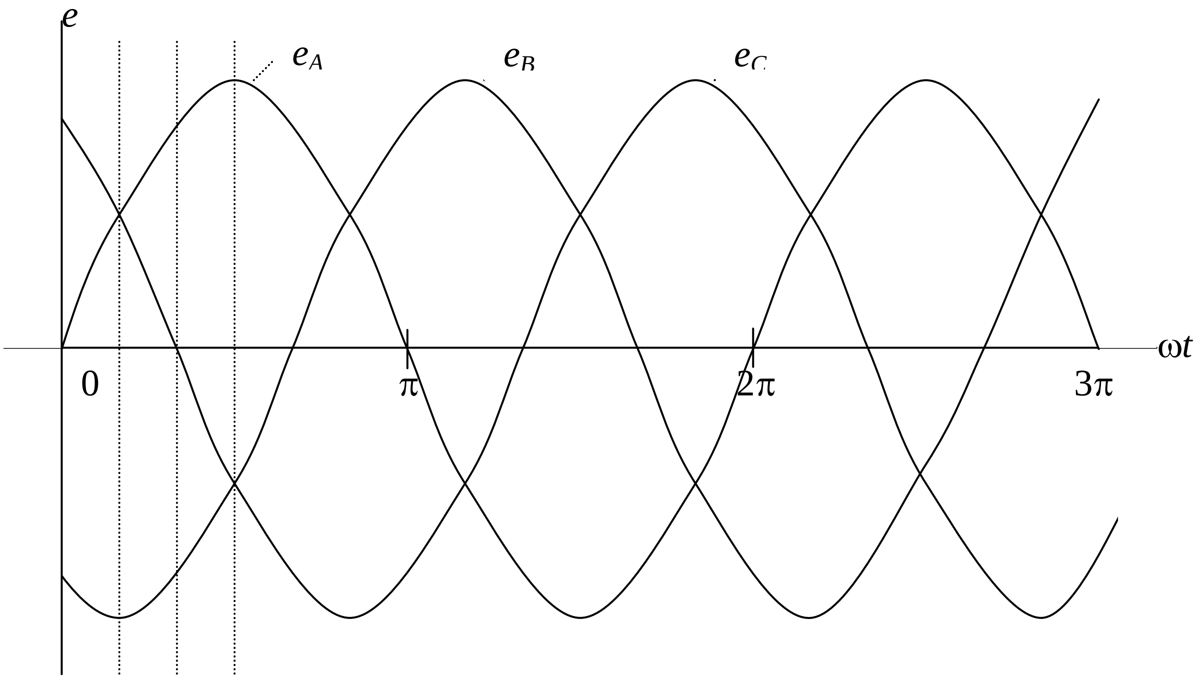


Рис. 88

Основное свойство любых переменных функций (e, u, i) в симметричной трехфазной системе состоит в том, что сумма их мгновенных значений в любой момент времени равна нулю, например, $e_A + e_B + e_C = 0$. Найдем эту сумму для разных моментов времени:

$\omega t = 0$,

$$e_A + e_B + e_C = Em \cdot \sin(0) + Em \cdot \sin(-120^o) + Em \cdot \sin(120^o) = Em\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0;$$

$\omega t = 30^\circ$,

$$e_A + e_B + e_C = Em \cdot \sin(30^o) + Em \cdot \sin(-90^o) + Em \cdot \sin(150^o) = Em\left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\omega t = 60^\circ, \quad e_A + e_B + e_C = E_m \cdot \sin(60^\circ) + E_m \cdot \sin(-60^\circ) + E_m \cdot \sin(180^\circ) = E_m\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) = 0.$$

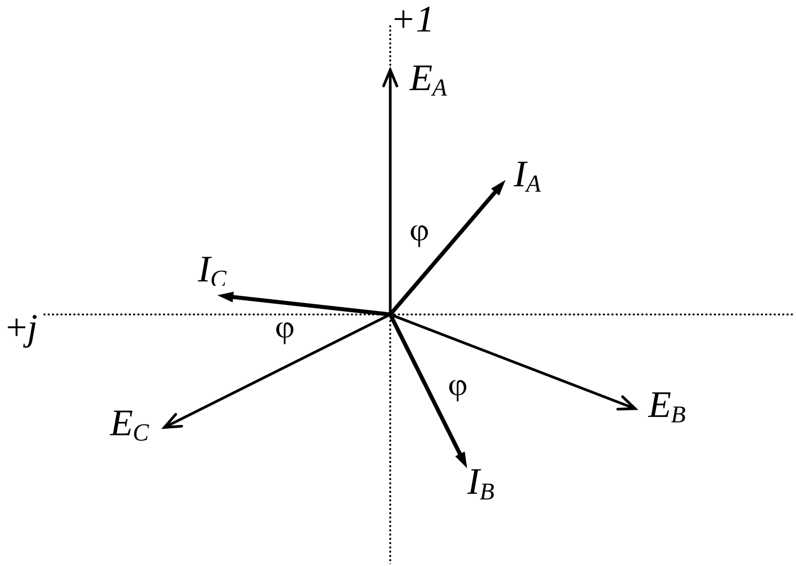


Рис. 89

Как следует из векторной диаграммы рис. 89, геометрическая сумма векторов фазных ЭДС также равна нулю:

$$E_A + E_B + E_C = Ee^{j^\circ} + Ee^{-j120^\circ} + Ee^{j120^\circ} = E\left(e^{j^\circ} + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}\right) = E \cdot 0 = 0.$$

Если нагрузка отдельных фаз равна между собой, т.е. $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = Ze^{j\varphi}$, то фазные токи будут равны по модулю и сдвинуты по фазе относительно своих ЭДС (напряжений) на один и тот же угол φ, а между собой, как и ЭДС, будут сдвинуты по фазе на 120^o. Следовательно, фазные токи i_A, i_B, i_C образуют симметричную трехфазную систему и для них будут справедливы полученные ранее выводы: $i_A + i_B + i_C = 0$; $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

Преобразуем несвязанную трехфазную систему рис. 1 в связанную путем объединения трех обратных приводов в один общий привод. Согласно 1-ому закону Кирхгофа в общем проводе должен протекать суммарный ток $i_N = i_A + i_B + i_C = 0$. Это означает, что потребность в обратном проводе вообще отпадает, благодаря чему достигается значительная экономия проводов при передаче энергии от трехфазного генератора к приемнику.

Достоинства трехфазной системы:

1) Передача энергии от генератора к потребителям трехфазным током наиболее выгодна экономически, чем при любом другом числе фаз.

Например, по сравнению с двухпроводной системой достигается экономия проводов в два раза (3 провода вместо 6), соответственно уменьшаются потери энергии в проводах линии.

2) Трехфазная система позволяет технически просто получить круговое вращающееся поле, которое лежит в основе работы всех трехфазных машин (генераторов и двигателей).

3) Элементы трехфазной системы (генераторы, трансформаторы, двигатели) просты по конструкции, надежны в работе, имеют хорошие массогабаритные показатели, сравнительно дешевы, долговечны.

4) На выходе трехфазных генераторов имеется два уровня выходного напряжения – линейное и фазное, отличающиеся в $\sqrt{3}$ раз ($U_л / U_ф = \sqrt{3}$), что позволяет подключать к такому генератору приемники с различными номинальными напряжениями.

Благодаря своим достоинствам трехфазная система применяется в электроэнергетике для производства, передачи, распределения и потребления электрической энергии.

Трехфазная система и ее основные звенья – генератор, трансформатор, линия электропередачи, двигатель – были разработаны в 1889 году инженером Доливо-Добровольским (фирма Сименс и Шукерт). Создание этой системы явилось важным событием в истории развития теоретической и прикладной электротехники.

2. Способы соединения обмоток трехфазных генераторов

В обмотках трехфазного генератора индуктируются синусоидальные ЭДС, сдвинутые по фазе на 120^0:

$$e_A(t) = Em \cdot \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{E}_A = E_Ф e^{j0},$$

$$e_B(t) = Em \cdot \sin(\omega t - 120°) \Leftrightarrow \underline{E}_B = E_Ф e^{-j120°},$$

$$e_C(t) = Em \cdot \sin(\omega t + 120°) \Leftrightarrow \underline{E}_C = E_Ф e^{j120°},$$

Между собой фазные обмотки генератора могут соединяться по двум различным схемам: звездой ($\perp$) и треугольником (Δ).

При соединении в звезду концы фазных обмоток (фаз) генератора соединяются в общую точку *N*, которая называется нулевой или нейтральной, а начала обмоток служат линейными выводами генератора *A*, *B*, *C* (рис. 90).

Векторная диаграмма напряжений трехфазного генератора при соединении его фазных обмоток в звезду показана на рис. 91а, б.

В трехфазном генераторе различают фазные и линейные напряжения. Фазными называются напряжения между началами и концами фазных обмоток или между одним из линейных выводов *A, B, C* и нулевым выводом *N*. Фазные напряжения равны фазным ЭДС: $\underline{U}_A = \underline{E}_A$, $\underline{U}_B = \underline{E}_B$, $\underline{U}_C = \underline{E}_C$ (индекс *N* при фазных напряжениях опускается, так как $V_N = 0$). Линейными называются напряжения между двумя линейными выводами *A, B, C*. Линейные напряжения равны векторной разности двух фазных напряжений: $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B$; $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C$; $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A$.

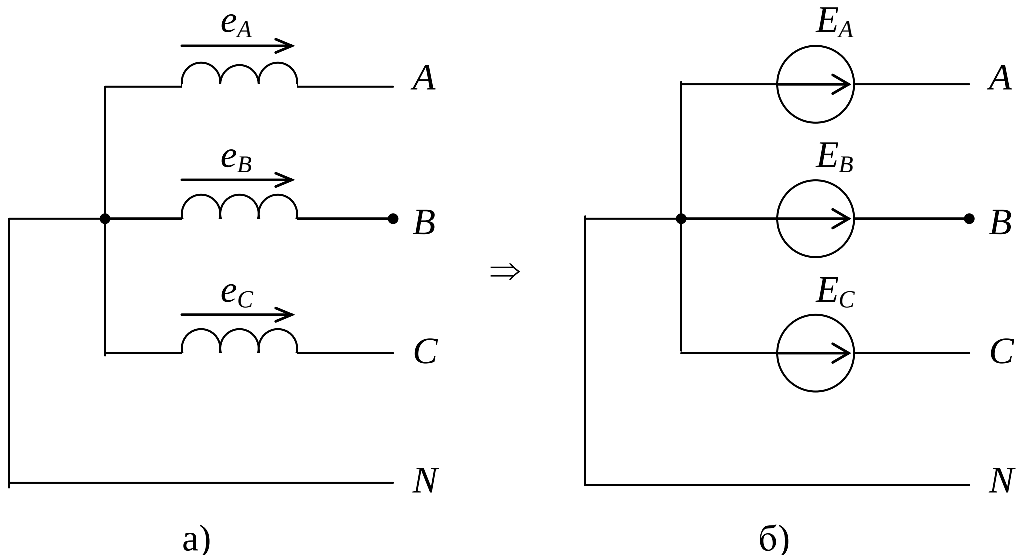


Рис. 90

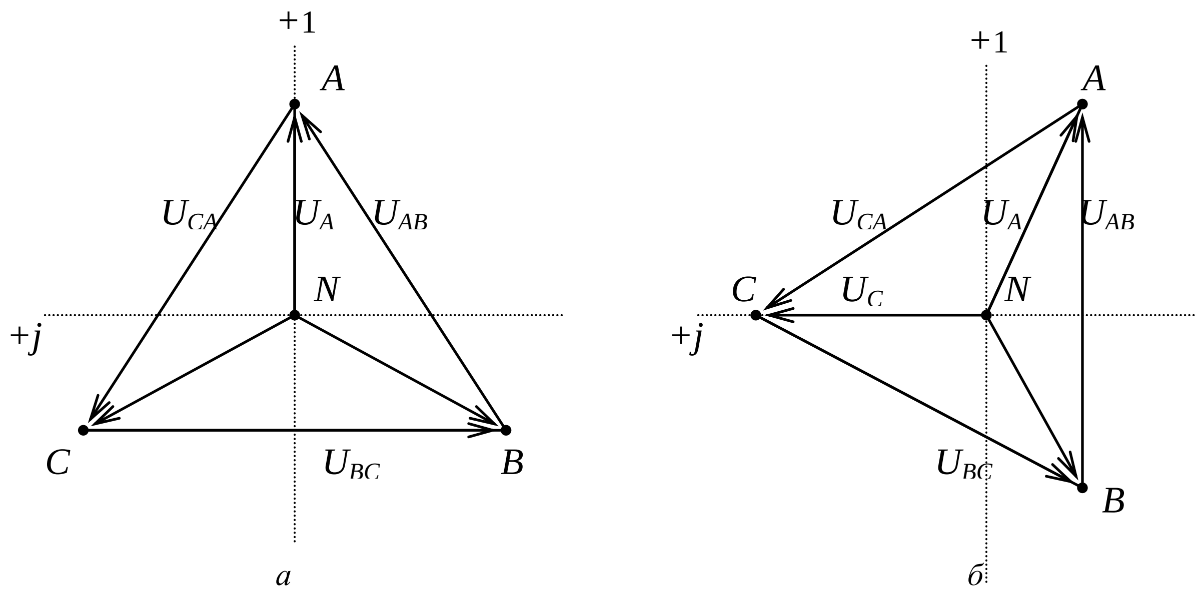


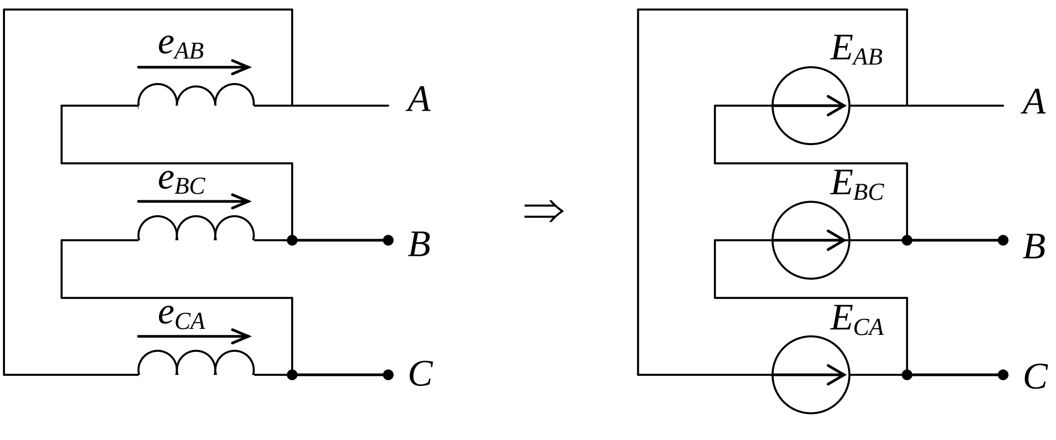
Рис. 91

При расчете трехфазных цепей комплексным методом фазные и линейные напряжения генератора представляются в комплексной форме, при этом один из векторов системы принимают за начальный и совмещают его с вещественной осью, а остальные вектора получают начальные фазы согласно их углам сдвига по отношению к начальному вектору. На рис. 91, *а* показан вариант представления напряжений трехфазного генератора в комплексной форме, когда за начальный вектор принимается фазное напряжение фазы *А*. В этом случае фазные напряжения генератора в комплексной форме получат вид : $\underline{U}_A = \underline{U}_Ф e^{j0^\circ}$, $\underline{U}_B = \underline{U}_Ф e^{-j120^\circ}$, $\underline{U}_C = \underline{U}_Ф e^{+j120^\circ}$, линейные напряжения: $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_Л e^{j30^\circ}$, $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_Л e^{-j90^\circ}$, $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_Л e^{j150^\circ}$.

На рис. 91, *б* показан другой вариант представления напряжений трехфазного генератора в комплексной форме, когда за начальный вектор принимается линейное напряжение $\underline{U}_{AB}$. В этом случае фазные напряжения генератора в комплексной форме получат вид: $\underline{U}_A = \underline{U}_Ф e^{-j30^\circ}$, $\underline{U}_B = \underline{U}_Ф e^{-j150^\circ}$, $\underline{U}_C = \underline{U}_Ф e^{+j90^\circ}$, линейные напряжения: $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_Л e^{j0^\circ}$, $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_Л e^{-j120^\circ}$, $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_Л e^{j120^\circ}$.

Из геометрии рис. 92 получаем соотношение между модулями линейного и фазного напряжений: $U_Л = 2U_Ф \cos 30^o = 2U_Ф \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\, U_Ф$.

Обмотки трехфазного генератора теоретически можно включать по схеме треугольника. В такой схеме конец каждой предыдущей фазы соединяется с началом последующей, а точки соединения служат линейными выводами генератора (рис. 90).



а) б)

Рис. 92

При соединении фаз в треугольник в его контуре действует сумма фазных ЭДС: $\sum e = e_{AB} + e_{BC} + e_{CA}$. В реальных трехфазных генераторах технически невозможно обеспечить равенство нулю для суммарной ЭДС. Так как собственные сопротивления обмоток генератора малы, то даже незначительная по величине суммарная ЭДС $\sum e \triangleright 0$ может вызвать в контуре треугольника уравнительный ток, соизмеримый с номинальным током генератора, что привело бы к дополнительным потерям энергии и снижению

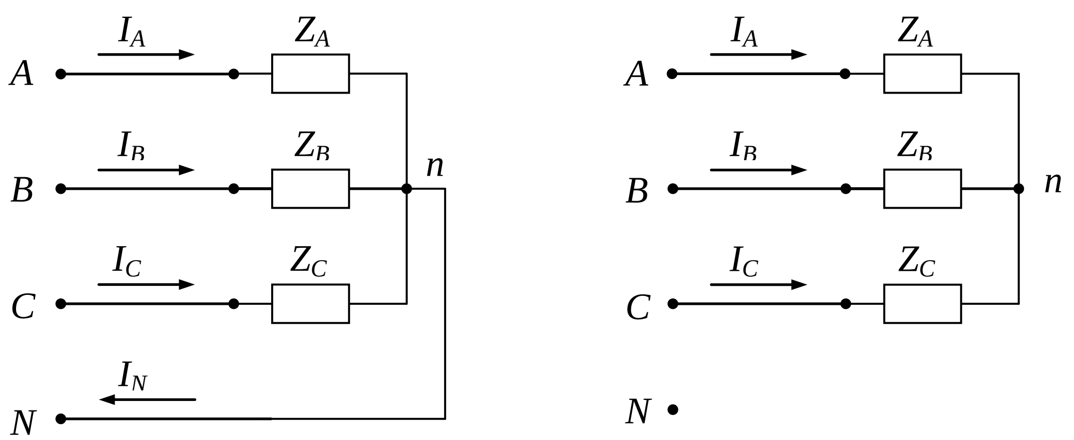
КПД генератора. По этой причине обмотки трехфазных генераторов запрещается соединять по схеме треугольника.

Номинальным напряжением в трехфазной системе называется линейное напряжение. Номинальное напряжение принято выражать в киловольтах (кВ). Шкала номинальных трехфазных напряжений, применяемых на практике, имеет вид: 0,4; 1,1; 3,5; 6,3; 10,5; 22; 35; 63; 110; 220; 330; 500; 750. На потребительском уровне номинальное трехфазное напряжение может указываться в виде отношения $U_{Л} / U_{Ф}$, например: $U_{Л} / U_{Ф}$ = 380 / 220 В.

5. Способы соединения фаз трехфазных приемников

Приемники трехфазного тока могут подключаться к генератору по двум схемам – звезды ($\perp$) и треугольника (Δ). Как известно, на выходе трехфазного генератора получаются два напряжение (линейное и фазное), отличающиеся в $U_{л}/U_{ф} = \sqrt{3}$ раз. С другой стороны каждый приёмник энергии рассчитан на работу при определенном напряжении, которое называется номинальным. Схема соединения фаз приемника должна обеспечить подключение его фаз номинальное фазное напряжение. Таким образом, выбор схемы соединения фаз трехфазного приемника зависит от соотношения номинальных напряжений приемника и генератора (сети).

Схема звезды применяется в том случае, если номинальное напряжение приемника соответствует (равно) фазному напряжению генератора. При соединении в звезду концы фаз приемника объединяются в одну точку “*n*”, называемую нулевой или нейтральной, а начала фаз подключаются к линейным выводам трехфазного генератора *A, B, C* линейными проводами. Если нулевая точка приемника “*n*” соединена с нулевой точкой генератора “*N*” нулевым проводом, то схема получила название звезды с нулевым проводом (рис. 93, *а*). При отсутствии нулевого провода схема носит название звезды без нулевого провода (рис. 93, *б*).



а *б*

Рис. 93

Токи, протекающие в линейных проводах по направлению от генератора к приемнику, называются линейными.

Токи, протекающие в фазах приемника по направлению от начал к концам, называются фазными. В схеме звезды фазы приемника включены последовательно с линейными проводами и по ним протекают одни и те же токи ($\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$). Поэтому для схемы звезды понятия линейные и фазные токи тождественны: $I_Л = I_Ф$.

Ток, протекающий в нулевом проводе от приемника к генератору, называется нулевым или нейтральным ($\underline{I}_N$).

Напряжения между началами и концами фаз приемника называются фазными ($\underline{U}_{An}$, $\underline{U}_{Bn}$, $\underline{U}_{Cn}$), а напряжения между началами фаз – линейными ($\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$, $\underline{U}_{CA}$). Линейные напряжения приемника и генератора тождественно равны.

В схеме звезды с нулевым проводом (рис. 91, *а*) к каждой фазе приемника подводится непосредственно фазное напряжение генератора ($\underline{U}_{AN}$ = = $\underline{U}_{An}$ = $\underline{U}_A$, $\underline{U}_{BN}$ = $\underline{U}_{Bn}$ = $\underline{U}_B$, $\underline{U}_{CN}$ = $\underline{U}_{Cn}$ = $\underline{U}_C$), каждая из фаз при этом работает независимо друг от друга, а линейные (фазные) токи определяются по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C}.$$

Ток в нулевом проводе в соответствии с первым законом Кирхгофа равен геометрической сумме линейных (фазных) токов:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C.$$

При симметричной нагрузке $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = Z_Ф e^{j\varphi}$ ток в нулевом проводе $\underline{I}_N = 0$ и, следовательно, надобность в нулевом проводе отпадает. Симметричные трехфазные приемники (например, трехфазные электродвигатели) включаются по схеме звезды без нулевого провода.

При несимметричной нагрузке относительная величина тока в нулевом проводе зависит от характера и степени не симметрии фазных токов. Как правило, трехфазные приёмники стремятся спроектировать по возможности близкими к симметричным, поэтому ток в нулевом проводе в реальных условиях значительно меньше линейных (фазных) токов.

Пример. Исходные данные: $U_Л$ / $U_Ф$ = 380 / 220 В, $\underline{Z}_A$= 100e^{j35} Ом, $\underline{Z}_B$ = = 110e^{j20} Ом, $\underline{Z}_C$ = 140e^{j35} Ом. Определить линейные (фазные) токи $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$ и ток в нулевом проводе $\underline{I}_N$.

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220e^{j0}}{100e^{j35}} = 2{,}20e^{-j35} \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{220e^{-j120}}{110e^{j20}} = 2{,}00e^{-j140}\,\text{А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{220e^{j120}}{140e^{j35}} = 1{,}57e^{j85}\,\text{А},$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 2{,}20e^{-j35} + 2{,}00e^{-j140} + 1{,}57e^{j85} = 1{,}06e^{-j67{,}5}\ \text{А}.$$

Векторная диаграмма токов и напряжений показана на рис. 94.

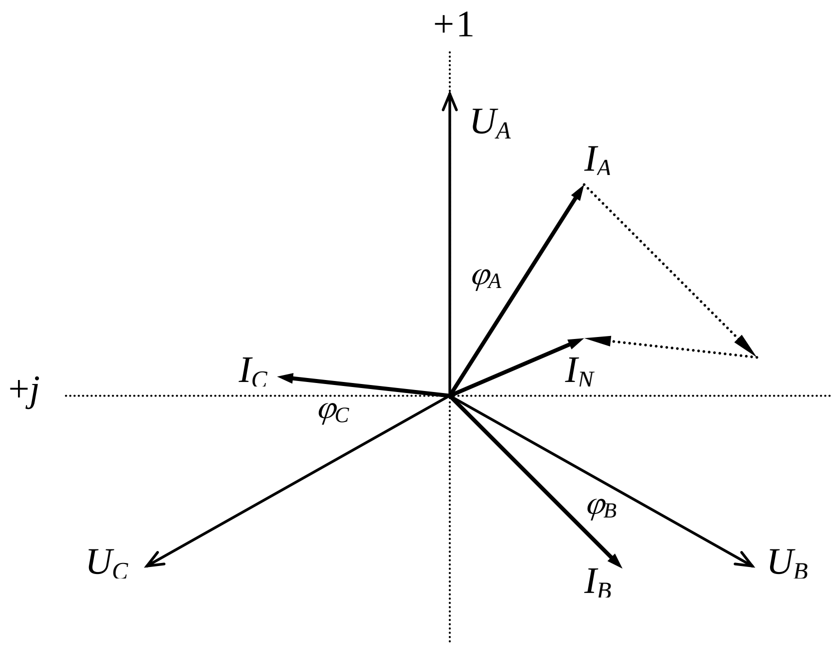


Рис. 94

В схеме звезды без нулевого провода (рис. 93, *б*) при любой нагрузке фаз должно выполняться условие первого закона Кирхгофа:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

Из уравнения следует вывод, что изменение одного из токов влечет изменение двух других токов, то есть отдельные фазы работают в зависимом друг от друга режиме. При несимметричной нагрузке потенциал нулевой точки приемника $\underline{U}_n$ становится не равным нулю, он “смещается” на комплексной плоскости с нулевого положения, при этом фазные напряжения приемника ($\underline{U}_{An}, \underline{U}_{Bn}, \underline{U}_{Cn}$) не равны соответствующим фазным напряжениям генератора ($\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$), происходит так называемый перекос фазных напряжений приемника (рис. 95).

Расчет токов и напряжений в схеме звезды без нулевого провода выполняется в следующей последовательности.

Определяется напряжение (потенциал) нейтральной точки приемника по методу двух узлов:

$$\underline{U}_n = \frac{\underline{U}_A/\underline{Z}_A + \underline{U}_B/\underline{Z}_B + \underline{U}_C/\underline{Z}_C}{1/\underline{Z}_A + 1/\underline{Z}_B + 1/\underline{Z}_C + 1/\underline{Z}_N},$$

где $\underline{Z}_N$ – комплексное сопротивление нулевого провода, при его отсутствии $\underline{Z}_N=\infty$.

Фазные напряжения приемника определяются как разности потенциалов соответствующих точек:

$$\underline{U}_{An} = \underline{U}_A - \underline{U}_n, \quad \underline{U}_{Bn} = \underline{U}_B - \underline{U}_n, \quad \underline{U}_{Cn} = \underline{U}_C - \underline{U}_n.$$

Фазные токи приемника определяются по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{An}}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{Bn}}{\underline{Z}_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{Cn}}{\underline{Z}_C}$$

Комплексные мощности фаз приемника:

$$\underline{S}_A = P_A + jQ_A = \underline{U}_{An} \cdot \underline{I}_A^{\,*}, \quad \underline{S}_B = P_B + jQ_B = \underline{U}_{Bn} \cdot \underline{I}_B^{\,*},$$
$$\underline{S}_C = P_C + jQ_C = \underline{U}_{Cn} \cdot \underline{I}_C^{\,*}.$$

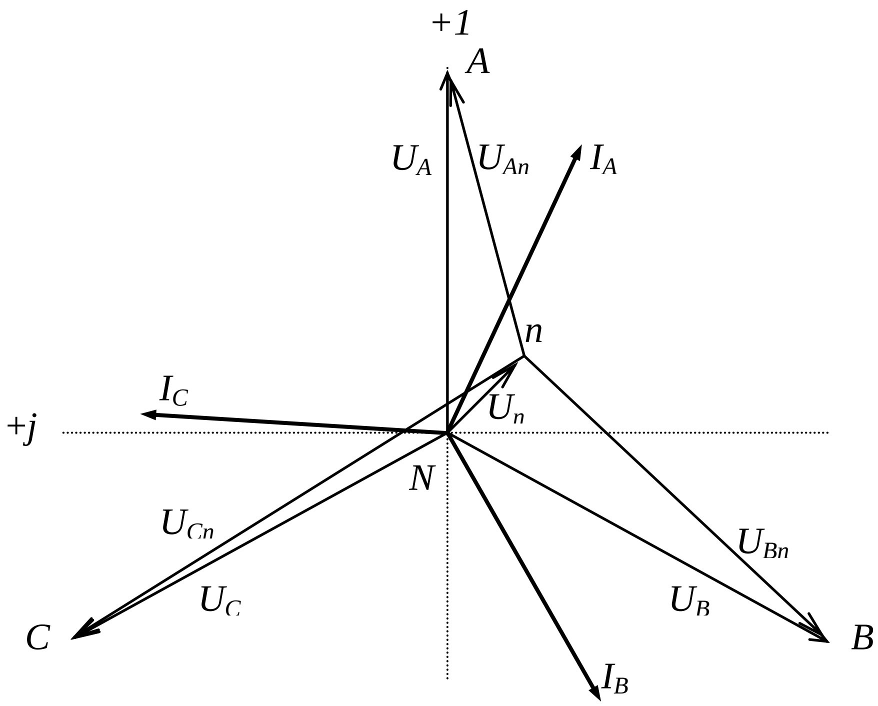


Рис. 95

Режим работы приемника с перекосом фазных напряжений является ненормальным и может привести его к выходу из строя. По этой причине несимметричную трехфазную нагрузку запрещается включать по схеме звезды без нулевого провода (например, осветительную нагрузку).

Схема треугольника применяется в том случае, если номинальное фазное напряжение приемника соответствует (равно) линейному напряжению генератора. При соединении в треугольник конец каждой фазы соединяется с началом последующей, а точки соединения (вершины треугольника) подключаются к линейным выводам трехфазного генератора *A*, *B*, *C* линейными проводами (рис. 96).

Токи, протекающие в фазах приемника по направлению от их начал к концам, называются фазными ($\underline{I}_{AB}, \underline{I}_{BC}, \underline{I}_{CA}$). Токи, протекающие в линейных проводах по направлению от генератора к приемнику, называются линейными ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$).

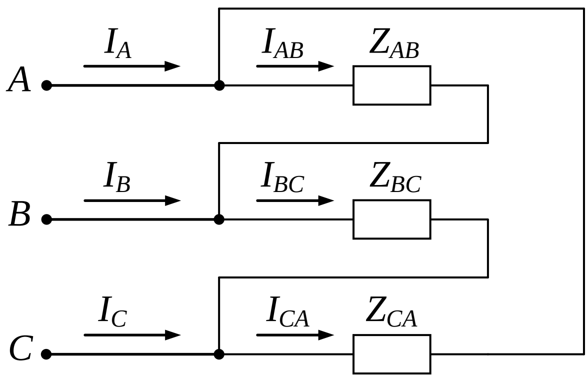


Рис. 96

В схеме треугольника фазные и линейные напряжения приемника тождественно равны ($\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$). В этой схеме к каждой фазе приемника подводится непосредственно линейное напряжение генератора, при этом отдельные фазы работают независимо друг от друга. Фазные токи определяются по закону Ома:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \quad \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CB}}.$$

Линейные токи определяются из уравнений первого закона Кирхгофа для вершин треугольника, они равны геометрической разности фазных токов:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}.$$

В симметричном режиме ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = Z_Ф e^{j\varphi}$) фазные и линейные токи симметричны, при этом отношение их модулей составляет $I_Л / I_Ф = \sqrt{3}$.

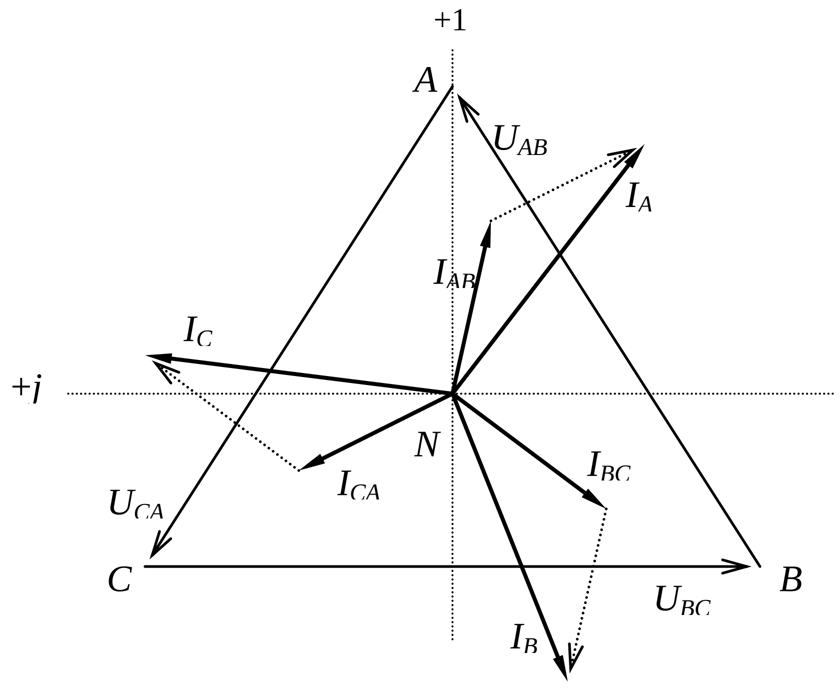


Рис. 97

При несимметричной нагрузке соотношение между линейными и фазными токами определяется уравнениями первого закона Кирхгофа.

На рис. 95 показана векторная диаграмма токов и напряжений для произвольной трехфазной цепи при соединении фаз в треугольник.

Примечание: примеры расчета трехфазных цепей см. в Л.17 (задача 3).

6. Расчет сложных трехфазных цепей

Сложная трехфазная цепь, например, объединенная энергосистема, может содержать большое число трехфазных генераторов, линий электропередачи, приемников трехфазной энергии. Схема такой цепи представляет собой типичный пример сложной цепи переменного тока. Установившейся режим в такой схеме может быть описан системой алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, составленных по одному из методов расчета сложных цепей (метод законов Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов). Наиболее рациональным методом расчета таких трехфазных цепей является метод узловых потенциалов, при этом составление уравнений и их решение производится в матричной форме.

В более простых случаях возможно применение любых методов расчета, позволяющих получить экономичное решение задачи. На рис. 98 представлена схема параллельного подключения нескольких трехфазных приемников с различными схемами соединения фаз к одному генератору. В представленной схеме расчет фазных и линейных токов каждого из приемников может выполняться индивидуально и независимо друг от друга, а линейные токи источника определяются как геометрические суммы токов всех приемников, например, $\underline{I}_A = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A3}$.

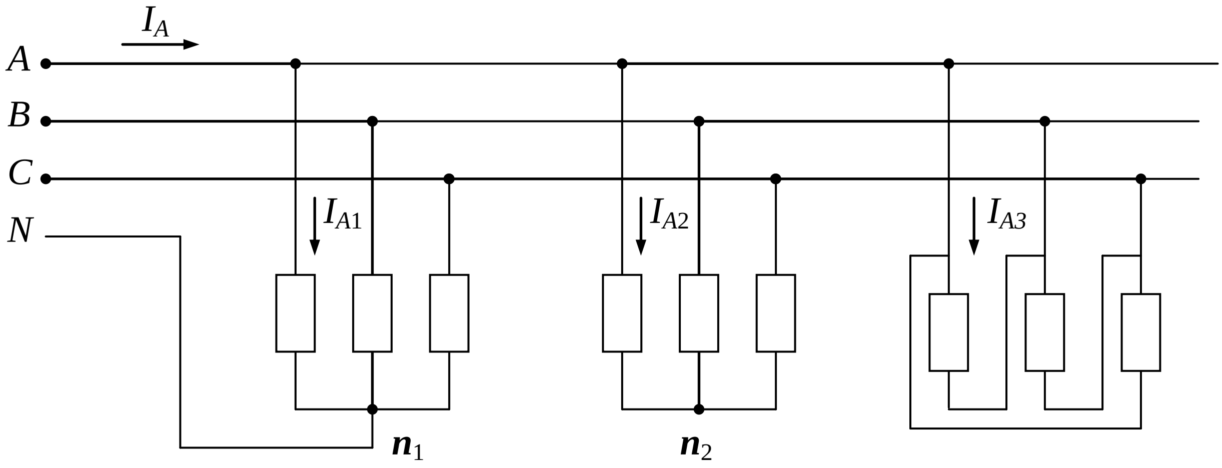


Рис. 98

Как известно, объединенная трехфазная энергосистема работает в режиме, близком к симметричному. В симметричном режиме токи и напряжения смежных фаз отличаются только углом сдвига на ±120°. Расчет токов и напряжений в установившемся симметричном режиме производится только для одной из фаз, например для фазы A, при этом трехфазные цепи представляются однофазными эквивалентными схемами. На рис. 97 представлена символьная схема передачи энергии от трехфазного генератора к удаленным приемникам, а на рис. 98 – расчетная однофазная схема для той же цепи. На расчетной схеме рис. 98 каждому звену электропередачи соответствует его стандартная схема замещения.

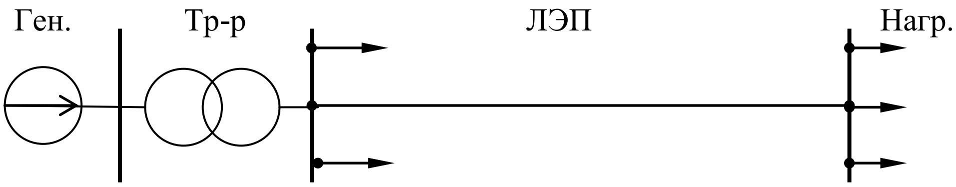


Рис. 99

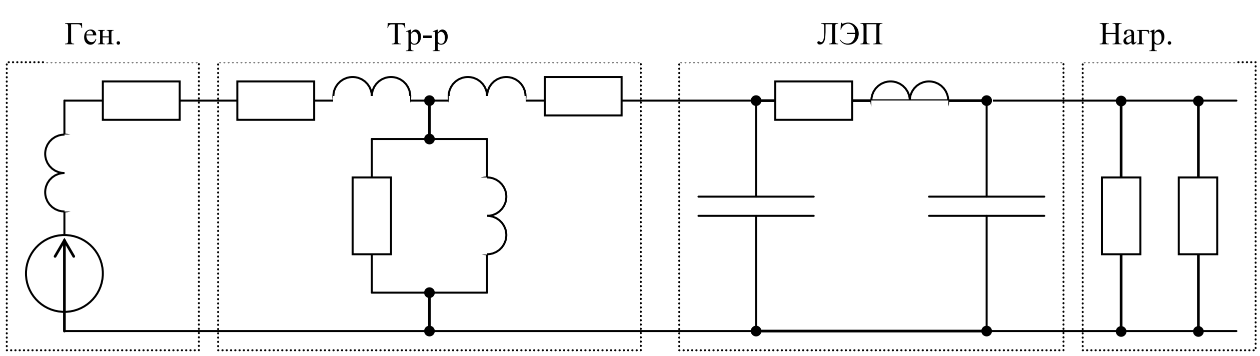


Рис. 100

В результате расчетов определяются токи и напряжения во всех элементах схемы для фазы *A*, например $\underline{I}_A = \underline{I}e^{j\alpha}$. Аналогичные токи и напряжения в фазе *B* определяется умножением соответствующих величин фазы *A* на поворотный множитель e^{-j120°, а для фазы *C* – на множитель e^{j120°, например:

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A \cdot e^{-j120} = I \cdot e^{j(\alpha-120)},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_A \cdot e^{+j120} = I \cdot e^{j(\alpha+120)}.$$

7. Мощность трехфазной цепи и способы ее измерения

Активная и реактивная мощности трехфазной цепи, как для любой сложной цепи, равны суммам соответствующих мощностей отдельных фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos\varphi_A + U_B I_B \cos\varphi_B + U_C I_C \cos\varphi_C,$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A I_A \sin\varphi_A + U_B I_B \sin\varphi_B + U_C I_C \sin\varphi_C,$$

где $I_A, U_A, I_B, U_B, I_C, U_C$ – фазные значения токов и напряжений.

В симметричном режиме мощности отдельных фаз равны, а мощность всей цепи может быть получена путем умножения фазных мощностей на число фаз:

$$P = 3P_ф = 3U_ф I_ф \cos\varphi,$$

$$Q = 3Q_ф = 3U_ф I_ф \sin\varphi,$$

$$S = 3S_ф = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3U_ф I_ф.$$

В полученных выражениях заменим фазные величины на линейные. Для схемы звезды верны соотношения $U_ф = U_л / \sqrt{3}$; $I_ф = I_л$, тогда получим:

$$P = 3 \cdot U_ф \cdot I_ф \cdot \cos\varphi = \left(3 \cdot U_л \cdot I_л / \sqrt{3}\right) \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_л \cdot I_л \cdot \cos\varphi.$$

Для схемы треугольника верны соотношения: $U_ф = U_л$; $I_ф = I_л / \sqrt{3}$, тогда получим:

$$P = 3 \cdot U_ф \cdot I_ф \cdot \cos\varphi = \left(3 \cdot U_л \cdot I_л / \sqrt{3}\right) \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_л \cdot I_л \cdot \cos\varphi$$

Следовательно, независимо от схемы соединения (звезда или треугольник) для симметричной трехфазной цепи формулы для мощностей имеют одинаковый вид:

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi \qquad [\text{Вт}],$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin\varphi \qquad [\text{вар}],$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ [ВА]}.$$

В приведенных формулах для мощностей трехфазной цепи подразумеваются линейные значения величин U и I, но индексы при их обозначениях не ставятся.

Активная мощность в электрической цепи измеряется прибором, называемым ваттметром, показания которого определяется по формуле: $W = U_W \cdot I_W \cdot \cos(\underline{U}_W \hat{\ } \underline{I}_W) = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_W \cdot \underline{I}_W^{\,*}\right]$, где $\underline{U}_w$, $\underline{I}_w$ – векторы напряжения и тока, подведенные к обмоткам прибора.

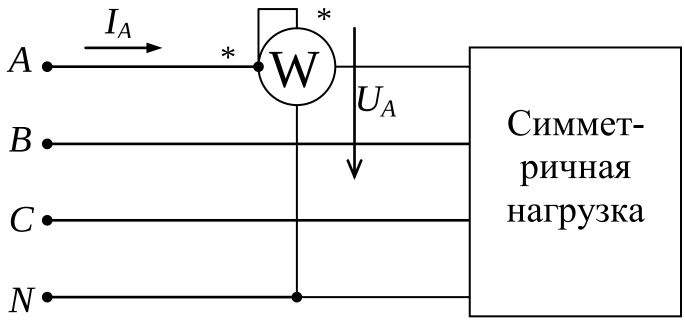


Рис. 101

Для измерения активной мощности всей трехфазной цепи в зависимости от схемы соединения фаз нагрузки и ее характера применяются различные схемы включения измерительных приборов.

Для измерения активной мощности симметричной трехфазной цепи применяется схема с одним ваттметром, который включается в одну из фаз и измеряет активную мощность только этой фазы (рис. 99). Активная мощность всей цепи получается путем умножения показания ваттметра на число фаз: $P = 3 \cdot W = 3 \cdot U_ф \cdot I_ф \cdot \cos\varphi$. Схема с одним ваттметром может быть использована только для ориентированной оценки мощности и неприменима для точных и коммерческих измерений.

Для измерения активной мощности в четырехпроводных трехфазных цепях (при наличии нулевого провода) применяется схема с тремя приборами (рис. 102), в которой производится измерение активной мощности каждой фазы в отдельности, а мощность всей цепи определяется как сумма показаний трех ваттметров:

$$P = W_1 + W_2 + W_3 = U_A \cdot I_A \cdot \cos\varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \cos\varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \cos\varphi_C .$$

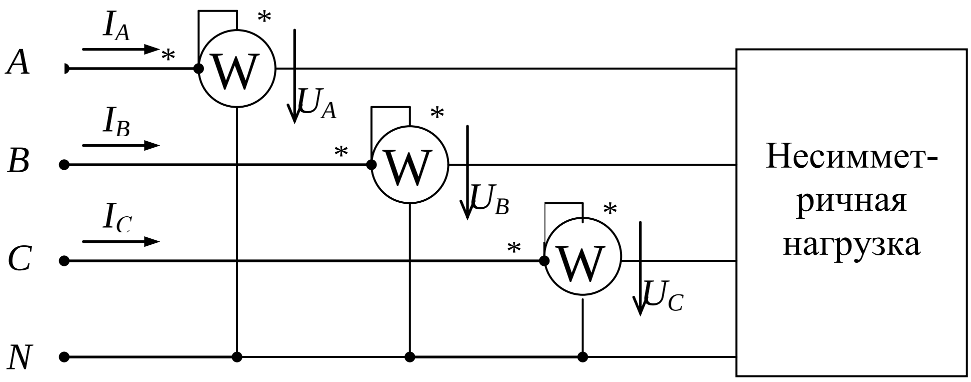


Рис. 102

Для измерения активной мощности в трехпроводных трехфазных цепях (при отсутствии нулевого провода) применяется схема с двумя приборами (рис. 101).

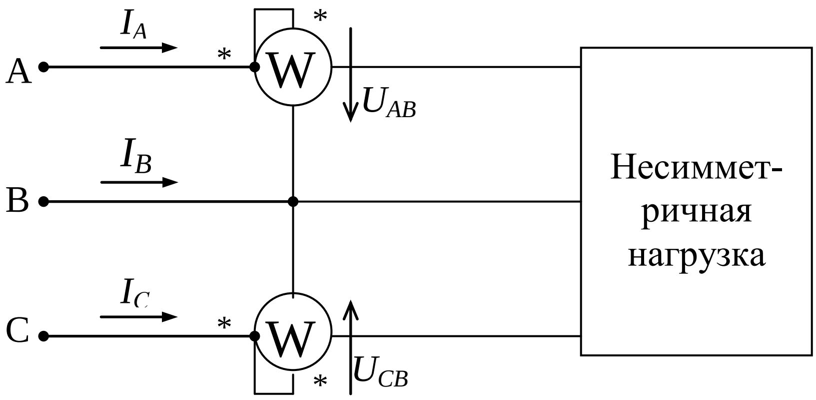


Рис. 103

При отсутствии нулевого провода линейные (фазные) ток связаны между собой уравнением 1-го закона Кирхгофа: $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$. Сумма показаний двух ваттметров равна:

$$W_1 + W_2 = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_A^*\right] + \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{CB} \cdot \underline{I}_C^*\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\underline{U}_A - \underline{U}_B\right) \cdot \underline{I}_A^* + \left(\underline{U}_C - \underline{U}_B\right) \cdot \underline{I}_C^*\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \cdot \left(-\underline{I}_A^* - \underline{I}_C^*\right) + \underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^*\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^*\right] + \mathrm{Re}\left[\underline{U}_B \cdot \underline{I}_B^*\right] + \mathrm{Re}\left[\underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^*\right] =$$

$$= P_A + P_B + P_C = P$$

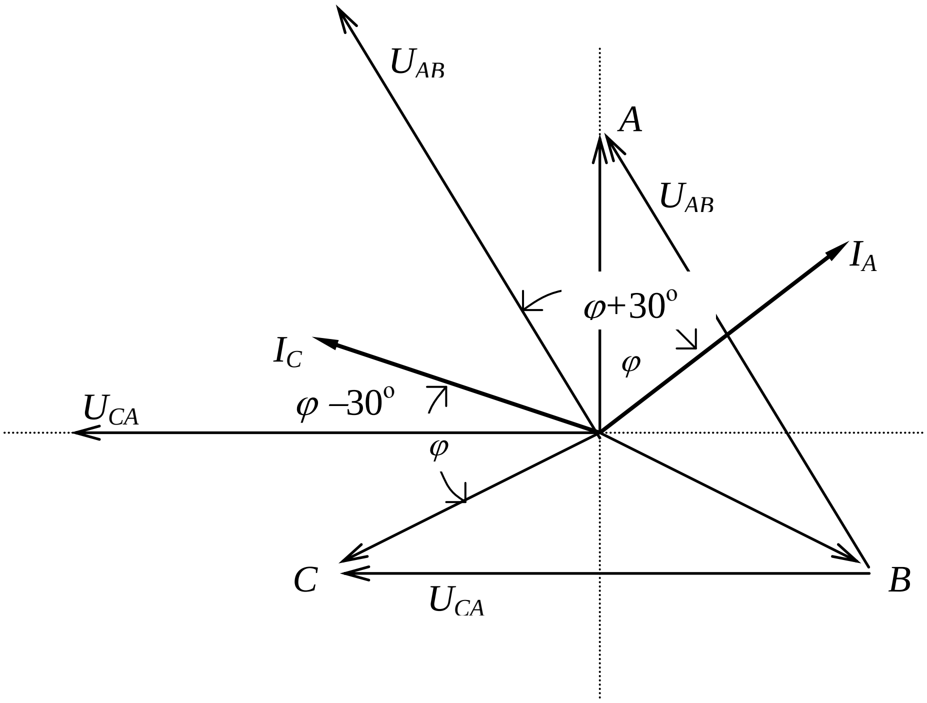


Рис. 104

Таким образом, сумма показаний двух ваттметров равна активной трехфазной мощности, при этом показание каждого прибора в отдельности зависит не только величины нагрузки но и от ее характера.

На рис. 104 показана векторная диаграмма токов и напряжений для симметричной нагрузки. Из диаграммы следует, что показания отдельных ваттметров могут быть определены по формулам:

$$W_1 = U_л \cdot I_л \cdot \cos\left(\varphi + 30^0\right),$$

$$W_2 = U_л \cdot I_л \cdot \cos\left(\varphi - 30^0\right).$$

Анализ полученных выражений позволяет сделать следующие выводы. При активной нагрузке (φ = 0), показания ваттметров равны ($W_1 = W_2$).

При активно-индуктивной нагрузке(0 ≤ φ ≤ 90°) показание первого ваттметра меньше, чем второго ($W_1 < W_2$), а при φ > 60° показание первого ваттметра становится отрицательным ($W_1 < 0$).

При активно-емкостной нагрузке(0 ≥ φ ≥ –90°) показание второго ваттметра меньше, чем первого ($W_1 > W_2$), а при φ < –60° показание второго ваттметра становится отрицательным.

8. Вращающееся магнитное поле

Одним из важнейших достоинств трехфазной системы является возможность получения с ее помощью кругового вращающегося магнитного поля, которое лежит в основе работы трехфазных машин (генераторов и двигателей).

Для получения кругового вращающегося магнитного поля необходимо и достаточно выполнить два условия. Условие первое: необходимо $3p$ одинаковых катушки (p =1, 2, 3,….) расположить в пространстве так, чтобы их оси были расположены в одной плоскости и сдвинуты взаимно на равные углы $\Delta\alpha = 360°/3p$. Условие второе: необходимо пропустить по катушкам равные по амплитуде и сдвинутые во времени на $\Delta t = T / 3$ или $\Delta\omega t = 360°/3 = 120^{o}$ переменные токи (симметричный трехфазный ток). При соблюдении указанных условий в пространстве вокруг катушек будет создано круговое вращающееся магнитное поле с постоянной амплитудой индукции $B_{\max}$ вдоль его оси и с постоянной угловой скоростью вращения ω_n.

На рис. 103 показано пространственное расположение трех (p = 1) одинаковых катушек под равными углами в 120° согласно первому условию.

По катушкам, по направлению от их начал (A, B, C) к концам (X, Y, Z) протекает симметричный трехфазный ток:

$$i_A = I_m \cdot \sin(\omega t+0),$$
$$i_B = I_m \cdot \sin(\omega t-120°),$$
$$i_C = I_m \cdot \sin(\omega t+120°).$$

Магнитное поле, создаваемое каждой катушкой в отдельности, пропорционально току катушки ($B = k \cdot i$), следовательно магнитные поля отдельных катушек в центре координат образуют симметричную трехфазную систему $B_{(t)}$:

$$B_A = B_m \cdot \sin(\omega t+0),$$
$$B_B = B_m \cdot \sin(\omega t-120°),$$
$$B_C = B_m \cdot \sin(\omega t+120°).$$

Положительные направления магнитных полей каждой катушки (векторов $\underline{B}_A$, $\underline{B}_B$, $\underline{B}_C$) в пространстве определяются по правилу правоходового винта согласно принятым положительным направлениям токов катушек (рис. 105).

Результирующий вектор индукции магнитного поля $\underline{B}$ для любого момента времени может быть найден путем пространственного сложения векторов $\underline{B}_A$, $\underline{B}_B$, $\underline{B}_C$ отдельных катушек. Определим значение результирующего вектора индукции магнитного поля B для нескольких моментов времени ωt = 0°; 30°; 60°. Пространственное сложение векторов $\overline{B}$ выполним графически (рис. 106, *а*, *б*, *в*). Результаты расчета сведены в отдельную таблицу:

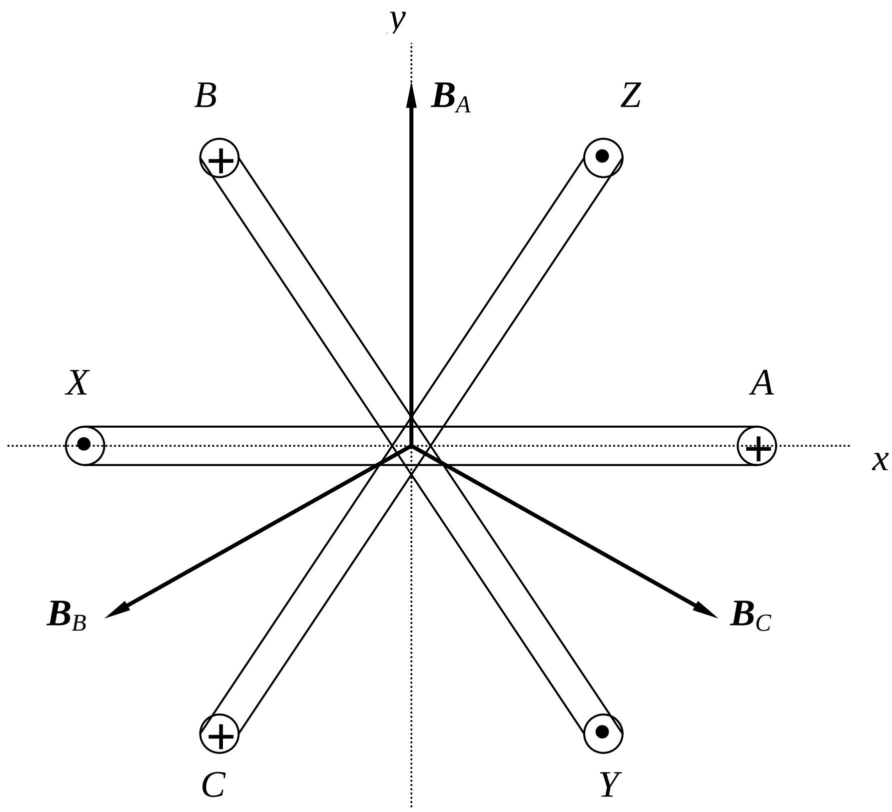


Рис. 105

Таблица

ωt	B_A	B_B	B_C	B	α
0	0	$-\sqrt{3}/2 \cdot B_m$	$\sqrt{3}/2 \cdot B_m$	$3/2 \cdot B_m$	0
30	$1/2 \cdot Bm$	$-B_m$	$1/2 \cdot B_m$	$3/2 \cdot B_m$	30°
60	$\sqrt{3}/2 \cdot Bm$	$-\sqrt{3}/2 \cdot B_m$	0	$3/2 \cdot B_m$	60°

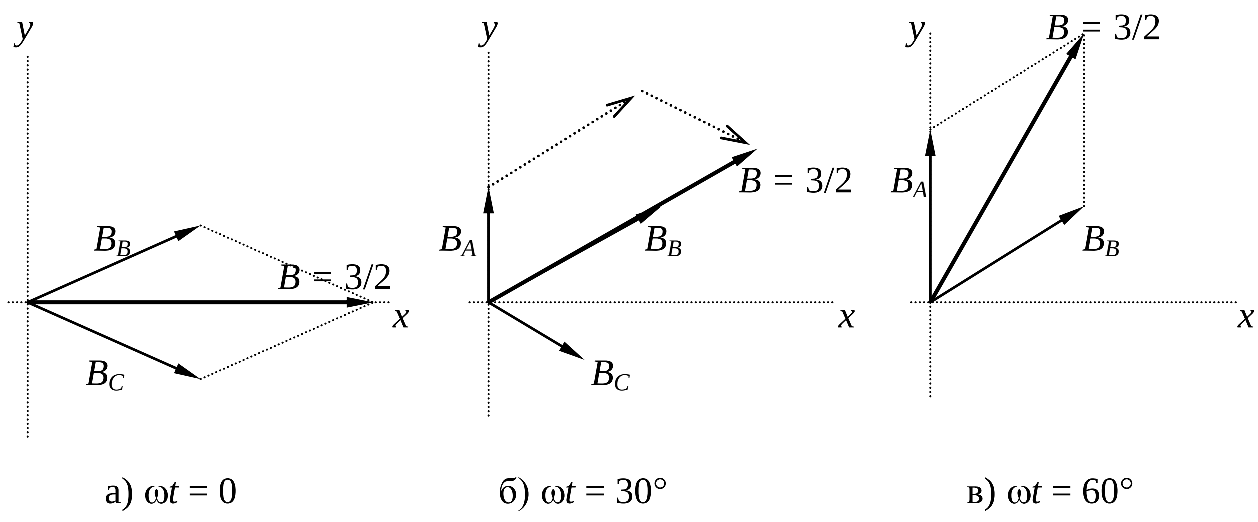
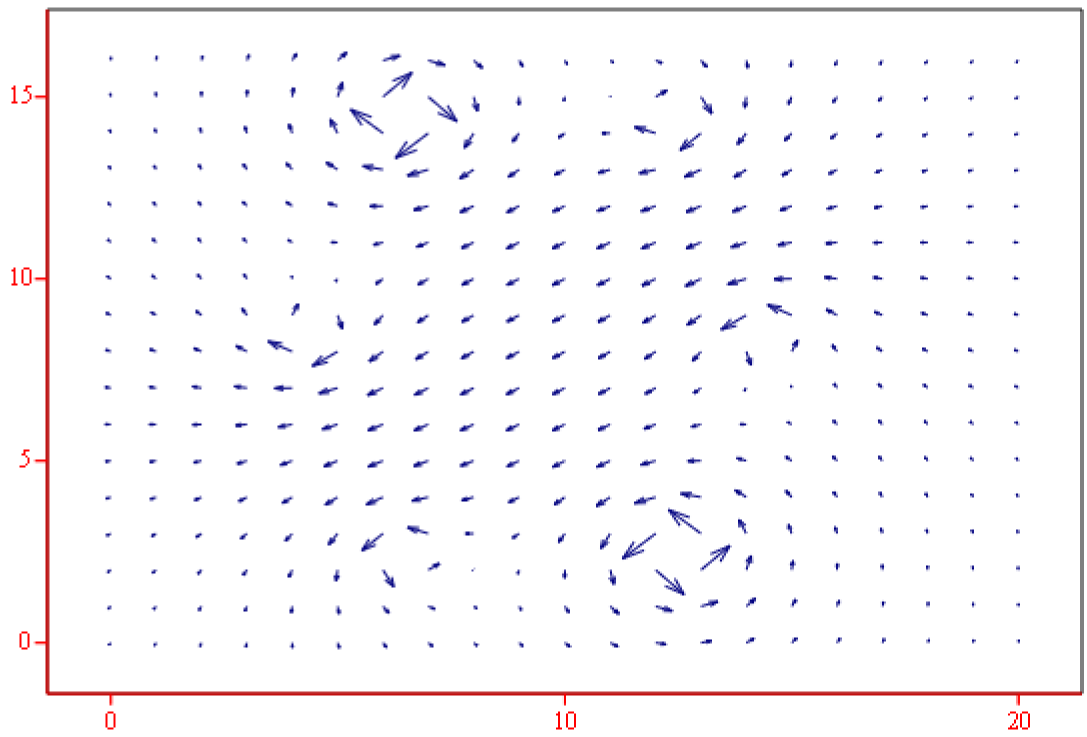


Рис. 106



$(H1, H2)$

Рис. 107

На рис. 107 показана векторно-пространственная картина магнитного поля для одного из моментов времени.

Анализ таблицы показывает, что результирующий вектор индукции магнитного поля $\overline{B}(t, x, y)$ имеет постоянную амплитуду (B_{max} = 3/2·B_m) и равномерно вращается в пространстве в положительную сторону по направлению катушки *A* к катушке *B* с угловой скоростью ω_n , равной угловой частоте тока ω. В общем случае угловая скорость вращения магнитного поля зависит еще и от числа катушек:

$$\omega_n = \frac{\omega}{p} = \frac{2\pi f}{p} \qquad [\text{рад/с}] \text{ или } [\text{с}^{-1}].$$

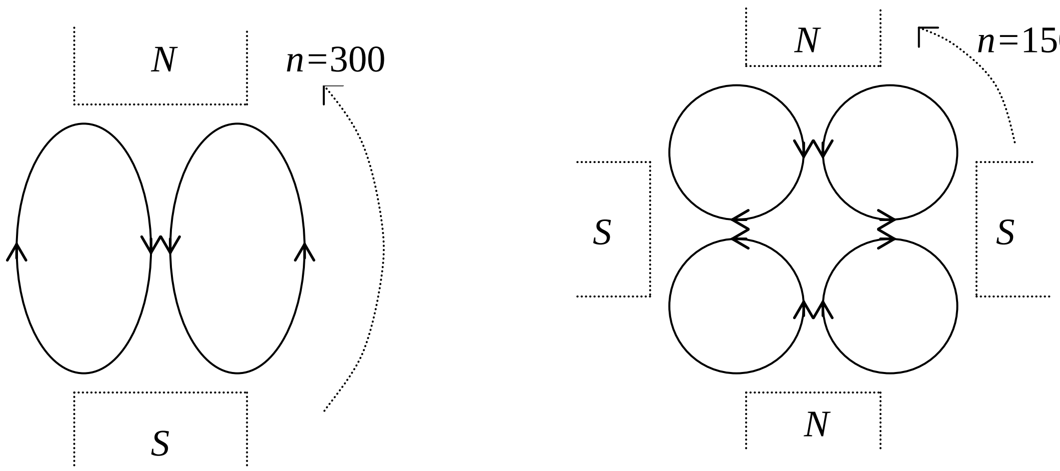
В технике для характеристики вращения магнитного поля пользуются понятием частоты вращения:

$$n = \frac{60 \cdot f}{p} \ [\text{об/мин}].$$

С изменением числа *p* пространственная картина магнитного поля изменяется: при *p* = 1 магнитное поле имеет два полюса (или одну пару полюсов), при *p* = 2 – четыре полюса (или 2 пары полюсов) и т.д. (рис. 105). По этой причине число *p* = 1, 2, 3,… называют числом пар полюсов магнитного поля.

Частоту вращения магнитного поля можно изменять плавно изменением частоты питающего тока f, и ступенчато – изменением числа пар полюсов p. В промышленных условиях оба способа регулирования частоты вращения поля являются технически и экономически малоэффективными. При постоянной частоте промышленного тока f = 50 Гц шкала синхронных частот вращения магнитного поля в функции числа пар полюсов выглядит следующим образом:

p, пар пол.	1	2	3	4	5	6
n, об/мин	3000	1500	1000	750	600	500



а) p = 1

б) p = 2

Рис. 108

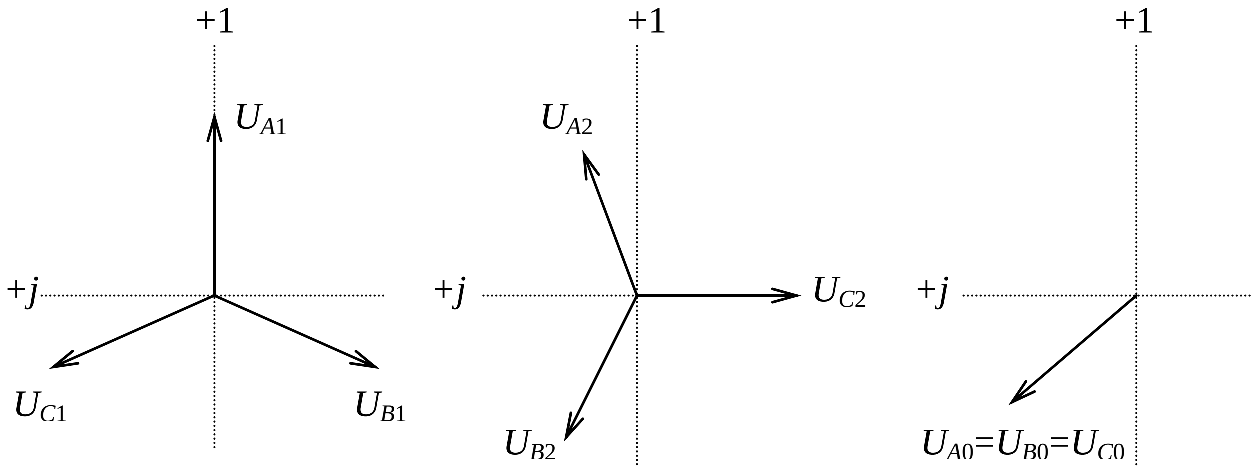
Для изменения направления вращения магнитного поля достаточно изменить порядок следования фаз питающего тока или, попросту, поменять местами две любые фазы источника между собой.

9. Теоретические основы метода симметричных составляющих

Метод симметричных составляющих применяется для расчета трехфазных цепей в несимметричных режимах. Несимметричные режимы в энергосистеме возникают при различных видах коротких замыканий. Расчет токов коротких замыканий – важная инженерная задача в электроэнергетике, которая решается методом симметричных составляющих.

Математически любая несимметричная трехфазная система векторных величин (напряжений, токов и др.) может быть представлена в виде суммы (заменена суммой) из трех симметричных трехфазных систем, а именно: а) системы прямой последовательности с прямым порядком следования фаз $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$; б) системы обратной последовательности с обратным порядком следования фаз $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$; в) системы нулевой последовательности, которая состоит из трех равных векторов, совпадающих по фазе. Отдельные симметричные системы векторов, на которые раскладывается несимметричная система, называются симметричными составляющими. Вектора симметричных составляющих индексируются цифрами: 1 – для прямой последовательности, 2 – для обратной последовательности и 0 – для нулевой последовательности.

На рис. 109 представлены симметричные составляющие некоторой несимметричной трехфазной системы напряжений $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$.



а *б* *в*

Рис. 109

В методе симметричных составляющих для упрощения формы записи уравнений пользуются коэффициентом $a = e^{j120^0}$ (поворотный множитель), умножением на который поворачивают вектор на угол в 120° без изменения его модуля. Свойства поворотного множителя: $a^2 = e^{j240^0} = e^{-j120^0}$, $a^3 = 1$, $a^4 = a$, $1 + a + a^2 = 0$.

Вектора исходной несимметричной системы определяются по принципу наложения как геометрические суммы соответствующих векторов симметричных составляющих:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0},$$
$$\underline{U}_B = \underline{U}_{B1} + \underline{U}_{B2} + \underline{U}_{B0},$$
$$\underline{U}_C = \underline{U}_{C1} + \underline{U}_{C2} + \underline{U}_{C0}.$$

Геометрическое сложение векторов симметричных составляющих согласно этим уравнениям показано на рис. 110.

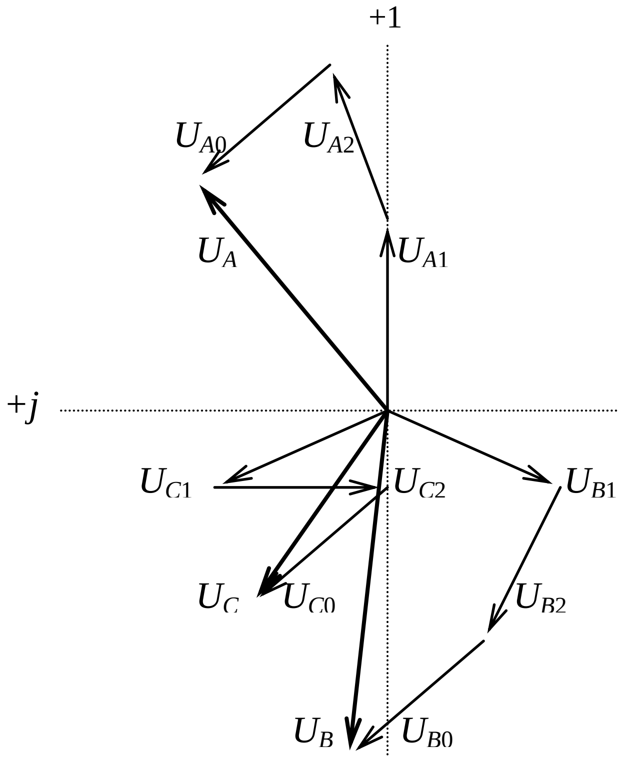


Рис. 110

Используя поворотный множитель “a” и “a^2”, выразим все слагаемые правой части уравнений через симметричные составляющие фазы A:

$$\begin{cases} \underline{U}_A = \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} & (1) \\ \underline{U}_B = a^2 \cdot \underline{U}_{A1} + a \cdot \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} & (2) \\ \underline{U}_C = a \cdot \underline{U}_{A1} + a^2 \cdot \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} & (3) \end{cases}$$

Умножим все члены уравнения (2) на “a”, а все члены уравнения (3) на “a^2”, сложим все три уравнения почленно и получим:

$$\underline{U}_A + a \cdot \underline{U}_B + a^2 \cdot \underline{U}_C = \underline{U}_{A1} \cdot \left(1 + a^3 + a^3\right) + \underline{U}_{A2} \cdot \left(1 + a^2 + a\right) + \underline{U}_{AO} \cdot \left(1 + a + a^2\right) =$$
$$= 3 \cdot \underline{U}_{A1} + 0 \cdot \underline{U}_{A2} + 0 \cdot \underline{U}_{AO} = 3 \cdot \underline{U}_{A1}$$

Из полученного уравнения следует формула для выделения симметричной составляющей прямой последовательности из несимметричной системы векторов:

$$\underline{U}_{A1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\underline{U}_A + a \cdot \underline{U}_B + a^2 \cdot \underline{U}_C\right).$$

Умножим все члены уравнения (2) на “a^2”, а все члены уравнения (3) на “a”, сложим все три уравнения почленно и получим:

$$\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C = \underline{U}_{A1} \cdot \left(1 + a + a^2\right) + \underline{U}_{A2} \cdot \left(1 + a^3 + a^3\right) + \underline{U}_{AO} \cdot \left(1 + a^2 + a\right) =$$
$$= 0 \cdot \underline{U}_{A1} + 3 \cdot \underline{U}_{A2} + 0 \cdot \underline{U}_{AO} = 3 \cdot \underline{U}_{A2}$$

Из полученного уравнения следует формула для выделения симметричной составляющей обратной последовательности из несимметричной системы векторов:

$$\underline{U}_{A2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C\right).$$

Сложим все три уравнения (1), (2) и (3) почленно и получим:

$$\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C = \underline{U}_{A1}(1 + a^2 + a) + \underline{U}_{A2}(1 + a + a^2) + \underline{U}_{A0}(1 + 1 + 1) = 3\underline{U}_{A0}.$$

Из полученного уравнения следует формула для выделения симметричной составляющей нулевой последовательности из несимметричной системы вектор:

$$\underline{U}_{A0} = \frac{1}{3} \cdot \left(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C\right).$$

Полученные формулы применяются на практике для разложения несимметричных трехфазных систем векторов на симметричные составляющие.

Расчет режима симметричной трехфазной нагрузки при несимметричном напряжении

Пусть к симметричному трехфазному приемнику, например электродвигателю, приложена несимметричная система напряжений $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$. Для получения общих закономерностей введем в схему нулевой провод с сопротивлением $\underline{Z}_N$. Схема цепи примет вид (рис. 111):

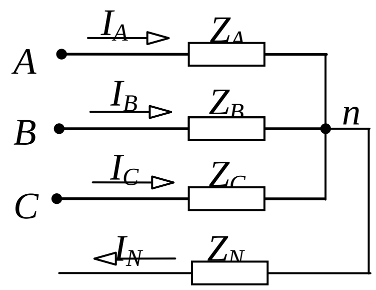


Рис. 111

Разложим несимметричную систему напряжений $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ на симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей:

$$\underline{U}_{A1} = \frac{1}{3}\cdot\left(\underline{U}_A + a\cdot\underline{U}_B + a^2\cdot\underline{U}_C\right),$$

$$\underline{U}_{A2} = \frac{1}{3}\cdot\left(\underline{U}_A + a^2\cdot\underline{U}_B + a\cdot\underline{U}_C\right),$$

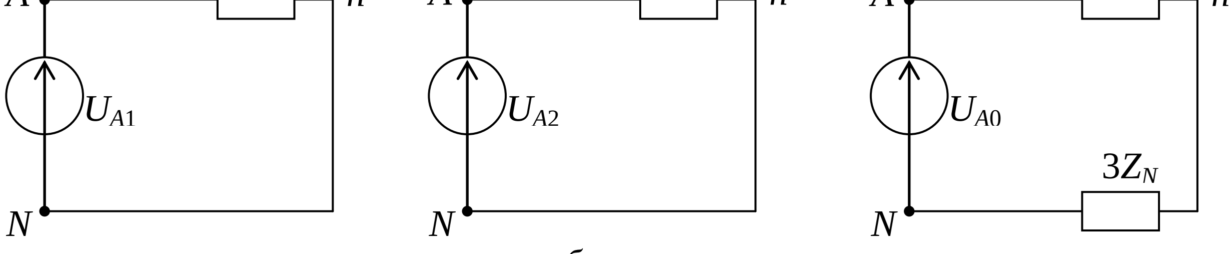
$$\underline{U}_{A0} = \frac{1}{3}\cdot\left(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C\right).$$

Применим к расчету схемы метод наложения и выполним расчет токов отдельно для каждой симметричной составляющей напряжения. Так как для каждой из симметричных составляющих трехфазная схема генератор-приемник полностью симметрична, то расчет режима можно выполнять только для одной фазы *A*, соответственно трехфазную схему следует заменить тремя однофазными отдельно для каждой составляющей (рис. 112, *а*, *б*, *в*). В симметричном режиме для прямой и обратной последовательностей ток в нулевом проводе равен нулю и, следовательно, напряжение $\underline{U}_{nN} = 0$. Это означает, что сопротивление в нейтральном проводе $\underline{Z}_N$ не оказывает влияния на фазные токи и не должно включаться в схемы для этих последовательностей (рис. 112, *а*, *б*). Токи нулевой последовательности во всех фазах совпадают и могут замкнуться только через нулевой провод: $\underline{I}_N = \underline{I}_{A0} + \underline{I}_{B0} + \underline{I}_{C0} = 3\underline{I}_{A0}$. По 2-му закону Кирхгофа для нулевой последовательности (рис. 3) получим:

$$\underline{U}_{A0} = \underline{I}_{A0}\underline{Z}_0 + \underline{I}_N\cdot\underline{Z}_N = \underline{I}_{A0}(\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N)$$

Согласно полученному уравнению схема замещения для нулевой последовательности получит вид (рис. 112, *в*), в которой последовательно с сопротивлением фазы $\underline{Z}_0$ включается утроенное сопротивление нейтрали $3\underline{Z}_N$.

В схемах для отдельных симметричных составляющих (рис. 112, *а*, *б*, *в*) обозначены $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_0$ – комплексные сопротивления фазы приемника для токов соответственно прямой, обратной и нулевой последовательностей. Для приемников с вращающимся магнитным полем эти сопротивления существенно отличаются.



а *б* *в*

Рис. 112

По закону Ома в каждой из схем (рис. 109, *а, б, в*) производится расчет токов прямой, обратной и нулевой последовательностей:

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{I}_{A2} = \frac{\underline{U}_{A2}}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_{A0} = \frac{\underline{U}_{A0}}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N}.$$

Действительные токи в исходной схеме (рис. 108) определяются по методу наложения, как векторные суммы токов прямой, обратной и нулевой последовательностей:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{B0} = a^2 \cdot \underline{I}_{A1} + a \cdot \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{C1} + \underline{I}_{C2} + \underline{I}_{C0} = a \cdot \underline{I}_{A1} + a^2 \cdot \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0}.$$

Комплексные сопротивления фаз статичных трехфазных приемников (осветительная нагрузка, нагревательные приборы и др.) не зависят от вида последовательности, для таких приемников $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_0$. Расчет токов таких приемников может выполняться обычными методами. Для трехфазных приемников, в которых существует вращающееся магнитное поле (электродвигатели, генераторы), сопротивления фаз для токов разных последовательностей существенно отличаются ($\underline{Z}_1 > \underline{Z}_0 > \underline{Z}_2$). Расчет токов таких приемников при несимметричном напряжении должен производиться исключительно методом симметричных составляющих.

11. Расчет токов коротких замыканий в энергосистеме методом симметричных составляющих.

В результате различного вида коротких замыканий в сложной энергосистеме возникает несимметричный режим. Расчет токов коротких замыканий в различных точках энергосистемы является важной инженерной задачей. Также расчеты выполняются методом симметричных составляющих.

В качестве примера рассмотрим определение тока однофазного короткого замыкания на землю в заданной точке простейшей энергосистемы. Символьная схема энергосистемы показана на рис. 110. Короткое замыкание фазы *A* на землю происходит в конце линии электропередачи.

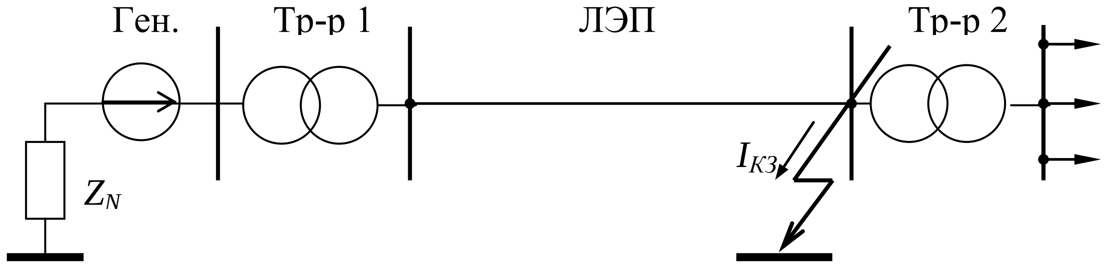


Рис. 113

В соответствии с теоремой о компенсации заменим (мысленно) несимметричный участок в точке короткого замыкания несимметричным трехфазным генератором ($\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$, причем $\underline{U}_A = 0$). Несимметричную систему векторов напряжений разложим (мысленно) на симметричные составляющие $\underline{U}_{A1}$, $\underline{U}_{A2}$, $\underline{U}_{A0}$. Для каждой из симметричных составляющих схема цепи совершенно симметрична и может быть представлена в однофазном виде. Поэтому составляются однофазные схемы для прямой (рис. 114), обратной (рис. 115) и нулевой (рис. 116) последовательностей.

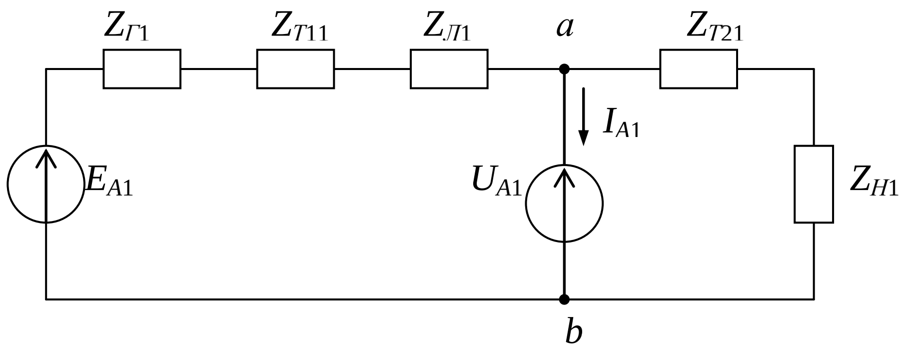


Рис. 114

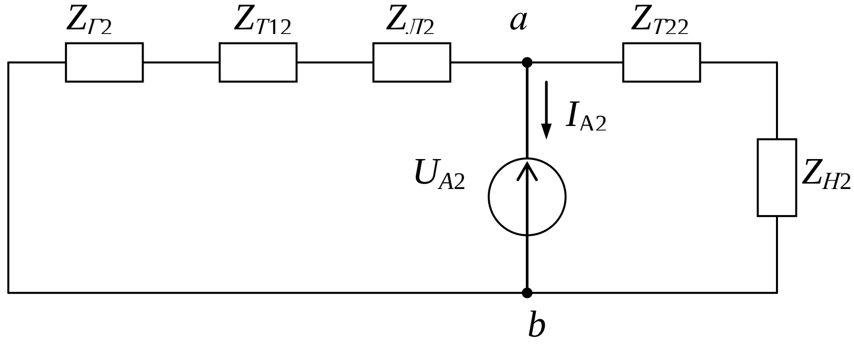


Рис. 115

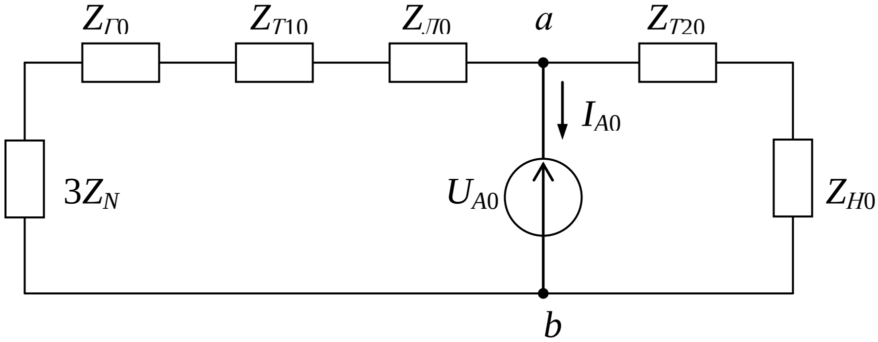
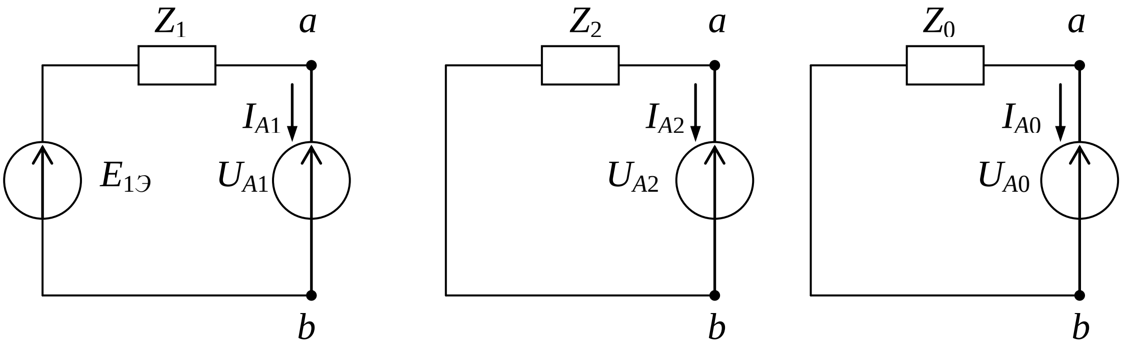


Рис. 116

Далее в соответствии с теоремой об эквивалентном генераторе производится свертка расчетных схем для каждой из симметричных составляющих относительно выводов несимметричного участка *ab*. В результате свертки получаются простейшие одноконтурные схемы (рис. 117, *а*, *б*, *в*):



а *б* *в*

Рис. 117

Для каждой из расчетных схем (рис. 114, *а*, *б*, *в*) составляются уравнения по 2-му закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I}_{A1} \cdot \underline{Z}_1 + \underline{U}_{A1} = \underline{E}_{1Э} & (1) \\ \underline{I}_{A2} \cdot \underline{Z}_2 + \underline{U}_{A2} = 0 & (2) \\ \underline{I}_{A0} \cdot \underline{Z}_0 + \underline{U}_{A0} = 0 & (3) \end{cases}$$

В полученной системе уравнений Кирхгофа содержится 6 неизвестных величин ($\underline{I}_{A1}$, $\underline{I}_{A2}$, $\underline{I}_{A0}$, $\underline{U}_{A1}$, $\underline{U}_{A2}$, $\underline{U}_{A0}$) и ее непосредственное решение невозможно. Поэтому система уравнений Кирхгофа дополняется тремя недостающими уравнениями, вытекающими из вида короткого замыкания. В рассматриваемом примере в точке короткого замыкания напряжение фазы

A равно нулю ($U_A = 0$), а также токи фаз B и C равны нулю ($\underline{I}_B = \underline{I}_C = 0$). Дополнительные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_A = \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} = 0 & (4) \\ \underline{I}_B = a^2 \cdot \underline{I}_{A1} + a \cdot \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = 0 & (5) \\ \underline{I}_C = a \cdot \underline{I}_{A1} + a^2 \cdot \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = 0 & (6) \end{cases}$$

В результате совместного решения системы из 6-и уравнений определяются симметричные составляющие токов $\underline{I}_{A1}$, $\underline{I}_{A2}$, $\underline{I}_{A0}$. В рассматриваемом примере решение системы может быть выполнено в следующей последовательности.

1) Вычитаем почленно из уравнения (5) уравнение (6) и получаем:

$$\left(a^2 - a\right) \cdot \underline{I}_{A1} - \left(a^2 - a\right) \cdot \underline{I}_{A2} = 0,$$ откуда следует, что $\underline{I}_{A1} = \underline{I}_{A2}$.

2) Складываем почленно уравнение (5) и уравнение (6) и с учетом, что $a^2 - a = -1$, получаем:

$$\left(a^2 + a\right) \cdot \underline{I}_{A1} + \left(a^2 + a\right) \cdot \underline{I}_{A2} + 2\underline{I}_{A0} = 0,$$

откуда следует, что $\underline{I}_{A1} = \underline{I}_{A2} = \underline{I}_{A0}$.

3) Складываем почленно уравнения (1), (2), (3) и с учетом уравнения (4) и равенства $\underline{I}_{A1} = \underline{I}_{A2} = \underline{I}_{A0}$ получаем:

$$\underline{I}_{A1} \cdot \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0\right) + \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} = \underline{I}_{A1} \cdot \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0\right) + 0 = \underline{E}_{1Э},$$

откуда следует решение для тока:

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{E}_{1Э}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0)} = \underline{I}_{A2} = \underline{I}_{A0}.$$

Все действительные токи определяются по методу наложения через соответствующие симметричные составляющие, например, ток короткого замыкания равен току фазы A:

$$\underline{I}_{КЗ} = \underline{I}_A = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = 3\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{E}_{1Э}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}.$$

12. Фильтры симметричных составляющих

Фильтрами симметричных составляющих называются технические устройства или схемы, служащие для выделения соответствующих составляющих токов или напряжений из несимметричной трёхфазной системы векторов.

Напряжения и токи, выделяемые фильтрами симметричных составляющих, используются на практике в качестве входных величин для релейной защиты энергетических установок (генераторов, трансформаторов, линий электропередачи) от несимметричных режимов, возникающих в результате коротких замыканий, или для соответствующей сигнализации о несимметричном режиме.

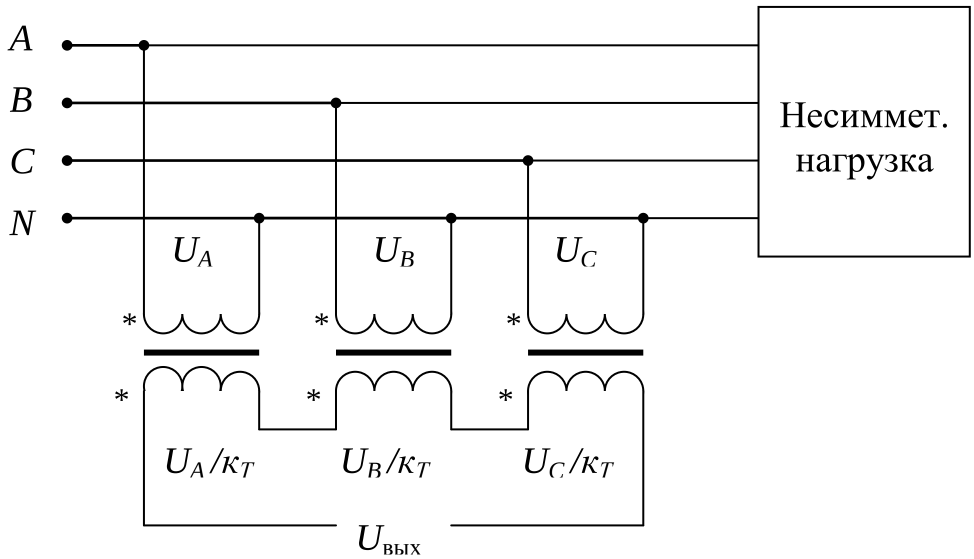


Рис. 118

На рис. 118 представлена схема фильтра напряжения нулевой последовательности. Схема фильтра состоит из 3-х одинаковых трансформаторов с коэффициентом трансформации $k_T = \frac{w_1}{w_2}$. Первичные обмотки трансформаторов включены на фазные напряжения $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ по схеме звезды с нулевой точкой, а вторичные – в открытый треугольник.

Напряжение на выходе фильтра равно векторной сумме вторичных напряжений трансформаторов:

$$\underline{U}_{вых} = \frac{1}{к_T}\underline{U}_A + \frac{1}{к_T}\underline{U}_B + \frac{1}{к_T}\underline{U}_C = \frac{1}{к_T}\left(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C\right)$$

Учитывая, что $\underline{U}_{A0} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C\right)$, получим

$$\underline{U}_{вых} = \frac{3}{к_T}\underline{U}_{A0} = K_{Ф0} \cdot \underline{U}_{A0},$$

где $\kappa_{\Phi 0} = \dfrac{3}{\kappa_T}$ – коэффициент фильтра.

Фильтр напряжений обратной последовательности реализуется схемой рис. 119 при следующих соотношениях между параметрами элементов: $R_1 = R_2$, $\dfrac{R_3}{X_C} = \sqrt{3}$, $\varphi_{BC} = \operatorname{arctg}\dfrac{-X_C}{R_3} = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30^\circ$.

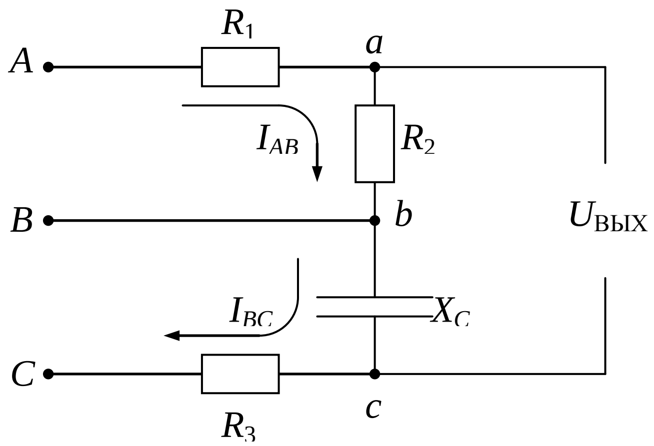


Рис. 119

Напряжение на отдельных участках схемы с учетом заданных соотношений между параметрами элементов:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_{AB} \cdot R_2 = \frac{\underline{U}_{AB} \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}\underline{U}_{AB}$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{I}_{BC} \cdot (-jX_C) = \frac{\underline{U}_{BC}(-jX_C)}{R_3 - jX_C} = \frac{\underline{U}_{BC}}{1 + j\dfrac{R_3}{X_C}} = \frac{\underline{U}_{BC}}{2e^{j60^\circ}} = \frac{1}{2}\underline{U}_{BC} \cdot e^{-j60^\circ}$$

Выходное напряжение фильтра:

$$\underline{U}_{вых} = \underline{U}_{ab} + \underline{U}_{bc} = \frac{1}{2}\left(\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} \cdot e^{-j60^\circ}\right)$$

Преобразуем формулу для напряжения обратной последовательности путем добавления и вычитания члена aU_B:

$$\underline{U}_{A2} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C\right) = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_B - a \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\underline{U}_A + \left(a^2 + a\right) \cdot \underline{U}_B - a \cdot \left(\underline{U}_B - \underline{U}_C\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\left(\underline{U}_A - \underline{U}_B\right) + e^{-j60^\circ} \cdot \left(\underline{U}_B - \underline{U}_C\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} \cdot e^{j60^\circ}\right)$$

Сравнивая полученное уравнение с предыдущим, найдём:

$$\underline{U}_{\text{вых}} = \frac{3}{2}\underline{U}_{A2} = \kappa_{\Phi 2} \cdot \underline{U}_{A2},$$

где $\kappa_{\Phi 2} = \dfrac{3}{2}$ – коэффициент фильтра.

Векторная диаграмма напряжений фильтра показана на рис. 120, *а* – для симметричной системы напряжений обратной последовательности, и на рис. 120, *б* – для симметричной системы напряжений прямой последовательности.

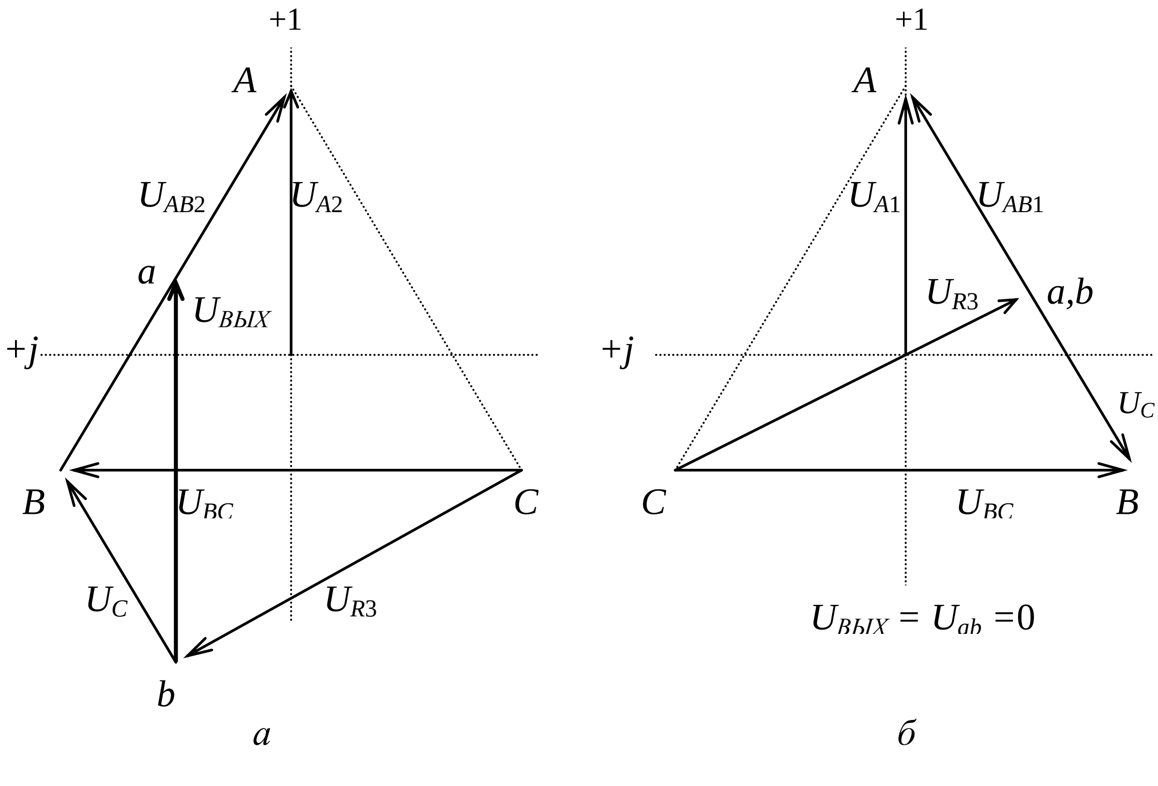


Рис. 120

Так как системы прямой и обратной последовательностей отличаются только порядком следования фаз, то из этого следует, что фильтр, выделяющий напряжение одной из этих последовательностей превращается в аналогичный фильтр для выделения напряжений другой последовательности путем перестановки любых двух фаз местами

Т8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1. Представление периодических несинусоидальных функций *u*(*t*), *i*(*t*) гармоническими рядами Фурье

Как известно, в электроэнергетике в качестве стандартной формы для напряжений и токов принята синусоидальная форма. Однако в реальных условиях формы кривых напряжений и токов могут в той или иной мере отличаться от синусоидальных. Искажения форм кривых этих функций у приемников приводят к дополнительным потерям энергии и снижению их коэффициента полезного действия. Синусоидальность формы кривой напряжения генератора является одним из показателей качества электрической энергии как товара.

Возможны следующие причины искажения формы кривых напряжений и токов в сложной цепи:

1) наличие в электрической цепи нелинейных элементов, параметры которых зависят от мгновенных значений тока и напряжения [$R, L, C = f(u,i)$], (например, выпрямительные устройства, электросварочные агрегаты и т. д.);

2) наличие в электрической цепи параметрических элементов, параметры которых изменяются во времени [$R, L, C = f(t)$];

3) источники электрической энергии (трехфазные генераторы) в силу конструктивных особенностей не могут обеспечить идеальную синусоидальную форму выходного напряжения;

4) влияние в комплексе перечисленных выше факторов.

Нелинейные и параметрические цепи рассматриваются в отдельных главах курса ТОЭ. В настоящей главе исследуется поведение линейных электрических цепей при воздействии на них источников энергии с несинусоидальной формой кривой.

Из курса математики известно, что любая периодическая функция времени, например, $u(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена гармоническим рядом Фурье:

$$u(t) = U_0 + Um_1\sin(\omega t + \alpha_1) + Um_2\sin(2\omega t + \alpha_2) + \ldots = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Um_k \sin(k\omega t + \alpha_k)\,.$$

Здесь U_0 – постоянная составляющая, $Um_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$ – k-я гармоническая составляющая или сокращенно k-я гармоника. 1-я гармоника называется основной, а все последующие – высшими.

Амплитуды отдельных гармоник Um_k не зависят от способа разложения функции $u(t)$ в ряд Фурье, в то же время начальные фазы отдельных гармоник α_k зависят от выбора начала отсчета времени (начала координат).

Отдельные гармоники ряда Фурье можно представить в виде суммы синусной и косинусной составляющих:

$$Um_k \sin(k\omega t + \alpha_k) = Um_k \cdot \cos\alpha_k \cdot \sin k\omega t + Um_k \sin\alpha_k \cdot \cos k\omega t = \\ Us_k \sin k\omega t + Uc_k \cos k\omega t.$$

Тогда весь ряд Фурье получит вид:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Us_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} Uc_k \cos k\omega t.$$

Соотношения между коэффициентами двух форм ряда Фурье имеют вид:

$$Us_k = Um_k \cos\alpha_k; \quad Uc_k = Um_k \sin\alpha_k; \quad Um_k = \sqrt{Us_k{}^2 + Uc_k{}^2}; \quad \alpha_k = \operatorname{arctg}\frac{Uc_k}{Us_k}.$$

Если k-ю гармонику и ее синусную и косинусную составляющие заменить комплексными числами, то соотношение между коэффициентами ряда Фурье можно представить в комплексной форме:

$$Um_k \sin(k\omega t + \alpha_k) = Us_k \sin k\omega t + Uc_k \cos k\omega t \Leftrightarrow Um_k e^{j\alpha_k} = Us_k + jUc_k.$$

Если периодическая несинусоидальная функция времени задана (или может быть выражена) аналитически в виде математического уравнения, то коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам, известным из курса математики:

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot dt, \qquad Us_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cdot\sin(k\omega t)\cdot dt,$$

$$Uc_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cdot\cos(k\omega t)\cdot dt, \qquad \underline{Um}_k = Us_k + jUc_k = Um_k \cdot e^{j\alpha_k}.$$

2. Аппроксимация несинусоидальных функций *u*(*t*) *i*(*t*)

На практике исследуемая несинусоидальная функция $u(t)$ обычно задается в виде графической диаграммы (графически) (рис. 121) или в виде таблицы координат точек (таблично) в интервале одного периода (табл. 1). Чтобы выполнить гармонический анализ такой функции по приведенным выше уравнениям, ее необходимо предварительно заменить математическим выражением. Замена функции, заданной графически или таблично математическим уравнением, получила название аппроксимации функции.

Таблица 1

m	0	1	2	3	…	…	…	…	20
t_m	t_0	t_1	t_2	t_3	…	…	…	…	t_{20}
u_m	u_0	u_1	u_2	u_3	…	…	…	…	u_{20}

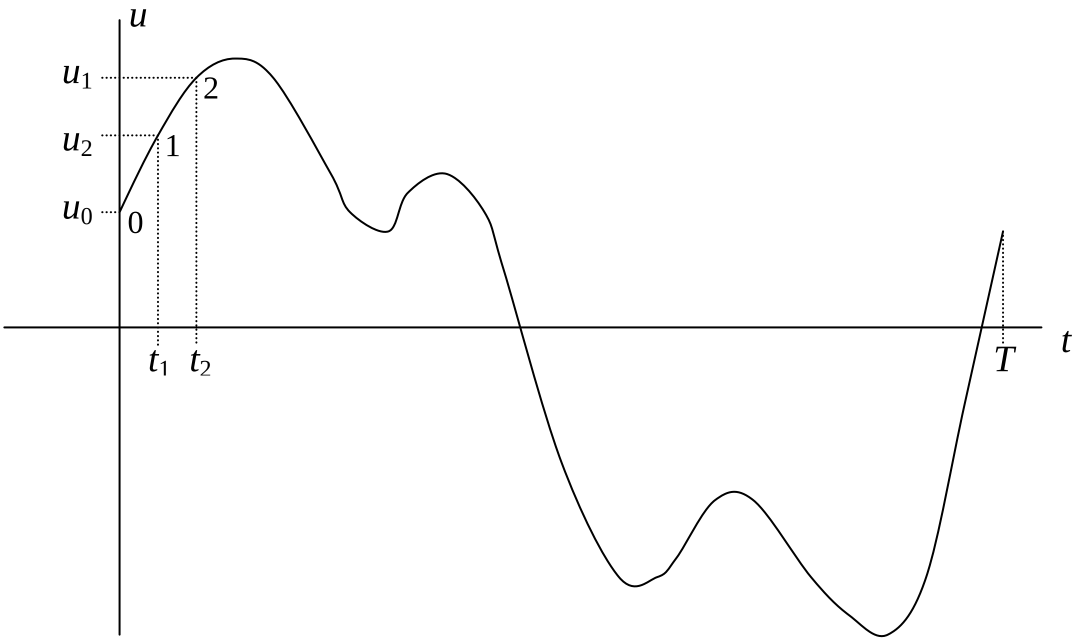


Рис. 121

В настоящее время аппроксимация несинусоидальных функций времени $u(t)$ и их последующий гармонический анализ выполняются, как правило, на ЭВМ. Для математического представления несинусоидальных функций применяется кусочная аппроксимация. Для этого вся функция в интервале одного полного периода разбивается на $M = 20 - 30$ произвольных участков. Далее отдельные участки функции аппроксимируются однотипными уравнениями. Различают следующие виды аппроксимации:

1) кусочно-линейная аппроксимация $u1(t) = a + b \cdot t$ − отдельные участки функции аппроксимируются уравнениями прямой;

2) аппроксимация параболическими сплайнами $u2(t) = a + b \cdot t + c \cdot t^2$ − отдельные участки функции аппроксимируются уравнениями квадратичной параболы;

3) аппроксимация кубическими сплайнами $u3(t) = a + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3$ − отдельные участки функции аппроксимируются уравнениями кубической параболы.

Коэффициенты аппроксимации (a, b, c, ...) определяются для каждого участка функции через координаты его конечных точек, например, для 1-го участка при кусочно-линейнай аппроксимации $u(t) = a + b \cdot t$ получим:

$$a_1 = \frac{u_1 \cdot t_1 - u_2 \cdot t_2}{t_1 - t_1}; \qquad b_1 = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1}.$$

Аппроксимация функции выполняется на ЭВМ по стандартным программам. В MathCAD последовательность операций выглядит так:

1) Координаты точек исследуемой функции представляют в виде столбцовых матриц:

$$tn := [t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \; t_{20}]^T,$$

$$un := [u_0 \quad u_1 \quad u_2 \; u_3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \; u_{20}]^T.$$

2) Для кусочно-линейнай аппроксимации применяют функцию линейной интерполяции:

$$u1(t) := \mathrm{linterp}(tn, un, t).$$

3) При аппроксимации параболическими или кубическими сплайнами предварительно формируют соответствующие сплайны:

$ps := \mathrm{pspline}(tn, un)$ − параболический сплайн,

$cs := \mathrm{cspline}(tn, un)$ − кубический сплайн.

Далее формируют уравнения аппроксимации:

$u2(t) := \mathrm{interp}(ps, tn, un, t)$, $\qquad u3(t) := \mathrm{interp}(cs, tn, un, t)$.

Следует заметить, что наилучшее качество аппроксимации достигается при аппроксимации кубическими сплайнами.

После проведения процедуры аппроксимации над исследуемой функцией $u(t)$ можно осуществлять любые математические операции.

3. Разложение периодических несинусоидальных функций $u(t)$, $i(t)$ в гармонический ряд Фурье

После выполнения процедуры аппроксимации и получения математичекой формы исследуемой функции $u(t)$ гармонический анализ выполняется по классическим формулам математики. Вначале определяется постоянная составляющая: $U_0 := \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \cdot dt$.

Устанавливается желаемое количество гармонических составляющих $k := 1..\, M$, где M − номер последней гармоники. Определяются амплитуды синусных и косинусных составляющих отдельных гармоник:

$$Us_k := \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cdot\sin(k\omega t)\cdot dt, \qquad Uc_k := \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cdot\cos(k\omega t)\cdot dt.$$

Амплитуды и начальные фазы отдельных гармоник определяются в комплексной форме: $\underline{Um}_k := Us_k + jUc_k$, откуда следует

$$Um_k := \left|\underline{Um}_k\right|, \quad \alpha_k := \arg(\underline{Um}_k).$$

Выражение исследуемой функции $u(t)$ в виде гармонического ряда получит окончательный вид:

$$u(t) := U_0 + \sum_{k=1}^{k=M} Us_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{k=M} Uc_k \cos k\omega t = U_0 + \sum_{k=1}^{k=M} Um_k \sin(k\omega t + \alpha_\kappa).$$

<u>Примечание</u>: пример разложения несинусоидальной функции $u(t)$ в гармонический ряд Фурье см. в Л.17 (задача 2в).

3. Виды симметрии периодических функций

Различают следующие виды симметрии периодических несинусоидальных функций.

1) <u>Нечетная симметрия</u>: функция симметрична относительно начала координат и удовлетворяет условию $u(t) = -u(-t)$ (рис. 122).

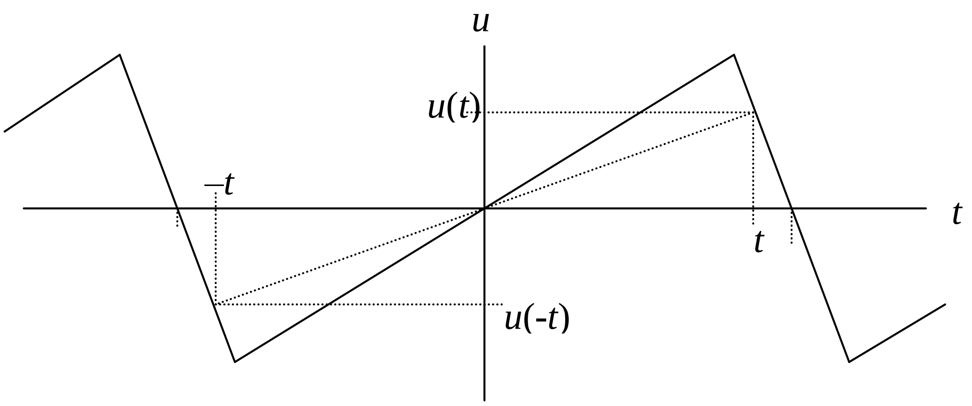


Рис. 122

Функции, обладающие нечетной симметрией, получили название нечетных. В разложении таких функций содержатся только синусные составляющие отдельных гармоник Us_k и отсутствуют постоянная составляющая U_0 и косинусные составляющие отдельных гармоник Uc_k:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Us_k \sin k\omega t.$$

При определении коэффициентов ряда Фурье нечетной функции интегрирование в формуле достаточно выполнить за половину периода $T/2$:

$$Us_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cdot\sin(k\omega t)\cdot dt.$$

2) Четная симметрия: функция симметрична относительно оси ординат и удовлетворяет условию $u(t) = u(-t)$ (рис. 123).

Функции, обладающие четной симметрией, получили название четных. В разложении таких функций содержатся только постоянная составляющая U_0 и косинусные составляющие отдельных гармоник Uc_k и отсутствуют синусные составляющие отдельных гармоник $Us_к$:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Uc_k \cos k\omega t.$$

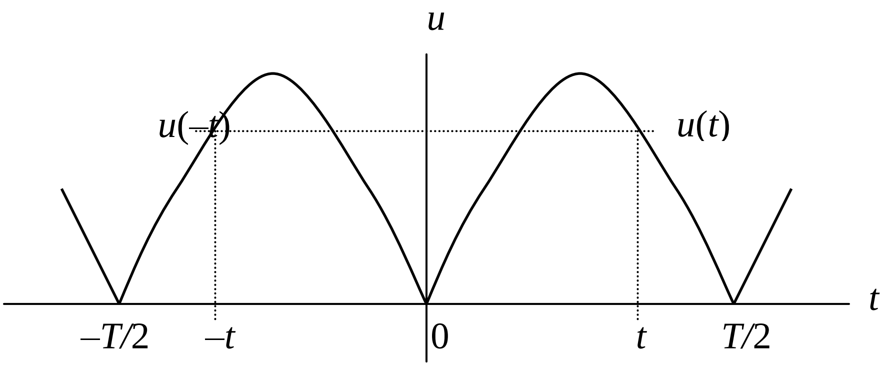


Рис. 123

При определении коэффициентов ряда Фурье четной функции интегрирование в формулах достаточно выполнить за половину периода:

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cdot dt, \qquad Uc_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cdot\cos(k\omega t)\cdot dt.$$

3) Косая симметрия: функция симметрична относительно оси абсцисс при смещении ее положительной части $[u(t)>0]$ или отрицательной части $[u(t)<0]$ на отрезок времени $\pm T/2$ и удовлетворяет условию $u(t) = -u(t \pm T/2)$ (рис. 124):

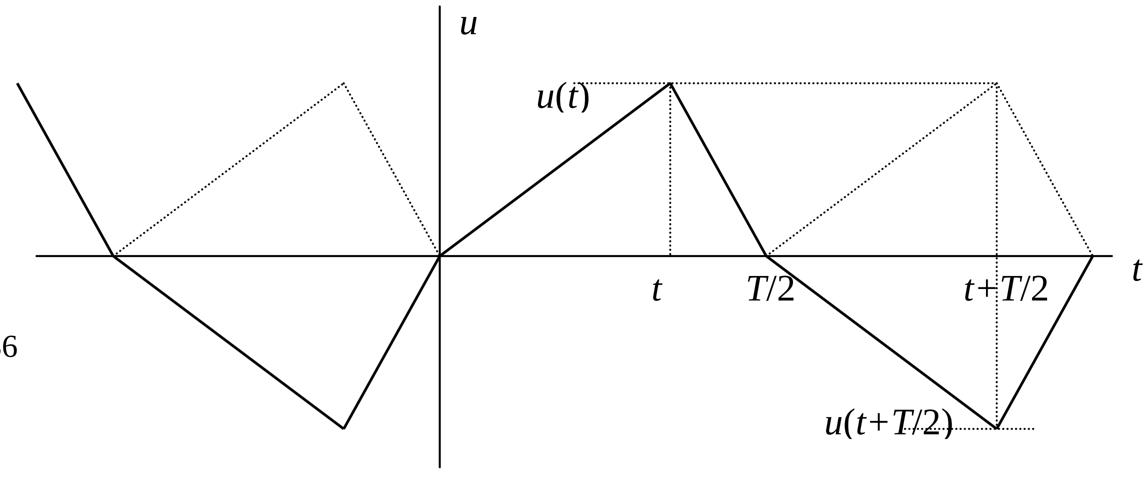


Рис. 124

Функции, обладающие косой симметрией, получили название кососимметричных. В разложении таких функций содержатся только нечетные гармоники (синусные и косинусные составляющие):

$$u(t) = \sum_{k=1,3,...}^{\infty} Um_k \sin(k\omega t + \alpha_k) = \sum_{k=1,3,...}^{\infty} Us_k \sin k\omega t + \sum_{k=1,3,...}^{\infty} Uc_k \cos k\omega t .$$

Докажем это утверждение методом от обратного. Предположим, что кососимметричная функция содержит в разложении все члены ряда Фурье:

$$u(t) = U_0 + Um_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + Um_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \ldots$$

Добавим к аргументу функции $T/2$:

$$-u(t + T/2) = -U_0 - Um_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + 180^o) - Um_2 \sin(2\omega t + \alpha_2 + 360^o) + \ldots =$$

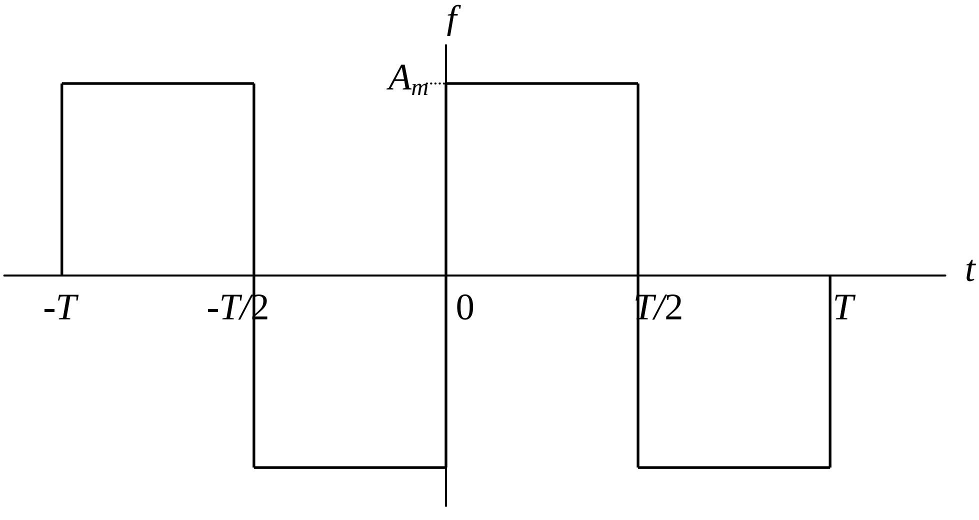
$$-U_0 + Um_1 \sin(\omega t + \alpha_1) - Um_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \ldots$$

Равенство $u(t) = -u(t \pm T/2)$ выполняется при условии $U_0 = 0$, $Um_2 = 0$, $Um_4 = 0, \ldots$, что требовалось доказать.

Коэффициенты ряда Фурье кососимметричной функции определяются по общим правилам.

Функция $u(t)$ может обладать одновременно двумя видами симметрии, например, нечетной и косой или четной и косой, но не может быть одновременно нечетной и четной. При разложении конкретной функции в ряд Фурье начало отсчета следует выбрать так, чтобы получить желаемый вид симметрии функции.

Пример. Требуется разложить в ряд Фурье периодическую прямоугольную функцию $u(t) = A_m (0 \le t \le T/2)$ и $u(t) = -A_m (T/2 \le t \le T)$ (рис. 125).



При выбранном начале отсчета (точка 0) функция будет обладать одновременно двумя видами симметрии (нечетной и косой) и ее гармонический состав будет иметь вид:

$$u(t) = Um_1 \sin \omega t + Um_3 \sin 3\omega t + Um_5 \sin 5\omega t + \ldots$$

Коэффициенты ряда Фурье определяются по формуле для нечетной функции:

$$Us_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cdot \sin(k\omega t)\cdot d\omega t = \frac{4A_m}{k\pi}$$

Тогда ряд Фурье исследуемой функции получит вид:

$$u(t) = \frac{4A_m}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right) = A_m(1{,}273\sin \omega t + 0{,}424\sin 3\omega t + 0{,}255\sin 5\omega t + \ldots)$$

4. Действующие значения несинусоидальных напряжений и токов

Как известно, в электроэнергетике переменные напряжения и токи характеризуются их действующими значениями. Математически действующее значение любого периодически изменяющегося напряжения (тока) определяется как среднеквадратичное значение функции за период:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\, dt}\ ; \qquad I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\, dt}$$

Пусть функция напряжения $u(t)$ содержит в своем составе все составляющие ряда Фурье:

$$u(t) = U_0 + Um_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + Um_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \ldots = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Um_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$$

Определим действующее значение этой функции:

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_0{}^2dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Um_k{}^2\sin^2(k\omega t+\alpha_k)dt+\sum_{p\neq q}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Um_p\sin(p\omega t+\alpha_p)*Um_q\sin(q\omega t+\alpha_q)dt}=$$

$$=\sqrt{U_0{}^2+\frac{1}{2}(Um_1{}^2+Um_2{}^2+\ldots)}=\sqrt{U_0{}^2+U_1{}^2+U_2{}^2+\ldots}$$

При интегрировании учтено, что произведение двух синусоидальных функций времени с различными частотами $\omega_1=p\omega$ и $\omega_2=q\omega$ дает сумму двух новых синусоидальных функций с частотами $(\omega_1+\omega_2)$ и $(\omega_1-\omega_2)$, определенный интеграл от которых в пределах целого числа периодов равен нулю.

И так получено, что действующее значение несинусоидального напряжения (тока) равно квадратному корню из суммы квадратов действующих значений отдельных составляющих:

$$U=\sqrt{U_0{}^2+\frac{1}{2}(U_{m1}{}^2+U_{m2}{}^2+\ldots)}=\sqrt{U_0{}^2+U_1{}^2+U_2{}^2+\ldots}$$

$$I=\sqrt{I_0{}^2+\frac{1}{2}(I_{m1}{}^2+I_{m2}{}^2+\ldots)}=\sqrt{I_0{}^2+I_1{}^2+I_2{}^2+\ldots},$$

Исследуем влияние доли высших гармоник на действующее значение всей функции. Пусть функция $u(t)$ содержит только одну высшую гармонику с коэффициентом гармоники k:

$$u(t)=Um_1\sin\omega t+k\cdot Um_1\sin 2\omega t,$$

где $k=\frac{U_{m2}}{U_{m1}}$. Результаты расчета сведены в табл. 2.

Таблица 2

k	0	0,05	0,10	0,15	0,20
U/U_1	1	1,001	1,005	1,011	1,020

Вывод: при коэффициенте высшей гармоники менее 0,1 ее доля в действующем значении функции составляет менее 1% (U/U_1 = 1,005), и, следовательно, при определении действующего значения функции с погрешностью $\delta\%\leq 1$ эти гармоники могут не учитываться.

5. Мощность в цепи несинусоидального тока

Под активной мощностью P понимают количество энергии, потребляемое (генерируемое) объектом за единицу времени. Математически активную мощность определяют как среднее значение мгновенной мощности за полный период.

Пусть некоторый элемент цепи потребляет ток $i(t)$ при несинусоидальном напряжении $u(t)$:

$$u(t) = U_0 + Um_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + Um_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \ldots$$

$$i(t) = I_0 + \mathrm{Im}_1 \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1) + \mathrm{Im}_2 \sin(2\omega t + \alpha_2 - \varphi_2) + \ldots$$

Мгновенная мощность $p(t) = u(t) \cdot i(t)$, тогда активная мощность будет равна:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0 dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (U_{km}\sin(k\omega t + \alpha_k)\cdot I_{km}\sin(k\omega t + \alpha_k - \varphi_k)dt +$$

$$+\sum_{p\neq q}^{0}\frac{1}{T}\int_0^T U_{pm}\sin(p\omega t + \alpha_p)\cdot I_{qm}\sin(q\omega t + \alpha_q - \varphi_q)dt = U_0 I_0 + \sum_1^{\infty}\frac{1}{2}U_{km}I_{km}\cos(\varphi) + \sum 0 =$$

$$= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos(\varphi_1) + U_2 I_2 \cos(\varphi_2) + \ldots = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots$$

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots$$

Реактивная мощность Q несинусоидального тока определяется по аналогии с активной мощностью P как алгебраическая сумма реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots = U_1 I_1 \sin(\varphi_1) + U_2 I_2 \sin(\varphi_2) + \ldots$$

Как известно, реактивная мощность Q синусоидального тока характеризует интенсивность колебаний энергии ($Q = \omega \cdot W_{\max}$) с частотой ω между электромагнитным полем элемента и остальной цепью. В цепи несинусоидального тока колебания энергии происходят на разных частотах. Сложение реактивных мощностей отдельных гармоник, характеризующих колебания энергии на разных частотах, лишено физического смысла. Математически может получиться, что реактивные мощности отдельных гармоник имеют разные знаки и в сумме дают нуль, хотя колебания энергии при этом имеют место. Таким образом, для цепи несинусоидального тока понятие реактивной мощности лишено физического смысла.

Для цепи несинусоидального тока применяется также и понятие полной мощности, которая определяется как произведение действующих значений напряжения и тока:

$$S = U \cdot I = \sqrt{(U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots)(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots)}$$

Как известно, для цепи синусоидального тока мощности *P, Q, S* образуют прямоугольный треугольник, из которого следует соотношение: $S^2 = P^2 + Q^2$. Для цепей несинусоидального тока это соотношение между мощностями выполняется только для резистивных элементов, в которых в соответствии с законом Ома ($u = i \cdot R$) формы кривых функций $u(t)$ и $i(t)$ идентичны. Если в цепи содержатся реактивные элементы *L* и *C*, то это соотношение не выполняется: $S^2 \geq P^2 + Q^2$. Для баланса этого уравнения в его правую часть вносят добавление: $S^2 = P^2 + Q^2 + T^2$, откуда

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

где *T* – мощность искажения – понятие математическое, характеризует степень различия в формах кривых напряжение $u(t)$ и тока $i(t)$.

6. Коэффициенты, характеризующие несинусоидальные функции *u*(*t*), *i*(*t*)

Пусть несинусоидальная функция $u(t)$ содержит только гармонические составляющие:

$$u(t) = Um_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + Um_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + Um_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots$$

Несинусоидальные функции напряжений и токов, не содержащие постоянных составляющих ($I_0 = 0,\ \ U_0 = 0$) характеризуются следующими параметрами и коэффициентами.

Действующее значение всей функции определяется по формуле:

$$U = \sqrt{\frac{1}{2}(Um_1^2 + Um_2^2 + Um_3^2 + ...)} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + ...}\,.$$

Действующее значение высших гармоник:

$$U_{ВГ} = \sqrt{\frac{1}{2}(Um_2^2 + Um_3^2 + ...)} = \sqrt{U_2^2 + U_3^2 + ...} \quad \text{или} \quad U_{ВГ} = \sqrt{U^2 - U_1^2}.$$

Максимальные значения функции в положительной области ($U_{\max}$) и в отрицательной области ($U_{\min}$) не будут равны друг другу при наличии в гармоническом ряду функции четных гармоник и зависят как от амплитуд отдельных гармоник, так и от их фазовых сдвигов (начальных фаз).

Среднее по модулю значение функции определяется как среднеарифметическое значение модулей мгновенных значений функции за полный период:

$$Ucc = \frac{1}{T}\int_0^T [u(t)]dt\,.$$

Среднее по модулю значение функции зависит как от амплитуд отдельных гармоник, так и от их начальных фаз.

Коэффициентом амплитуды функции называется величина, равная отношению ее максимального значения к действующему значению:

$$Ka = \frac{U_{\max}}{U}; \qquad Ka = \sqrt{2} = 1{,}41 \text{ для синусоиды.}$$

Коэффициентом формы кривой функции называется величина, равная отношению действующего значения функции к ее среднему по модулю значению:

$$K\phi = \frac{U}{Ucp}; \qquad K\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11 \text{ для синусоиды.}$$

Коэффициентом k-ой гармоники называется величина, равная отношению действующего значения (амплитуды) k-ой гармоники к действующему значению (амплитуде) основной гармоники:

$$K_{\text{г}k} = \frac{U_k}{U_1} = \frac{U_{m_k}}{U_{m_1}}.$$

Коэффициентом искажения синусоидальности формы кривой функции называется величина, равная отношению действующего значения всех высших гармоник к действующему значению основной гармоники:

$$K_{\text{и}} = \frac{U\textit{вв}}{U_1} = \frac{\sqrt{Um_2^2 + Um_3^2 + \ldots}}{Um_1}.$$

Для приемников, работающих в несинусоидальном режиме, применяется понятие коэффициента мощности, который определяется как отношение активной мощности P к полной мощности S:

$$Kp = \cos(\varphi_э) = \frac{P}{S} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots}\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}}.$$

7. Расчет электрических цепей несинусоидального тока гармоническим методом

Расчет электрических цепей, содержащих источники энергии [источники ЭДС $e(t)$ и источники тока $j(t)$] с несинусоидальной формой кривой, выполняется по методу наложения. Процедуру расчета можно условно разделить на три этапа.

1) Гармонический анализ.

На этом этапе выполняется разложение несинусоидальных функций источников ЭДС $e(t)$ и источников тока $j(t)$ в гармонический ряд Фурье:

$$e(t) = E_0 + Em_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + Em_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + Em_3 \sin(3\omega t + \alpha_3)\ldots$$

$$j(t) = J_0 + Jm_1 \sin(\omega t + \beta_1) + Jm_2 \sin(2\omega t + \beta_2) + Jm_3 \sin(3\omega t + \beta_3) \ldots$$

Количество гармоник в разложении функций $e(t)$ и $j(t)$ определяют исходя из конкретных требований задачи.

<u>2) Аналитический расчет.</u>

Производится аналитический расчет схемы последовательно для каждой гармоники в отдельности. Расчет схемы для постоянной составляющей производится как для резистивной цепи постоянного тока, при этом участки с катушками L закорачиваются, а ветви с конденсаторами C размыкаются. Расчет схемы для отдельных гармоник производится как для цепи синусоидального тока, т.е. в комплексной форме, при этом определяются не действующие значения, а комплексные амплитуды напряжений и токов ($\underline{Um}$, $\underline{Im}$). Расчет для каждой гармоники выполняется по одному и тому же алгоритму, при этом учитывается зависимость реактивных сопротивлений элементов от частоты и, следовательно, от номера гармоники: $X_{Lk} = k \cdot \omega L = k\ X_{L1}$; $Xc_k = 1/k\omega C = Xc_1/k$. Выбор расчетного метода определяется структурой расчетной схемы.

Количество гармоник, для которых выполняется расчет схемы, устанавливается исходя из конкретных условий задачи. Например, если определяются только действующие значения токов и напряжений (I, U), то достаточно учитывать только те гармоники, для которых коэффициент гармоник $k_г > 0{,}1$, при этом относительная погрешность расчета в итоге не превысит 1%. Однако в тех случаях, когда требуется проводить исследования форм кривых функций $u(t)$ и $i(t)$, то необходимо учитывать также гармоники более высокого порядка с меньшим коэффициентом гармоник $k_г$.

<u>3.Синтез решения.</u>

На заключительной стадии расчета определяются искомые величины согласно условию задачи.

Мгновенные значения напряжений $u(t)$ и токов $i(t)$ определяются в соответствии с принципом наложения как алгебраической суммы мгновенных значений отдельных составляющих, например для приемника 1:

$$u1(t) = U1_0 + U1m_1 \sin(\omega t + \beta_1) + U1m_2 \sin(2\omega t + \beta_2) + U1m_3 \sin(3\omega t + \beta_3) \ldots$$

$$i1(t) = I1_0 + I1m_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + I1m_2 \sin(2\omega t + \gamma_2) + I1m_3 \sin(3\omega t + \lambda_3) \ldots$$

При необходимости исследования формы кривых функций $i(t)$ и $u(t)$ по полученным уравнениям строится их графические диаграммы.

Действующие значения напряжений U и токов I находятся как среднеквадратичные значения этих функций по полученным ранее формулам, например:

$$U1=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u1(t)^2\,dt} \quad \text{или} \quad U1=\sqrt{U1_0+\frac{1}{2}(U1m_1^2+U2m_2^2+\ldots)}$$

Активные мощности отдельных элементов определяется как средние значения за период или как суммы активных мощностей этих элементов для отдельных гармоник, например:

$$P1=\frac{1}{T}\int_0^T u1(t)\cdot i1(t)\cdot dt$$

или
$$P1=U1_0\cdot I1_0+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\underline{U1m}_1\cdot\overset{*}{\underline{I1m}}_1]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\underline{U1m}_2\cdot\overset{*}{\underline{I1m}}_2]+\ldots$$

Активную мощность отдельных приемников можно определять также по формуле Джоуля: $P1=I1^2\cdot R1$, где $I1$ – действующее значение тока этого приемника.

Определяются коэффициенты исследуемых несинусоидальных функций: $k_и$ – коэффициент искажения, $k_ф$ – коэффициент формы, $k_г$ – коэффициенты отдельных гармоник и т. д.

Расчет электрических цепей несинусоидального тока требует большого объема однотипных вычислений. Такие расчеты целесообразно выполнять на ЭВМ в матричной форме. Ниже приведен пример такого расчета в MathCAD.

Пример. Требуется выполнить расчет схемы (рис. 126) и определить действующие значения токов, напряжений, а также мощности источников и приемников энергии. Заданы схема цепи и параметры элементов. Несинусоидальная функция $e(t)$ задана таблицей координат точек в интервале одного периода.

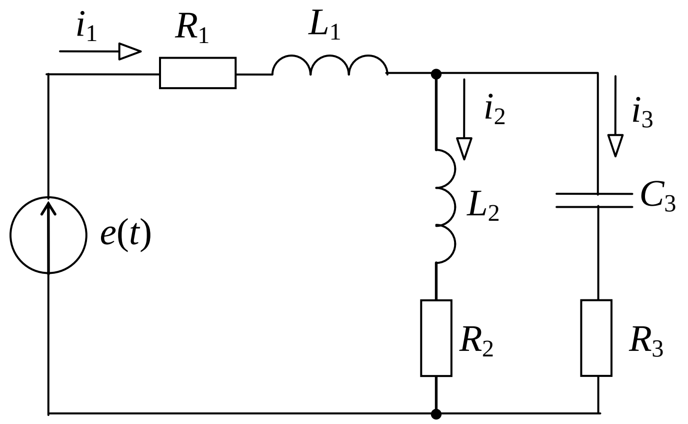


Рис. 126

$R_1 := 21$ $\quad$ $R_2 := 38$ $\quad$ $R_3 := 26$

$L_1 := .025$ $L_2 := .092$ $C_3 := 28 \cdot 10^{-6}$

$tn := (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20)^T \cdot 10^{-3}$

$en := (52\ 122\ 167\ 138\ 73\ 28\ 14\ 15\ 26\ 38\ 29\ -11\ -61\ -110\ -147\ -144\ -82\ -4\ 30\ 27\ 52)^T$

2. Аппроксимация функции $e(t)$ кубическими сплайнами

$cs := cspline(tn, en)$ $e(t) := interp(cs, tn, en, t)$

3. Гармонический анализ функции $e(t)$

$$Eo := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e(t)\, dt = 9.978$$

$$Sn_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T e(t) \cdot sin(k \cdot \omega \cdot t)\, dt \qquad Cs_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T e(t) \cdot cos(k \cdot \omega \cdot t)\, dt$$

$$Em_k := Sn_k + j \cdot Cs_k$$

$\left|Em_k\right| =$	$arg(Em_k) =$ ($\cdot deg$)
99.854	29.996
49.943	79.919
30.014	-79.525
19.898	-69.71
9.742	-59.825

4. Расчет схемы для постоянной составляющей

$Ro := R_1 + R_2$ $I1o := \frac{Eo}{Ro} = 0.169$ $I2o := I1o = 0.169$ $I3o := 0$

$U1o := I1o \cdot R_1 = 3.552$ $U2o := I2o \cdot R_2 = 6.427$

$PEo := Eo \cdot I1o = 1.688$ $P1o := U1o \cdot I1o = 0.601$

$P2o := U2o \cdot I2o = 1.087$ $P3o := 0$

5. Расчет схемы для k-ой гармоники

$M := 5$ $k := 1..M$ $j := \sqrt{-1}$

$Z1_k := R_1 + j \cdot k \cdot \omega \cdot L_1$ $Z2_k := R_2 + j \cdot k \cdot \omega \cdot L_2$ $Z3_k := R_3 - j \cdot \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C_3}$

$Zab_k := Z2_k \cdot \frac{Z3_k}{Z2_k + Z3_k}$ $Zэ_k := Z1_k + Zab_k$

$I1m_k := \frac{Em_k}{Zэ_k}$ $U1m_k := I1m_k \cdot Z1_k$ $U2m_k := I1m_k \cdot Zab_k$

$I2m_k := \frac{U2m_k}{Z2_k}$ $I3m_k := \frac{U2m_k}{Z3_k}$

6. Мгновенные значения функций времени

$$i1(t) := I1o + \sum_{k=1}^{M} \left(\left| I1m_k \right| \cdot sin\left(k \cdot \omega \cdot t + arg\left(I1m_k\right)\right)\right)$$

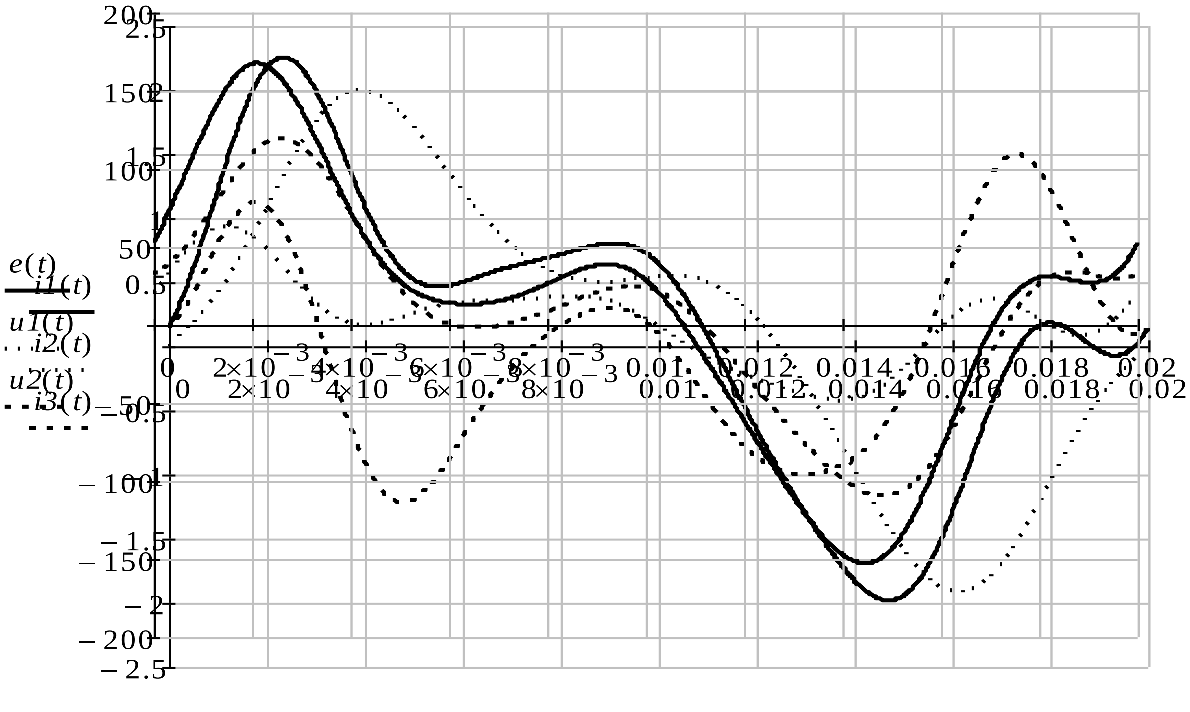
$$i2(t) := I2o + \sum_{k=1}^{M} \left(\left| I2m_k \right| \cdot sin\left(k \cdot \omega \cdot t + arg\left(I2m_k\right)\right)\right)$$

$$i3(t) := I3o + \sum_{k=1}^{M} \left(\left| I3m_k \right| \cdot sin\left(k \cdot \omega \cdot t + arg\left(I3m_k\right)\right)\right)$$

$$u1(t) := U1o + \sum_{k=1}^{M} \left(\left| U1m_k \right| \cdot sin\left(k \cdot \omega \cdot t + arg\left(U1m_k\right)\right)\right)$$

$$u2(t) := U2o + \sum_{k=1}^{M} \left(\left| U2m_k \right| \cdot sin\left(k \cdot \omega \cdot t + arg\left(U2m_k\right)\right)\right)$$

7. Графические диаграммы функций токов и напряжений



8. Действующие значения напряжений и токов

$$I1 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T i1(t)^2\,dt} = 1.117 \qquad I2 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T i2(t)^2\,dt} = 1.139$$

$$I3 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T i3(t)^2\,dt} = 0.766 \qquad U1 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u1(t)^2\,dt} = 27.817$$

$$U2 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u2(t)^2\,dt} = 60.276 \qquad E := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T e(t)^2\,dt} = 83.834$$

9. Активная мощность источника и приемников энергии

$$PE := \frac{1}{T}\cdot\int_0^T e(t)\cdot i1(t)\,dt = 90.78 \qquad P1 := \frac{1}{T}\cdot\int_0^T u1(t)\cdot i1(t)\,dt = 26.196$$

$$P2 := \frac{1}{T}\cdot\int_0^T u2(t)\cdot i2(t)\,dt = 49.338 \qquad P3 := \frac{1}{T}\cdot\int_0^T u2(t)\cdot i3(t)\,dt = 15.246$$

8. Расчет электрических цепей несинусоидального тока численным методом

В этом параграфе предлагается совершенно новый метод расчета линейных цепей с несинусоидальными источниками энергии, основанный на применении новейших компьютерных технологий. Сущность предлагаемого метода излагается ниже.

1. На первом этапе несинусоидальные по форме ЭДС источников $e(t)$ аппроксимируются кубическими сплайнами, таким образом получают математические выражения этих функций.

2. Для расчетной схемы по законам Кирхгофа составляется система дифференциальных уравнений для мгновенных значений функций.

3. Система дифференциальных уравнений решается численным методом по стандартной программе. В результате интегрирования получаются массивы значений переменных величин, которые затем линейно интерполируются и превращаются в соответствующие функции.

4. На заключительном этапе выполняется необходимая математическая обработка найденных функций: строятся графические диаграммы функций, определяются интегральные параметры (действующие, максимальные, средние, средние по модулю значения, мощность), выполняется гармонический анализ функций (не обязательно).

Все математические операции выполняются по встроенным программам любого пакета (MATLAB, MathCAD и др.).

Предлагаемый метод иллюстрируется на конкретном примере. Все расчеты выполнены на ЭВМ в MathCAD по стандартным программам.

Пример. Требуется выполнить расчет схемы и определить действующие значения токов, напряжений, а также мощности источников и приемников энергии.

1.Аппроксимация функции $e(t)$ кубическими сплайнами в интервале 5 периодов:

$$tn2 := tn1 + T \qquad tn3 := tn1 + 2\cdot T \qquad tn4 := tn1 + 3\cdot T \qquad tn5 := tn1 + 4\cdot T$$

$$tn := stack(tn1, tn2, tn3, tn4, tn5) \qquad en := stack(en1, en1, en1, en1, en1)$$

$$cs := cspline(tn, en) \qquad e(t) := interp(cs, tn, en, t)$$

1. Система дифференциальных уравнений Кирхгофа.

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \qquad i_1\cdot R_1 + L_1\cdot\frac{d}{dt}i_1 + i_3\cdot R_3 + Uc = e(t)$$

$$-i_3\cdot R_3 - Uc + i_2\cdot R_3 + L_2\cdot\frac{d}{dt}i_2 = 0 \qquad i_3 = C_3\cdot\frac{dUc}{dt}$$

3. Решение системы дифференциальных уравнений численным методом

$$N := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F(t,X) := \begin{bmatrix} \frac{-(R_1 + R_3)}{L_1}\cdot X_0 + \frac{R_3}{L_1}\cdot X_1 - \frac{1}{L_1}\cdot X_2 + \frac{1}{L_1}\cdot e(t) \\ \frac{R_3}{L_2}\cdot X_0 + \frac{-(R_2 + R_3)}{L_2}\cdot X_1 + \frac{1}{L_2}\cdot X_2 \\ \frac{1}{C_3}\cdot X_0 + \frac{-1}{C_3}\cdot X_1 \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed(N, 0, 0.1, 5000, F)$$

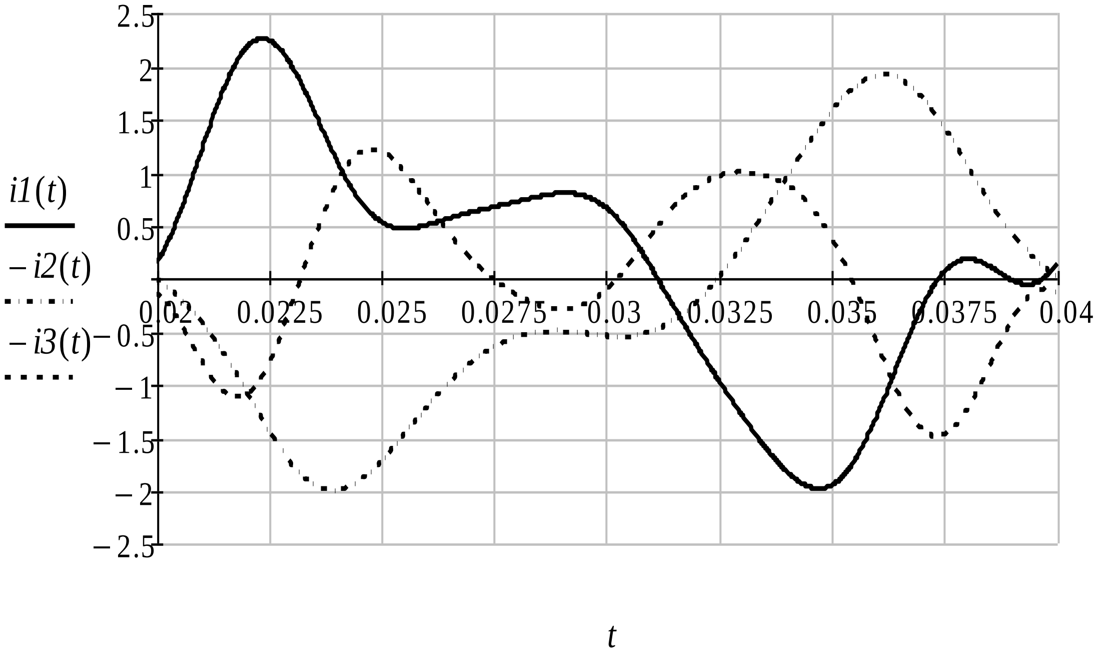
$$tn := Z^{\langle 0\rangle} \qquad i1n := Z^{\langle 1\rangle} \qquad i2n := Z^{\langle 2\rangle} \qquad ucn := Z^{\langle 3\rangle}$$

$$i3n := i1n - i2n \qquad u2n := ucn + i3n\cdot R_3 \qquad u1n := e(tn) - u2n$$

$$i1(t) := linterp(tn, i1n, t) \qquad i2(t) := linterp(tn, i2n, t)$$

$$i3(t) := linterp(tn, i3n, t) \qquad u2(t) := linterp(tn, u2n, t) \qquad u1(t) := linterp(tn, u1n, t)$$

4. Графические диаграммы функций токов



5. Действующие значения напряжений и токов.

$$I1 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{T}^{2T} i1(t)^2\,dt} = 1.117 \qquad I2 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{T}^{2T} i2(t)^2\,dt} = 1.14$$

$$I3 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{T}^{2T} i3(t)^2\,dt} = 0.765 \qquad U1 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{T}^{2T} u1(t)^2\,dt} = 27.803$$

$$U2 := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{T}^{2T} u23(t)^2\,dt} = 60.276 \qquad E := \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{0}^{T} e(t)^2\,dt} = 83.854$$

6. Мощности источника и приемников энергии.

$$Pe := \frac{1}{T}\cdot\int_{T}^{2T} e(t)\cdot i1(t)\,dt = 90.773 \qquad P1 := \frac{1}{T}\cdot\int_{T}^{2T} u1(t)\cdot i1(t)\,dt = 26.19$$

$$P2 := \frac{1}{T}\cdot\int_{T}^{2T} u23(t)\cdot i2(t)\,dt = 49.355 \qquad P3 := \frac{1}{T}\cdot\int_{T}^{2T} u23(t)\cdot i3(t)\,dt = 15.227$$

$Pn := P1 + P2 + P3 = 90.772$

Вывод: результаты расчета численным методом полностью совпадают с аналогичными результатами расчета гармоническим методом.

8. Измерение действующих значений несинусоидальных напряжений и токов

Для измерения действующих значений напряжений и токов в цепях переменного синусоидального тока применяются различные приборы, отличающиеся по принципу их действия или системой. Независимо от устройства шкалы всех приборов для измерения действующих значений токов и напряжений проградуированы в действующих значениях измеряемых величин.

Приборы непосредственного измерения (к таким относятся приборы электромагнитной и электродинамической систем) реагирует на действующее значение измеряемой величины (I, U) и, следовательно, для их коэффициент пересчета равен единице ($\kappa_n = 1$) .

Приборы косвенного измерения могут реагировать на среднее ($I_{\text{ср}}$, $U_{\text{ср}}$) или на максимальное ($I_{\max}$, $U_{\max}$) значение измеряемой величины, но их показания пересчитываются к действующим значениям синусоидальных функций.

Для приборов, реагирующих на среднее значение, коэффициент пересчета равен:

$$k_n = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{U_m \cdot 2/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

Для приборов, реагирующих на максимальное значение, коэффициент пересчета равен:

$$k_n = \frac{U}{U_m} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{U_m} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707.$$

Действующее значение несинусоидальной функции зависит только от амплитуд отдельных гармоник, в то же время ее максимальное и среднее значения зависят как от амплитуд гармоник, так и от их фазовых сдвигов. Из этого следует вывод, что показания приборов косвенного измерения, реагирующих на максимальное или среднее значение, в цепях несинусоидального тока не будут соответствовать действующим значениям измеряемых величин.

Рассмотрим два примера. Пусть измеряемое напряжение содержит 1-ю и 3-ю гармоники, но с разными фазовыми сдвигами между ними:

а) $u_1(t) = 100\sin(\omega t) + 10\sin(3\omega t)$, (рис. 127а),

б) $u_2(t) = 100\sin(\omega t) - 10\sin(3\omega t)$, (рис. 127б).

Действующие (U), максимальные (U_{max}) и средние ($U_{ср}$) значения этих напряжений, рассчитанные математически по соответствующим формулам, а также показания приборов различных систем (V_1 – непосредственного измерения, V_2 – косвенного измерения с реакцией на максимальное значение U_{max} и V_3 – косвенного измерения с реакцией на среднее значение $U_{ср}$) приведены ниже в таблице.

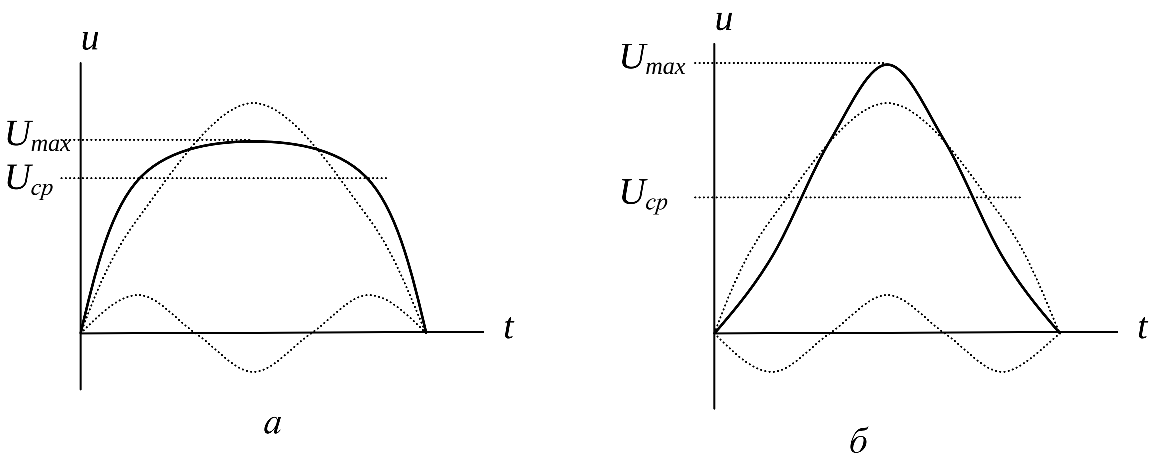


Рис. 127

Схема	U, В	U_{max}, В	$U_{ср}$, В	V_1	V_2	V_3
а	71,1	90	65,8	71,1	63.6	73,0
б	71,1	110	61,6	71,1	77,8	68,4

Как видно из приведенных в таблице цифр, показания приборов косвенного измерения существенно зависят от фазового сдвига между гармониками, при этом методическая погрешность измерения может составлять значительную величину (в рассматриваемом примере около 10 %).

9. Высшие гармоники в трехфазных цепях

В симметричном трехфазном режиме токи и напряжения в фазах сдвинуты взаимно во времени на $\Delta t = T / 3$ в порядке следования фаз $A \to \to B \to C \to A$, что в градусной мере составляет: для 1 гармоники $\Delta\omega t = = \frac{360^\circ}{3} = 120°$, для 2 гармоники $\Delta 2\omega t = 2\cdot\frac{360^\circ}{3} = 240 = -120°$, для 3 гармоники $\Delta 3\omega t = 3\cdot\frac{360^\circ}{3} = 360° = 0$ и т. д.

Из этого следует, что в симметричной трехфазной системе гармоники с порядковым номером $к = 3n - 2$ ($n = 1, 2, 3…$), т.е. 1-я, 4-я, 7-я и т.д., имеют прямой порядок следования фаз $A \to B \to C \to A$ и, следовательно, образуют симметричные системы прямой последовательности. Гармоники с порядковым номером $к = 3n + 1$ (2-я, 5-я, 8-я и т.д.) имеют обратный порядок следования фаз $A \to C \to B \to A$ и, следовательно, образуют симметричные системы обратной последовательности. Гармоники с порядковым номером $к = 3n$ (3-я, 6-я, 9-я и т.д.) имеют нулевой порядок следования фаз, т.е. совпадают, и, следовательно, образуют симметричные системы нулевой последовательности.

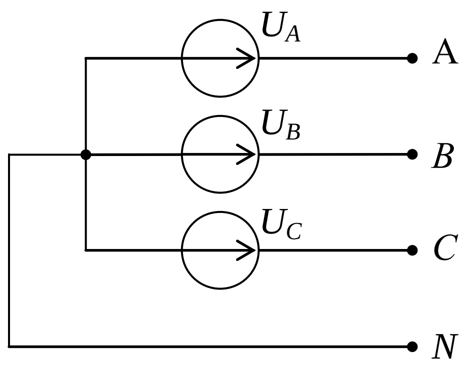


Рис. 128

Пусть обмотки трехфазного генератора соединены по схеме звезды с выводом нулевой точки, а его фазные напряжения (ЭДС) содержат все возможные гармоники (рис. 128).

В функциях фазных напряжений будут содержаться все гармоники с соответствующими их номеру сдвигами фаз:

$$u_A(t) = U_{m1}\sin\omega t + U_{m2}\sin 2\omega t + U_{m3}\sin 3\omega t + \ldots$$

$$u_B(t) = U_{m1}\sin(\omega t - 120°) + U_{m2}\sin(2\omega t + 120°) + U_{m3}\sin 3\omega t + \ldots$$

$$u_C(t) = U_{m1}\sin(\omega t + 120°) + U_{m2}\sin(2\omega t - 120°) + U_{m3}\sin 3\omega t + \ldots$$

Векторные диаграммы напряжений для 1-й, 2-й и 3-й гармоник показаны на рис. 126, *а*, *б*, *в*.

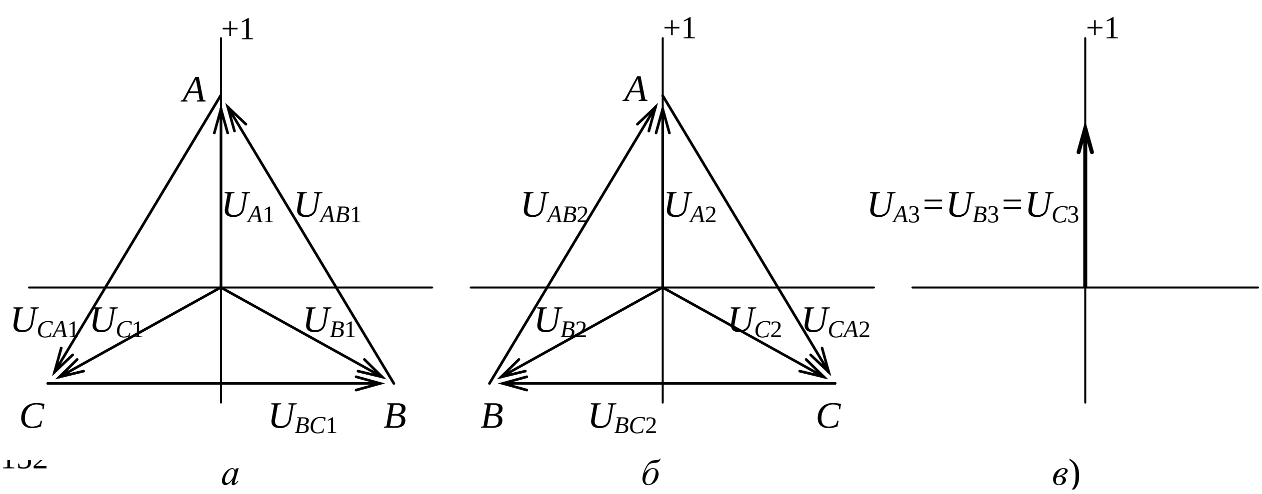


Рис. 129

Линейные напряжения равны разности соответствующих двух фазных напряжений, например $u_{AB} = u_A - u_B$. Как следует из векторных диаграмм рис. 9 амплитуды линейных напряжений для гармоник прямой и обратной последовательностей в $\sqrt{3}$ раз больше их фазных значений, а гармоники нулевой последовательности (кратные трем) в линейных напряжениях вообще отсутствуют (равны нулю):

$$u_{AB}(t) = \sqrt{3}Um_1 \sin\left(\omega t + 30^\circ\right) + \sqrt{3}Um_2 \sin\left(\omega t - 30^\circ\right) + 0 + \ldots$$

$$u_{BC}(t) = \sqrt{3}Um_1 \sin\left(\omega t - 90^\circ\right) + \sqrt{3}Um_2 \sin\left(\omega t + 90^\circ\right) + 0 + \ldots$$

$$u_{CA}(t) = \sqrt{3}Um_1 \sin\left(\omega t + 150^\circ\right) + \sqrt{3}Um_2 \sin\left(\omega t - 150^\circ\right) + 0 + \ldots$$

Действующие значения фазного и линейного напряжения :

$$U_\Phi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(Um_1^{\ 2} + Um_2^{\ 2} + Um_3^{\ 2} + \ldots.\right)}; \quad U_л = \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(Um_1^{\ 2} + Um_2^{\ 2} + 0 + \ldots\right)}$$

Сравнение полученных уравнений показывает, что при наличии в фазных напряжениях генератора гармоник нулевой последовательности (кратных трем) стандартное соотношение $\frac{U_л}{U_ф} = \sqrt{3}$ не соблюдается, а именно $U_л \le \sqrt{3} \cdot U_ф$. Из совместного решения этих уравнений получим :

$U_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(Um_3^{\ 2} + Um_6^{\ 2} + Um_9^{\ 2} + \ldots\right)} = \sqrt{U_ф^{\ 2} - \frac{1}{3}U_л^2}$ – действующее значение всех гармоник нулевой последовательности. В реальных трехфазных цепях четные гармоники, как правило, отсутствуют вообще, а амплитуда 9-й гармоники незначительна, поэтому можно приближенно считать, что $U_0 \approx U_3$, и $U_{3m} \approx \sqrt{2}\,U_0$ – амплитуда 3-й гармоники.

Если обмотки трехфазного генератора соединить по схеме треугольника, то гармоники прямой и обратной последовательностей в контуре треугольника складываясь, в сумме дают нуль, а гармоники нулевой последовательности складываются арифметически, и в контуре треугольника будет действовать суммарная ЭДС, равная $3U_0$. Даже при незначительных амплитудах гармоник нулевой последовательности в фазных ЭДС, вызываемые ими в контуре треугольника токи могут оказаться значительными по величине, так как внутреннее сопротивление обмоток очень мало. Это привело бы к дополнительным потерям энергии в генераторе и снижению его КПД. По этой причине обмотки трехфазных генераторов запрещается соединять по схеме треугольника.

Расчет трехфазной цепи при несинусоидальном напряжении генератора производится так же, как и любой сложной цепи, а именно, по методу наложения в три этапа. На 1-ом этапе выполняется разложение несинусоидального фазного напряжения в гармонический ряд Фурье. На 2-ом этапе выполняется расчет схемы для каждой гармоники в отдельности, при этом учитывается зависимость порядка следования фаз от номера гармоники. Например, гармоники токов нулевой последовательности могут замкнуться только через нулевой провод, поэтому при отсутствии нулевого провода гармоники кратные трем в фазных и линейных токах равны нулю.

На заключительном этапе расчета определяются действующие значения токов, напряжений, активные мощности.

В случае симметричной трехфазной нагрузки расчет токов и напряжений для каждой гармоники можно выполнять только в одной фазе A, а соответствующие токи и напряжения в других фазах определять через поворотные множители “a”, “a^2” с учетом порядка следования фаз.

Пример. Задана схема цепи (рис. 130) и комплексные сопротивления фаз на основной частоте ($\underline{Z}_{A1} = (150 + j0)$Ом, $\underline{Z}_{B1} = (120 + j50)$Ом, $\underline{Z}_{C1} = (100 - j50)$Ом. Фазные напряжения генератора несинусоидальны, гармонический состав задан :

$$u_A = 200 \cdot \sin\omega t + 50 \cdot \sin 3\omega t + 20 \cdot \sin 5\omega t$$

Требуется определить : 1) действующие значения фазных и линейных напряжений генератора, 2) действующие значения линейных (фазных) токов приемника и тока в нулевом проводе, 3) активные мощности генератора и приемника.

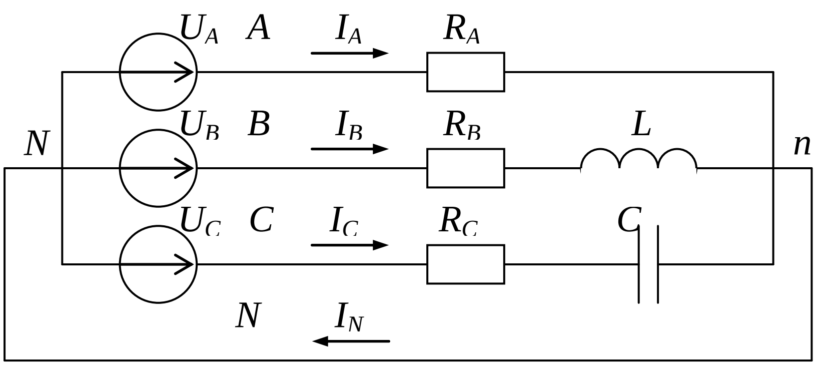


Рис. 130

Расчет схемы для 1-й гармоники (прямая последовательность):

$$\underline{I}_{Am1} = \frac{\underline{U}_{Am1}}{\underline{Z}_{A1}} = \frac{200e^{j0^\circ}}{150 + j0} = 1{,}333^{j0^\circ},$$

$$\underline{I}_{Bm1} = \frac{\underline{U}_{Bm1}}{\underline{Z}_{B1}} = \frac{200e^{-j120^\circ}}{120 + j50} = 1{,}538^{-j142{,}6^\circ} \ ,$$

$$\underline{I}_{Cm1} = \frac{\underline{U}_{Cm1}}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{200e^{j120^\circ}}{100 - j150} = 1{,}109e^{j176{,}3^\circ} \ ,$$

$$\underline{I}_{Nm1} = \underline{I}_{Am1} + \underline{I}_{Bm1} + \underline{I}_{Cm1} = 1{,}318e^{-j139{,}1^\circ} \ .$$

Расчет схемы для 3-й гармоники (нулевая последовательность) :

$$\underline{I}_{Am3} = \frac{\underline{U}_{Am3}}{\underline{Z}_{A3}} = \frac{50e^{j0}}{150 + j^o} = 0{,}333e^{j0}$$

$$\underline{I}_{Bm3} = \frac{\underline{U}_{Bm3}}{\underline{Z}_{B3}} = \frac{50e^{j^o}}{120 + j150} = 0{,}260^{-j51{,}30^o}$$

$$\underline{I}_{Cm3} = \frac{\underline{U}_{Cm3}}{\underline{Z}_{C3}} = \frac{50e^{j^o}}{100 - j30} = 0{,}479e^{j16{,}7^o}$$

$$\underline{I}_{Nm3} = \underline{I}_{Am3} + \underline{I}_{Bm3} + \underline{I}_{Cm3} = 0{,}957e^{-j3{,}9^o}$$

Расчет схемы для 5-й гармоники (обратная последовательность) :

$$\underline{I}_{Am5} = \frac{\underline{U}_{Am5}}{\underline{Z}_{A5}} = \frac{20e^{j0}}{150 + j^o} = 0{,}133e^{j0}$$

$$\underline{I}_{Bm5} = \frac{\underline{U}_{Bm5}}{\underline{Z}_{B5}} = \frac{20e^{j120^o}}{120 + j250} = 0{,}104e^{j68{,}7^o}$$

$$\underline{I}_{Cm5} = \frac{\underline{U}_{Cm5}}{\underline{Z}_{C5}} = \frac{20e^{-j120^o}}{100 - j30} = 0{,}192e^{-j103{,}3^o}$$

$$\underline{I}_{Nm5} = \underline{I}_{Am5} + \underline{I}_{Bm5} + \underline{I}_{Cm5} = 0{,}155e^{-j35{,}1^o}$$

Синтез решения.

Действующие значения фазного и линейного напряжений :

$$U_\Phi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(Um_1{}^2 + Um_3{}^2 + Um_5{}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(200^2 + 50^2 + 20^2\right)} = 146{,}5 \text{ В}$$

$$U_Л = \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(Um_1{}^2 + Um_5{}^2\right)} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(200^2 + 20^2\right)} = 246{,}2 \text{ В}$$

$\frac{U_Л}{U_Ф} = \frac{246{,}2}{146{,}5} = 1{,}68$ В, что меньше $\sqrt{3}$.

Действующие значения токов :

$$\underline{I}_A = \sqrt{\frac{1}{2}\left(I_{Am1}{}^2 + I_{Am3}{}^2 + I_{Am5}{}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1{,}333^2 + 0{,}333^2 + 0{,}133^2\right)} = 0{,}976 \text{ А}$$

$$\underline{I}_B = \sqrt{\frac{1}{2}\left(I_{Bm1}{}^2 + I_{Bm3}{}^2 + I_{Bm5}{}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1{,}538^2 + 0{,}260^2 + 0{,}104^2\right)} = 1{,}108 \text{ А}$$

$$\underline{I}_C = \sqrt{\frac{1}{2}\left(I_{Cm1}{}^2 + I_{Cm3}{}^2 + I_{Cm5}{}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1{,}109^2 + 0{,}476^2 + 0{,}192^2\right)} = 0{,}865 \text{ А}$$

$$I_N = \sqrt{\frac{1}{2}\left(I_{Nm1}{}^2 + I_{Nm3}{}^2 + I_{Nm5}{}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1{,}318^2 + 0{,}957^2 + 0{,}155^2\right)} = 1{,}157 \text{ А}$$

Так как при наличии нулевого провода отдельные фазы приемника работают независимо друг от друга, то активные мощности отдельных фаз приемника равны активным мощностям одноименных фаз генератора.

$$P_A = I^2{}_A \cdot R_A = 0.976^2 \cdot 150 = 142.9 \text{ Вт}$$
$$P_B = I^2{}_B \cdot R_В = 1.108^2 \cdot 120 = 147.3 \text{ Вт}$$
$$P_C = I^2{}_C \cdot R_C = 0.865^2 \cdot 100 = 74.8 \text{ Вт}$$
$$P = P_A + P_B + P_C = 365 \text{ Вт}$$

k	$\underline{E}_{km}$	$\underline{I}_{km}$	$\underline{I}_{1km}$	$\underline{I}_{2km}$
1	$157{,}9\ e^{j0}$	$3{,}081\ e^{-j30{,}4}$	$3{,}634\ e^{-j46{,}3}$	$1{,}080\ e^{j82{,}1}$
2	$39{,}5\ e^{j180}$	$0{,}385\ e^{j180}$	$0{,}576\ e^{j115{,}5}$	$0{,}526\ e^{-j105{,}4}$
4	$9{,}9\ e^{j0}$	$0{,}190\ e^{j45{,}2}$	$0{,}077\ e^{-j76{,}54}$	$0{,}240\ e^{j61{,}1}$
5	$6{,}3\ e^{j180}$	$0{,}154\ e^{-j135{,}1}$	$0{,}039\ e^{j100{,}8}$	$0{,}179\ e^{-j124{,}6}$

3-ый этап. Определяются интегральные параметры искомых функций. Действующие значения функций:

$$E = \sqrt{\tfrac{1}{2}(157{,}9^2 + 39{,}5^2 + 9{,}9^2 + 6{,}3^2)} = 115{,}4 \text{ В};$$

$I = 2{,}20$ А; $I_1 = 2{,}60$ А; $I_3 = 0{,}88$ А.

Коэффициенты искажения формы кривых для функций $e(t)$, $i(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$:

$$k_{u(e)} = \sqrt{\frac{39{,}5^2 + 9{,}9^2 + 6{,}3^2}{157{,}9^2}} = 0{,}26; \quad k_{u(i1)} = 0{,}16; \quad k_{u(i2)} = 0{,}56.$$

Активная мощность источника энергии:

$$P_E = P_{E1} + P_{E2} + P_{E4} + P_{E5} = \sum \mathrm{Re}[\tfrac{1}{2} E_{km} \cdot \overset{*}{I}_{km}] = 209{,}8 + 7{,}6 + 0{,}7 + 0{,}4 = 218{,}5 \text{ Вт.}$$

Активная мощность приемников энергии :

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 2{,}60^2 \cdot 30 = 202{,}8 \text{ Вт}; \qquad P_2 = I_2^2 R_2 = 0{,}88^2 \cdot 20 = 15{,}3 \text{ Вт.}$$

Баланс мощностей: $218{,}5 \approx 202{,}8 + 15{,}3$

Анализ результатов решения и выводы:

1. Для определения действующих значений величин и активных мощностей можно было бы пренебречь 4-ой и 5-ой гармониками, однако для определения коэффициентов искажения формы кривых учет названных гармоник необходим.

2. Величина и характер входного сопротивления схемы зависит от номера гармоники: для 1-ой гармоники $\left(\varphi_1 = 30{,}4^\circ\right)$ – входное сопротивление носит активно-индуктивный характер; для 2-ой гармоники ($\varphi_2 = 0$) – входное сопротивление носит чисто активный характер, т.е. на частоте 2-ой гармоники имеет место резонанс токов; для 4-ой гармоники ($\varphi_4 = -45{,}2^\circ$) – входное сопротивление носит активно-емкостный характер.

3. Форма кривой функции тока $i_1(t)$ в ветви с катушкой искажена меньше, чем форма кривой источника ЭДС $e(t)$ $\left(k_{u(i1)} < k_{u(e)}\right)$, а форма кривой тока $i_2(t)$ в ветви с конденсатором, наоборот, искажена больше $\left(k_{u(i2)} > k_{u(e)}\right)$. Такие соотношения между коэффициентами искажения форм кривых объясняются зависимостью реактивных сопротивлений от частоты: $X_{Lk} = k \cdot \omega L = k \cdot X_{L1}$; $X_{Ck} = 1/k\omega C = X_{C1}/k$.

Т10. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ФИЛЬТРЫ

1. Уравнения четырехполюсника

Четырехполюсником называется часть электрической цепи или схемы, содержащая два входных вывода (полюса) для подключения источника энергии и два выходных вывода для подключения нагрузки. К четырехполюсникам можно отнести различные по назначению технические устройства: двухпроводную линию, двухобмоточный трансформатор, фильтры частот, усилители сигналов и др.

Теория четырехполюсников устанавливает связь между режимными параметрами на входе (U_1, I_1) и режимными параметрами на его выходе

(U_2, I_2), при этом процессы, происходящие внутри четырехполюсника, не рассматриваются. Таким образом, единая теория четырехполюсника позволяет анализировать различные по структуре и назначению электрические цепи, которые могут быть отнесены к классу четырехполюсников.

Если четырехполюсник не содержит внутри себя источников энергии, то он называется пассивным (обозначается буквой П), если внутри четырехполюсника имеются источники, то он называется активным (обозначается буквой А).

В настоящей главе анализируются пассивные линейные четырехполюсники. На электрических схемах четырехполюсники условно обозначаются прямоугольником с двумя парами выводов: 1 и 1' − входные выводы, 2 и 2' − выходные выводы (рис. 131). Соответственно напряжение и ток на входе индексируются цифрой 1 ($\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$) , а на выходе – цифрой 2 ($\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$).

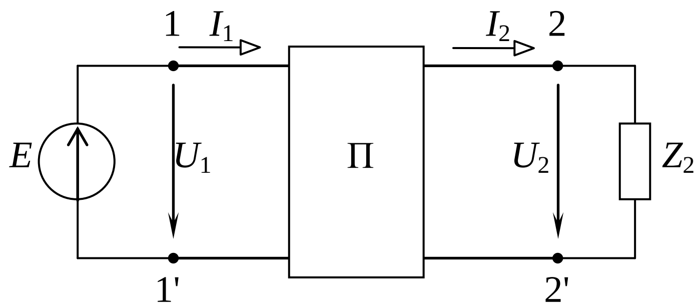


Рис. 131

Установим связь между параметрами режима входа ($\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$) и выхода ($\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$). Для этой цели согласно теореме о компенсации заменим нагрузку $\underline{Z}_2$ источником ЭДС $\underline{E}_2 = \underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}_2$ и найдем токи по методу наложения от каждого источника в отдельности (рис. 132, *а*, *б*):

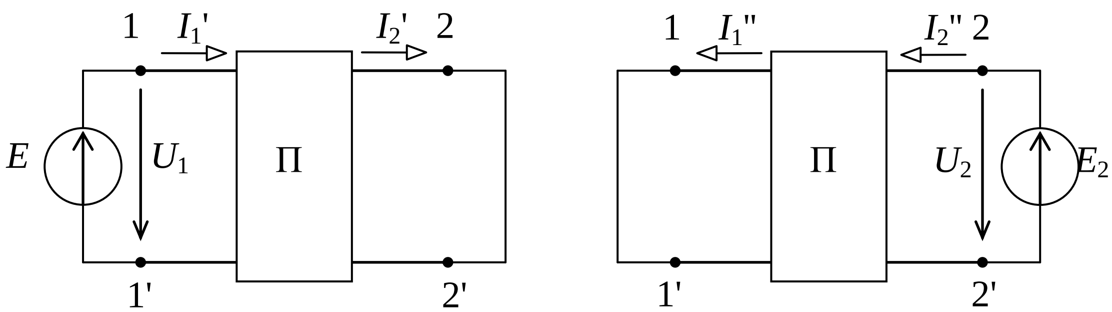


Рис. 132

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' - \underline{I}_1'' = \underline{U}_1\underline{Y}_{11} - \underline{U}_2\underline{Y}_{21}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2' - \underline{I}_2'' = \underline{U}_1\underline{Y}_{12} - \underline{U}_2\underline{Y}_{22},$$

где $\underline{Y}_{11}$, $\underline{Y}_{22}$ – входные проводимости четырехполюсника со стороны входа и выхода соответственно, $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ – взаимная проводимость между входом и выходом.

Выразим из полученных уравнений режимные параметры на входе:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \frac{1}{\underline{Y}_{12}} = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2 \left(\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} - \underline{Y}_{21} \right) + \underline{I}_2 \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}} = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2,$$

где $\underline{A} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} [-]$; $\underline{B} = \frac{1}{\underline{Y}_{12}}$ [Ом]; $C = \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} - Y_{21}$ [См]; $\underline{D} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}} [-]$ – есть комплексные коэффициенты четырехполюсника.

С учетом принятых обозначений система основных уравнений четырехполюсника получает вид:

$\underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2$ – система основных уравнений

$\underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2$ четырехполюсника формы А.

Уравнения четырехполюсника часто записывают в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

где $[A] = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов формы А.

Выразим соотношение между коэффициентами четырехполюсника:

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \cdot \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}} - \frac{1}{\underline{Y}_{12}} \cdot \left(\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} - \underline{Y}_{21} \right) = 1$$

$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1$ – уравнение связи между коэффициентами. Уравнение связи показывает, что независимыми являются только три из четырех коэффициентов четырехполюсника.

Поменяем местами в схеме рис. 131 источник и приемник энергии. В новой схеме рис. 133 направления токов изменятся на противоположные.

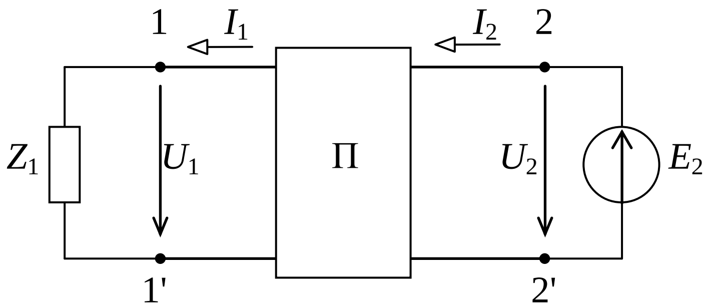


Рис. 133

Уравнения четырехполюсника с учетом изменения направлений токов примут вид:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\cdot\underline{U}_2 - \underline{B}\cdot\underline{I}_2 \quad (1) \quad \Big|\times\underline{D} \quad \Big|\times\underline{C}$$

$$-\underline{I}_1 = \underline{C}\cdot\underline{U}_2 - \underline{D}\cdot\underline{I}_2 \quad (2) \quad \Big|\times\underline{B} \quad \Big|\times\underline{A}$$

Преобразуем полученную систему уравнений следующим образом. Умножим члены уравнения (1) на $\underline{D}$, члены уравнения (2) на $\underline{B}$ и вычтем из 1-го уравнения 2-ое. В результате получим:

$$\underline{D}\,\underline{U}_1 + \underline{B}\cdot\underline{I}_1 = (\underline{A}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{C})\cdot\underline{U}_2 + (\underline{B}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{D})\cdot\underline{I}_2 = \underline{U}_2.$$

Умножим члены уравнения (1) на $\underline{C}$, члены уравнения (2) на $\underline{A}$ и вычтем из 1-го уравнения 2-ое. В результате получим:

$$\underline{C}\cdot\underline{U}_1 + \underline{A}\cdot\underline{I}_1 = (\underline{A}\cdot\underline{C} - \underline{A}\cdot\underline{C})\cdot\underline{U}_2 + (\underline{A}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{C})\cdot\underline{I}_2 = \underline{I}_2$$

Новая система уравнений четырехполюсника получила название формы B:

$$\underline{U}_2 = \underline{D}\cdot\underline{U}_1 + \underline{B}\cdot\underline{I}_1$$
$$\underline{I}_2 = \underline{C}\cdot\underline{U}_1 + \underline{A}\cdot\underline{I}_1$$

– система основных уравнений четырехполюсника формы В

Четырехполюсник называется симметричным, если перемена местами входных и выходных выводов не влияет на режим остальной цепи, частью которой является четырёхполюсник. Для симметричного четырёхполюсника $\underline{A} = \underline{D}$ и $\underline{A}^2 - \underline{B}\cdot\underline{C} = 1$.

Кроме названных форм уравнений четырехполюсника А и В применяются на практике еще четыре формы, а именно формы Z, Y, H и G. Структура этих уравнений приведена ниже:

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\cdot\underline{I}_2\\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\cdot\underline{I}_2\end{aligned}\right\}$$

– система основных уравнений четырехполюсника формы Z.

$$\left.\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\cdot\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\cdot\underline{U}_2\\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\cdot\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\cdot\underline{I}_2\end{aligned}\right\}$$

– система основных уравнений четырехполюсника формы Y.

$$\left.\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{G}_{11}\cdot\underline{U}_1 + \underline{G}_{12}\cdot\underline{I}_2\\ \underline{U}_2 &= \underline{G}_{21}\cdot\underline{U}_1 + \underline{G}_{22}\cdot\underline{I}_2\end{aligned}\right\}$$ – система основных уравнений четырехполюсника формы G.

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\cdot\underline{U}_2\\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\cdot\underline{U}_2\end{aligned}\right\}$$ – система основных уравнений четырехполюсника формы H.

Для уравнений формы Z, Y, G и H принята следующая ориентация токов и напряжений относительно выводов четырехполюсника (рис.134).

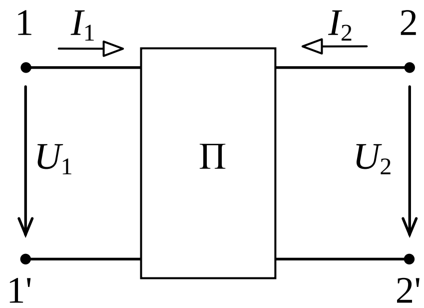


Рис. 134

Соотношения между коэффициентами четырехполюсника различных форм приводятся в справочной литературе, однако их нетрудно получить, выполнив преобразование одной формы уравнений в другую. Например, пусть заданы коэффициенты формы A ($\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$) и требуется определить коэффициенты формы Z ($\underline{Z}_{11}$, $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{21}$, $\underline{Z}_{22}$). Для этого в уравнениях формы A изменим знак тока $\underline{I}_2$ и решим их относительно переменных $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_2$:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\cdot\underline{U}_2 - \underline{B}\cdot\underline{I}_2 \tag{1}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C}\cdot\underline{U}_2 - \underline{D}\cdot\underline{I}_2 \tag{2}$$

Из (2) следует: $\underline{U}_2 = \frac{1}{\underline{C}}\underline{I}_1 + \frac{\underline{D}}{\underline{C}}\underline{I}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2$.

Из (1) следует: $\underline{U}_1 = \underline{A}\left(\frac{1}{\underline{C}}\underline{I}_1 + \frac{\underline{D}}{\underline{C}}\underline{I}_2\right) - \underline{B}\cdot\underline{I}_2 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}\underline{I}_1 + \frac{1}{\underline{C}}\underline{I}_2 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$.

Сравнивая полученные выражения с уравнениями четырехполюсника формы Z, находим соотношения между коэффициентами двух форм:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}};\quad \underline{Z}_{12} = \frac{1}{\underline{C}};\quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}};\quad \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}.$$

2. Схемы замещения четырехполюсника

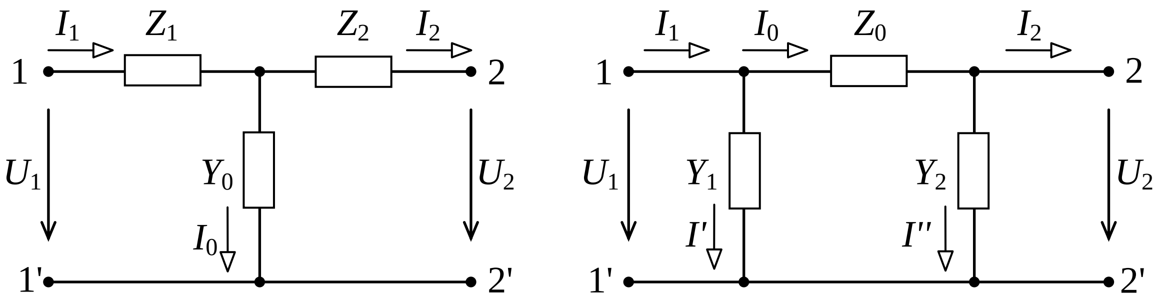
Так как четырехполюсник характеризуется тремя независимыми коэффициентами, то из этого следует, что его простейшая схема замещения должна содержать три независимые элементы. Существует две такие схемы: а) Т-образная схема или схема звезды, б) П-образная схема или схема треугольника (рис. 135, *а*, *б*).

Установим соотношения между коэффициентами четырехполюсника $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ и параметрами элементов схем замещения.

На основании законов Кирхгофа получим для Т-образной схемы (рис. 135, *а*):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = \underline{I}_2 + (\underline{U}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_2)\underline{Y}_0 = \underline{U}_2\underline{Y}_0 + \underline{I}_2(1 + \underline{Z}_2\underline{Y}_0),$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 Z_1 + \underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{U}_2 = \underline{U}_2(1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_0) + \underline{I}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}_0).$$



а *б*

Рис. 135

Сравнивая полученные выражениями с уравнениями четырехполюсника формы *A*, находим нужные соотношения:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_0; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2\underline{Y}_0;$$

$$\underline{Y}_0 = \underline{C}; \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}}.$$

На основании законов Кирхгофа получим для П-образной схемы (рис. 135, *б*):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_0\underline{Z}_0 = \underline{U}_2 + (\underline{I}_2 + \underline{U}_2\underline{Y}_2)\underline{Z}_0 = \underline{U}_2(1 + \underline{Y}_2\underline{Z}_0) + \underline{I}_2\underline{Z}_0,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}'_2 + \underline{I}'_1 = \underline{I}_2 + \underline{U}_2\underline{Y}_2) + \underline{U}_1\underline{Y}_1 = \underline{U}_2(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}_0) + \underline{I}_2(1 + \underline{Y}_1\underline{Z}_0).$$

Сравнивая полученные выражения с уравнениями четырехполюсника формы А, находим нужные соотношения:

$$\underline{A}=1+\underline{Y}_2\underline{Z}_0;\quad \underline{B}=\underline{Z}_0;\quad \underline{C}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}_0;\quad \underline{D}=1+\underline{Y}_1 Z_0;$$

$$Z_0=\underline{B};\quad \underline{Y}_1=\frac{\underline{D}-1}{\underline{B}};\quad \underline{Z}_2=\frac{\underline{A}-1}{\underline{B}}.$$

Для семитричного четырехполюсника должны выполняться равенства: $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2$ – для Т-образной схемы и $\underline{Y}_1=\underline{Y}_2$ – для П-образной схемы.

Переход от Т-образной схемы к П-образной и наоборот выполняется по известным формулам преобразования схемы звезды в схему треугольника и наоборот.

3. Определение коэффициентов четырехполюсника

Коэффициенты четырехполюсника могут быть определены расчетным или экспериментальным путем. Если известна внутренняя структура (схема) четырехполюсника и параметры отдельных элементов, то коэффициенты четырехполюсника определяются расчетным путем по одному из двух методов.

Сущность первого метода состоит в том, что сложная схема четырехполюсника путем последовательных преобразований сворачивается к простейшей Т- или П-образной схеме. Коэффициенты четырехполюсника определяются по соответствующим формулам, полученным ранее для этих схем.

Пусть требуется определить коэффициенты четырехполюсника, схема которого приведена на рис. 136.

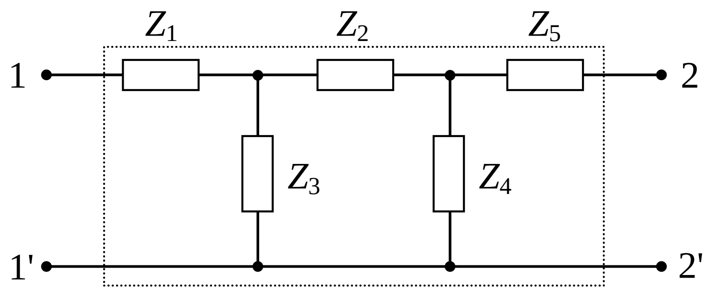


Рис. 136

Выполняется первое преобразование: треугольник $\underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$ преобразуется в эквивалентную звезду $\underline{Z}_6, \underline{Z}_7, \underline{Z}_8$ (рис. 137):

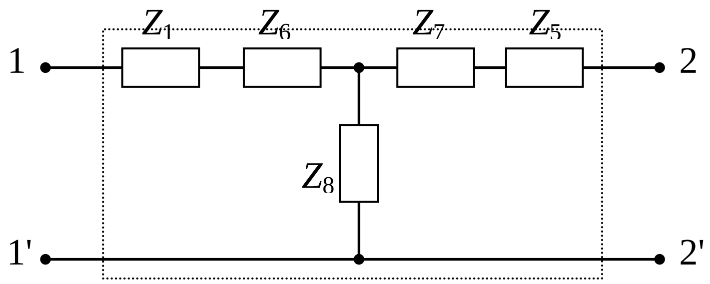


Рис. 137

Затем выполняются последовательные преобразования $\underline{Z}_{1Э} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_6$, $\underline{Z}_{2Э} = \underline{Z}_7 + \underline{Z}_5$, $\underline{Y}_0 = 1/\underline{Z}_8$, после чего схема получает стандартный Т-образный вид (рис. 138):

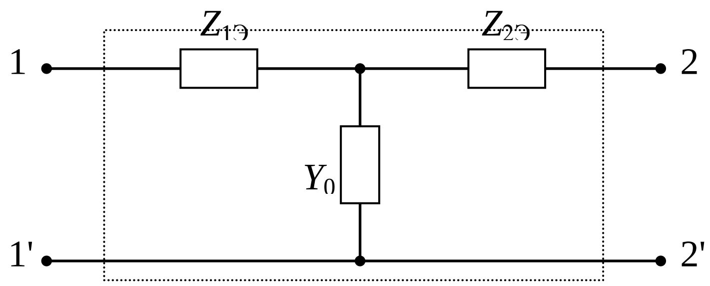


Рис. 138

Коэффициенты четырехполюсника находятся по формулам для Т-схемы:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_{1Э}\underline{Y}_0; \quad \underline{B} = \underline{Z}_{1Э} + \underline{Z}_{2Э} + \underline{Z}_{1Э}\underline{Z}_{2Э}\underline{Y}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_{2Э}\underline{Y}_0.$$

Сущность второго метода заключается в том, что коэффициенты четырехполюсника определяются через его входные сопротивления со стороны входных ($\underline{Z}_{1X}$ и $\underline{Z}_{1К}$) и выходных ($\underline{Z}_{2X}$ и $\underline{Z}_{2К}$) выводов в режимах холостого хода и короткого замыкания на противоположной стороне. Значения этих сопротивлений могут быть найдены аналитически методом свертки схемы четырехполюсника в соответствующем режиме (х.х. или к.з.) относительно его выводов.

При питании четырехполюсника со стороны первичных выводов применяются уравнения формы *A*:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\cdot\underline{U}_2 + \underline{B}\cdot\underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C}\cdot\underline{U}_2 + \underline{D}\cdot\underline{I}_2$$

В режиме холостого хода на вторичной стороне $\underline{I}_{2X} = 0$, а в режиме короткого замыкания $\underline{U}_{2К} = 0$. Из уравнений следует:

$$\underline{Z}_{1X} = \frac{\underline{U}_{1X}}{\underline{I}_{1X}} = \frac{\underline{A}\cdot\underline{U}_{2X} + 0}{\underline{C}\cdot\underline{U}_{2X} + 0} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}},$$

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{U}_{1K}}{\underline{I}_{1K}} = \frac{0 + \underline{B}\cdot\underline{I}_{2K}}{0 + \underline{D}\cdot\underline{I}_{2K}} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}.$$

При питании четырехполюсника со стороны вторичных выводов применяются уравнения формы *B*:

$$\underline{U}_2 = \underline{D}\cdot\underline{U}_1 + \underline{B}\cdot\underline{I}_1,$$
$$\underline{I}_2 = \underline{C}\cdot\underline{U}_1 + \underline{A}\cdot\underline{I}_1.$$

В режиме холостого хода на первичной стороне $\underline{I}_{1\text{X}} = 0$, а в режиме короткого замыкания $\underline{U}_{1\text{K}} = 0$. Из уравнений следует:

$$\underline{Z}_{2X} = \frac{\underline{U}_{2X}}{\underline{I}_{2X}} = \frac{\underline{D}\cdot\underline{U}_{1X} + 0}{\underline{C}\cdot\underline{U}_{1X} + 0} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}},$$

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{U}_{2K}}{\underline{I}_{2K}} = \frac{0 + \underline{B}\cdot\underline{I}_{1K}}{0 + \underline{A}\cdot\underline{I}_{1K}} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}.$$

Совместное решение полученных уравнений позволяет установить связь между входными сопротивлениями четырехполюсника в режиме холостого хода и короткого замыкания, но не дает возможности определить его коэффициенты:

$$\frac{\underline{Z}_{1X}}{\underline{Z}_{1K}} = \frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{2K}}.$$

Для определения коэффициентов четырехполюсника берут любые три из четырех уравнений для входных сопротивлений и дополняют их уравнением связи между коэффициентами $\underline{A}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{C} = 1$, после чего решают полученную систему из четырех уравнений. В качестве примера возьмем уравнения для $\underline{Z}_{1X}$, $\underline{Z}_{2X}$ и $\underline{Z}_{2K}$, тогда получим:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{1X} = \dfrac{\underline{A}}{\underline{C}}, \quad \text{откуда } \underline{C} = \underline{A}\cdot\dfrac{1}{\underline{Z}_{1X}} & (1) \\ \underline{Z}_{2X} = \dfrac{\underline{D}}{\underline{C}}, \quad \text{откуда } \underline{D} = \underline{A}\cdot\dfrac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X}} & (2) \\ \underline{Z}_{2K} = \dfrac{\underline{B}}{\underline{A}}, \quad \text{откуда } \underline{B} = \underline{A}\cdot\underline{Z}_{2K} & (3) \\ \underline{A}\cdot\underline{D} - \underline{B}\cdot\underline{C} = 1 & (4) \end{cases}$$

Из уравнений (1), (2) и (3) делаем подстановку в уравнение (4), получим:

$$\underline{A}\cdot\underline{A}\cdot\frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X}}-\underline{A}\cdot\underline{A}\cdot\frac{\underline{Z}_{2K}}{\underline{Z}_{1X}}=1, \qquad \text{откуда следует } \underline{A}=\pm\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1X}}{\underline{Z}_{2X}-\underline{Z}_{2K}}}.$$

Остальные коэффициенты ($\underline{B}$, $\underline{C}$, D) получим путем подстановки найденного значения $\underline{A}$ в уравнения (1), (2) и (3).

При извлечении квадратного корня получаются два значения коэффициента $\underline{A}$ и, соответственно, всех остальных коэффициентов, отличающиеся знаком (+ или –) или аргументом в $\pm 180^{o}$, например $\underline{A}' = A\cdot ej^{\alpha}$, $\underline{A}'' = -\underline{A}' = A\cdot e^{j(\alpha\pm 180)}$

Двойственность решения объясняется тем фактом, что входные сопротивления любой цепи, в том числе четырехполюсника, не зависят от полярности выводов. С другой стороны, изменения полярности двух выводов четырехполюсника (1 $\Leftrightarrow$ 1' или 2 $\Leftrightarrow$ 2') приводит к изменению знаков перед всеми его коэффициентами. Таким образом, для утверждения знаков перед коэффициентами необходимы дополнительные исследования.

Входные комплексные сопротивления четырехполюсника могут быть измерены экспериментально по схеме рис. 139:

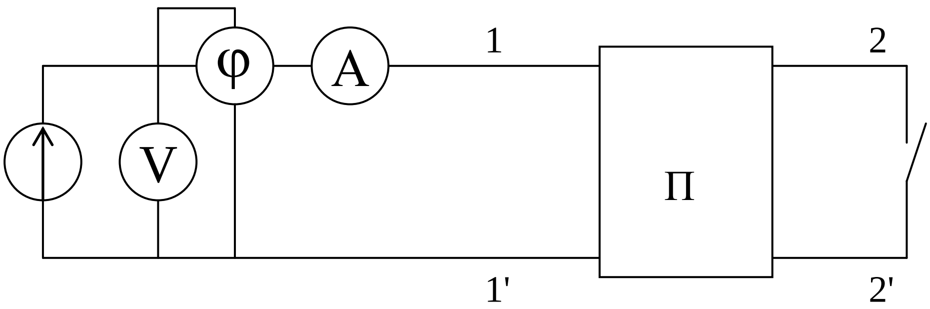


Рис. 139

Комплексное входное сопротивление цепи находится по формуле:

$$\underline{Z}вх=\frac{U}{I}\cdot e^{j\varphi},$$

где U, I, φ –показания приборов в исследуемой цепи.

4. Способы соединения четырехполюсников

Сложная цепь или схема может содержать несколько четырехполюсников, соединенных между собой тем или иным образом. При расчете таких схем отдельные группы четырехполюсников можно заменить эквивалентными одиночными четырехполюсниками и, таким образом, упростить схему цепи и, соответственно, решение задачи.

Различают 5 способов соединения четырехполюсников между собой:

а) каскадное, б) последовательное, в) параллельное, г) последовательно-параллельное, д) параллельно-последовательное.

На рис. 140 показано каскадное соединение двух четырехполюсников П' и П'':

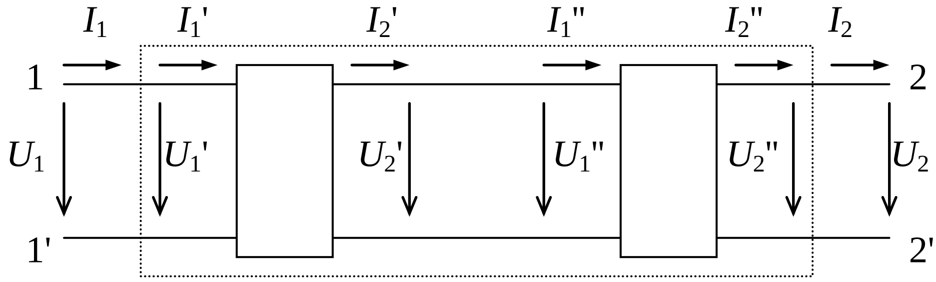


Рис. 140

Для каскадного соединения, как видно из схемы удовлетворяются следующие равенства (в матричной форме):

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_1' \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_1'' \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} \underline{U}_2'' \\ \underline{I}_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}.$$

Используя уравнения четырехполюсника формы А, получим:

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_1' \end{vmatrix} = |\underline{A}'| \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{vmatrix} = |\underline{A}'| \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_1'' \end{vmatrix} = |\underline{A}'| \cdot |\underline{A}''| \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2'' \\ \underline{I}_2'' \end{vmatrix} = |\underline{A}| \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, матрица коэффициентов эквивалентного четырехполюсника равен произведению матриц каскадно включенных четырехполюсников:

$$|\underline{A}| = |\underline{A}'| \cdot |\underline{A}''| = \begin{vmatrix} \underline{A}' & \underline{B}' \\ \underline{C}' & \underline{D}' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{A}'' & \underline{B}'' \\ \underline{C}'' & \underline{D}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\underline{A}'\underline{A}''+\underline{B}'\underline{C}'') & (\underline{A}'\underline{B}''+\underline{B}'\underline{D}'') \\ (\underline{C}'\underline{A}''+\underline{D}'\underline{C}'') & (\underline{C}'\underline{B}''+\underline{D}'\underline{D}'') \end{vmatrix}.$$

При последовательном соединении двух четырехполюсников включаются последовательно их входы и последовательно их выходы (рис. 141):

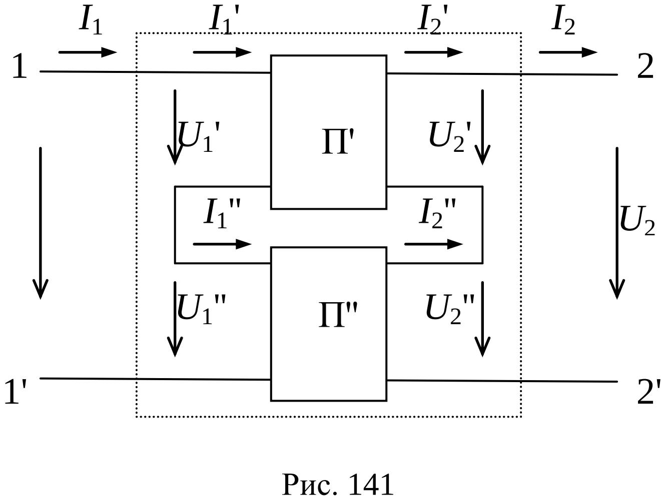


Рис. 141

Для последовательного соединения, как следует из схемы (рис. 165), удовлетворяются следующие равенства:

$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' + \underline{U}_1''$; $\underline{U}_2 = \underline{U}_2' + \underline{U}_2''$; $\underline{I}_1 = \underline{I}_1' = \underline{I}_1''$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_2' = \underline{I}_2''$.

Используя уравнения четырехполюсника формы Z, получим:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{bmatrix} = [\underline{Z}'] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \end{bmatrix} + [\underline{Z}''] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{bmatrix} = \{[\underline{Z}'] + [\underline{Z}'']\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица коэффициентов $[\underline{Z}]$ эквивалентного четырехполюсника равна сумме матриц последовательно включенных четырехполюсников: $[\underline{Z}] = [\underline{Z}'] + [\underline{Z}'']$.

При параллельном соединении двух четырехполюсников включаются параллельно их входы и параллельно их выходы (рис. 142):

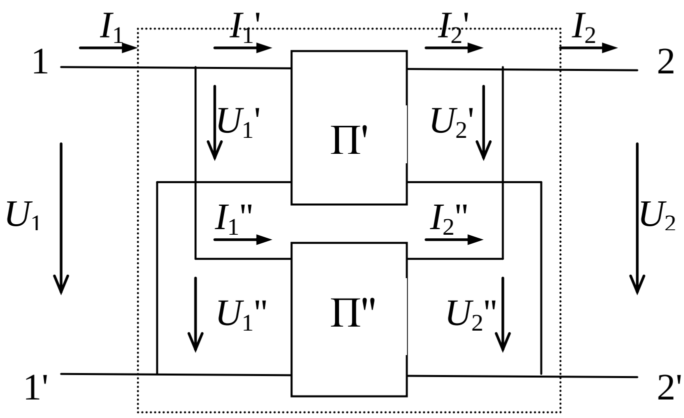


Рис. 142

Для параллельного соединения, как следует из схемы (рис. 166), удовлетворяют следующие равенства:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1'' \ ; \ \underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_2'' \ ; \ \underline{U}_1' = \underline{U}_1'' = \underline{U}_1 \ ; \ \underline{U}_2' = \underline{U}_2'' = \underline{U}_2 .$$

Используя уравнения четырехполюсника формулы Y, получим:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{bmatrix} = [\underline{Y}'] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{bmatrix} + [\underline{Y}''] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{bmatrix} = \{[\underline{Y}'] + [\underline{Y}'']\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица коэффициентов $[\underline{Y}]$ эквивалентного четырехполюсника равна сумме матриц последовательно включенных четырехполюсников: $[\underline{Y}]=[\underline{Y}']+[\underline{Y}'']$.

При параллельно-последовательном соединении двух четырехполюсников их входы включаются параллельно, а выходы – последовательно. При свертке схемы используются уравнения формы G:

$$\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{I}_1'\\ \underline{U}_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\underline{I}_1''\\ \underline{U}_2''\end{bmatrix}=\{[\underline{G}']+[\underline{G}'']\}\cdot\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix}=[\underline{G}]\cdot\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix},$$

где $[G]=[G']+[G'']$ – матрица коэффициентов [G] эквивалентного четырехполюсника.

При последовательно-параллельном соединении двух четырехполюсников их входы включаются последовательно, а выходы – параллельно. При свертке схемы используются уравнения формы *H*:

.

$$\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{U}_1'\\ \underline{I}_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\underline{U}_1''\\ \underline{I}_2''\end{bmatrix}=\{[\underline{H}']+[\underline{H}'']\}\cdot\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix}=[\underline{H}]\cdot\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ U_2\end{bmatrix},$$

где $[\underline{H}]=[\underline{H}']+[\underline{H}'']$ – матрица коэффициентов [*H*] эквивалентного четырехполюсника.

5. Характеристические параметры симметричного четырехполюсника

Для симметричного четырехполюсника коэффициент $\underline{A}=\underline{D}$ и система уравнений формы *A* имеет вид:

$$\begin{cases}\underline{U}_1=\underline{A}\cdot\underline{U}_2+\underline{B}\cdot\underline{I}_2\\ \underline{I}_1=\underline{C}\cdot\underline{U}_2+\underline{A}\cdot\underline{I}_2\\ \underline{A}^2-\underline{B}\cdot\underline{C}=1\end{cases}$$

Характеристическим сопротивлением четырехполюсника $\underline{Z}_C$ называется такое сопротивление нагрузки $\underline{Z}_2=\underline{Z}_C$, при котором входное сопротивление четырехполюсника со стороны первичных выводов также равно сопротивлению нагрузки:

$$\underline{Z}_C=\underline{Z}_2=\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}=\underline{Z}_1=\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$$

Установим связь между характеристическим сопротивлением $\underline{Z}_C$ и коэффициентами четырехполюсника $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$. Для этой цели преобразуем уравнения четырехполюсника:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = AU_2 + BI_2 = U_2\left(A + \dfrac{B}{Z_C}\right) = \underline{I}_2\left(\underline{A}\underline{Z}_C + \underline{B}\right) & (1) \\ \underline{I}_1 = CU_2 + AI_2 = U_2\left(C + \dfrac{A}{Z_C}\right) = \underline{I}_2\left(\underline{C}\underline{Z}_C + \underline{A}\right) & (2) \end{cases}$$

Разделим уравнение (1) на уравнение (2):

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_C + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_C + \underline{A}} = \underline{Z}_C,$$

откуда получаем $\underline{Z}_C = \sqrt{\dfrac{\underline{B}}{\underline{C}}} = Z_C e^{j\varphi_C}$, где $-90^\circ \le \varphi_C \le 90^\circ$;

из (1) $\Rightarrow$ $\dfrac{U_1}{U_2} = A + \dfrac{B}{Z_C} = A + \sqrt{BC} = Me^{j\beta} = e^{\alpha}e^{j\beta} = e^{\alpha + j\beta} = e^{g}$;

из (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{I_1}{I_2} = A + CZ_C = A + \sqrt{BC} = e^{g}$,

где $g = \alpha + j\beta = \ln(A + \sqrt{BC})$ – постоянная (коэффициент) передачи четырехполюсника.

Вещественная часть коэффициента передачи α показывает, как изменяется модуль напряжения (тока) при переходе через четырехполюсник, поэтому называется коэффициентом затухания:

$\alpha = \ell n\dfrac{|U_1|}{|U_2|} = \ell n\dfrac{|I_1|}{|I_2|}$ [Нп] или [Непер] – основная единица измерения затухания.

Затухание в 1Нп соответствует уменьшению модуля величины в e = 2,72 раза. На практике для измерения затухания сигналов применяется другая, более удобная для практики единица, а именно: 1 децибелл [дБ], которая определяется согласно уравнению:

$$\alpha = 20\lg\frac{|U_1|}{|U_2|} \text{ [дБ] ; } 1 \text{ дБ} = 10^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}122 \text{ раза.}$$

Соотношение между единицами затухания:

1Нп = 8,086 дБ ; 1дБ = 0,115Нп.

Мнимая часть коэффициента передачи показывает, как изменяется фаза напряжения (тока) при переходе через четырехполюсник, поэтому называется коэффициентом фазы:

$$\beta = \psi_{U1} - \psi_{U2} = \psi_{I1} - \psi_{I2} \text{ [рад]}$$

Характеристическое сопротивление $\underline{Z}_C$ и коэффициент передачи $\underline{g} = \alpha + j\beta$ называются характеристическими параметрами четырехполюсника.

Выразим коэффициенты четырехполюсника через его характеристические параметры $\underline{Z}_C$ и $\underline{g}$.

Преобразуем уравнение связи между коэффициентами:

$$A^2 - BC = \left(A + \sqrt{BC}\right)\left(A - \sqrt{BC}\right) = 1.$$

Так как $A + \sqrt{BC} = e^g$, то, следовательно,

$$A - \sqrt{BC} = \frac{1}{A + \sqrt{BC}} = \frac{1}{e^g} = e^{-g}.$$

Решаем совместно полученные уравнения:

$$\begin{cases} A + \sqrt{BC} = e^g \\ A - \sqrt{BC} = e^{-g} \end{cases}$$

Откуда следует, что $\underline{A} = \dfrac{e^g + e^{-g}}{2} = ch\underline{g}$, $\sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}} = \dfrac{e^g - e^{-g}}{2} = sh\underline{g}$.

Учитывая, что $\underline{Z}_C = \sqrt{\dfrac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \dfrac{\underline{B}}{\sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}} = \dfrac{\sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}}{\underline{C}}$, получим для коэффициентов:

$$\underline{B} = \underline{Z}_C \cdot \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}} = \underline{Z}_C \cdot sh\underline{g}, \qquad \underline{C} = \frac{\sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{\underline{Z}_C} sh\underline{g}.$$

С учетом этих выражений основные уравнения формы А получат окончательный вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot ch\underline{g} + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \cdot sh\underline{g} \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cdot ch\underline{g} + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \cdot sh\underline{g} \end{cases}$$

Данная форма уравнений четырехполюсника используется в теории цепных схем и в теории электрических фильтров.

6. Основные понятия и определения электрических фильтров

Электрическим фильтром называется четырехполюсник, предназначенный для выделения (пропускания) сигналов определенной полосы частот. В зависимости от пропускаемого спектра частот фильтры подразделяют на 4 основных вида:

1) фильтры низких частот (ФНЧ), пропускающие сигналы в диапазоне частот от ω_1=0 до ω_2;

2) фильтры высоких частот (ФВЧ), пропускающие сигналы в диапазоне частот от ω_1 до $\omega_2 = \infty$;

3) полосовые фильтры (ПФ), пропускающие сигналы в диапазоне частот от ω_1 до ω_2;

4) заграждающие или режекторные фильтры (ЗФ), пропускающие сигналы в диапазоне частот от 0 до ω_1 и в диапазоне частот от ω_2 до ∞ и не пропускающие сигналы в диапазоне частот от ω_1 до ω_2.

Коэффициентом передачи напряжения фильтра называется отношение комплексных выходного напряжения ко входному:

$$\underline{k}(\omega) = \frac{\underline{U}m_2}{\underline{U}m_1} = \frac{Um_2}{Um_1} ej^{(\alpha 2 - \alpha 1)} = k(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

где $k(\omega) = \dfrac{Um_2}{Um_1}$ показывает, как изменяется с частотой амплитуда выходного напряжения, и называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) фильтра; $\varphi(\omega) = (\alpha_2 - \alpha_1)$ показывает, как изменяется с частотой фаза выходного напряжения, и называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) фильтра.

Диапазон частот, в котором фильтр пропускает к приемнику сигналы практически без изменения, называется полосой пропускания или зоной прозрачности фильтра. В полосе пропускания для идеального фильтра должны удовлетворяться два условия: 1) $U_2 = U_1$, при этом $k(\omega) = 1$; 2) $\varphi(\omega) = -\tau\omega$, при этом все гармоники сигнала будут иметь одинаковое время запаздывания $\Delta t = \dfrac{-\tau\kappa\omega t}{\kappa\omega t} = -\tau$. При выполнении этих условий сигнал на выходе фильтра не изменится.

Электрические фильтры можно классифицировать:

1) по типу элементов, из которых они состоят, на а) реактивные, состоящие только из реактивных элементов *L* и *C;* б) безиндукционные, состоящие из элементов *R* и *C*; и др.;

2) по способу соединения элементов между собой на Т-, П- и Г-образные;

3) по виду частотных характеристик на типа “*k*” и типа “*m*”.

Электрические фильтры широко применяются в радиотехнике, в технике связи. В электроэнергетике фильтры применяются для сглаживания пульсаций выпрямленного напряжения.

7. Симметричные реактивные фильтры

Реактивные фильтры состоят только из реактивных элементов L и C. Существует две простейшие симметричные схемы таких фильтров: Т-образная или Т-схема (рис. 143, а) и П-образная или П-схема (рис. 143, б).

Рассматривая схемы фильтра как схемы четырехполюсника, выразим коэффициент $\underline{A}$ через параметры элементов:

$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0 = 1 + \dfrac{\underline{Z}_T \underline{Y}_T}{2}$ – для Т-образной схемы;

$\underline{A} = 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0 = 1 + \dfrac{\underline{Z}_П \underline{Y}_П}{2}$ – для П-образной схемы.

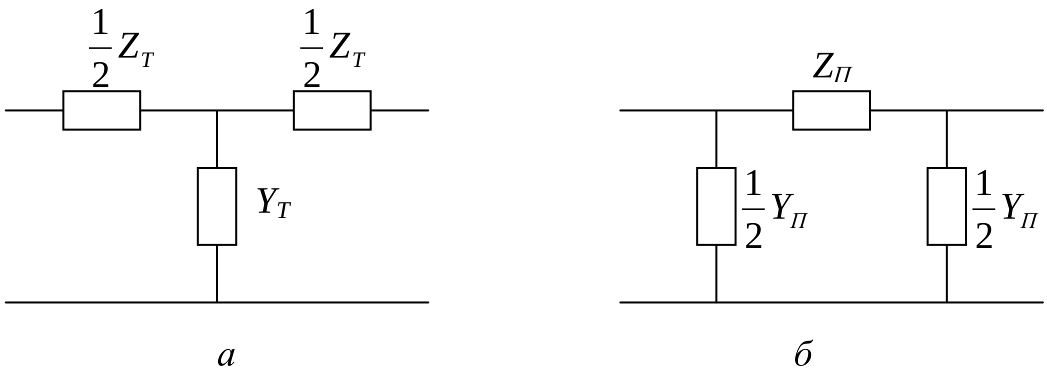


Рис. 143

Следовательно, независимо от схемы фильтра $\underline{A} = 1 + \dfrac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{2}$. Так как по условию $\underline{Z}$ и $\underline{Y}$ являются чисто мнимыми числами, то их произведение $\underline{Z} \cdot \underline{Y}$ является чисто вещественным, и, следовательно, коэффициент $\underline{A}$ также является чисто вещественным. Ранее было получено:

$$\underline{A} = ch\underline{g} = ch(\alpha + j\beta) = ch\alpha \cdot \cos\beta + jsh\alpha \cdot \sin\beta = A + j0,$$

где $\underline{g} = \alpha + j\beta = \ln(\underline{A} + \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}} = \ln \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}$ – коэффициент передачи фильтра

Комплексное уравнение распадается на 2 вещественных:

$$\begin{cases} sh\alpha \cdot \sin\beta = 0 \\ ch\alpha \cdot \cos\beta = 1 + \dfrac{ZY}{2} = A \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет два решения.

<u>1-е решение</u>: $\alpha = 0;\quad sh\alpha = 0;\quad ch\alpha = 1;\quad \cos\beta = 1 + \dfrac{ZY}{2} = A.$ Это решение соответствует полосе пропускания фильтра и существует при условии

$ZY < 0$, что возможно, если одна из этих величин носит индуктивный характер, а другая – емкостный. Диапазон частот, удовлетворяющих решению, определяется соотношением:

$$-1 \le 1 + \frac{ZY}{2} \le +1 \quad \text{или} \quad 0 \le -ZY \le 4.$$

Частоты, определяющие границы полосы пропускания фильтра, находятся из решения неравенства:

1) $-ZY = 0$; 2) $-ZY = +4$.

Характеристическое сопротивление схем может быть выражено через параметры элементов:

$$\underline{Z}_{CT} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{1 + \underline{Z}\cdot\underline{Y} + \frac{\underline{Z}^2\underline{Y}^2}{4} - 1}{\underline{Y}^2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\underline{Z}\cdot\underline{Y}}{4}} = f(\omega)$$ – для Т-схемы;

$$\underline{Z}_{C\Pi} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}^2}{1 + \underline{Z}\cdot\underline{Y} + \frac{\underline{Z}^2\underline{Y}^2}{4} - 1}} = \frac{\sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}}}{\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}\cdot\underline{Y}}{4}}} = f(\omega)$$ – для П-схемы.

В полосе пропускания характеристическое сопротивление фильтра является чисто активным, но зависит от частоты. Это означает, что фильтр не может иметь одинаковый коэффициент передачи для всех частот полосы пропускания, если сопротивление приемника остается постоянным.

2-е решение: $\sin\beta = 0; \quad \cos\beta = -1; \quad ch\alpha = -\left(1 + \frac{ZY}{2}\right) = -A.$ Это решение соответствует полосе задерживания, так как здесь $\alpha > 0$. Границы этой полосы определяются из условия:

$$1 \le 1 + \frac{ZY}{2} \le \infty \quad \text{или} \quad 4 \le -ZY \le \infty.$$

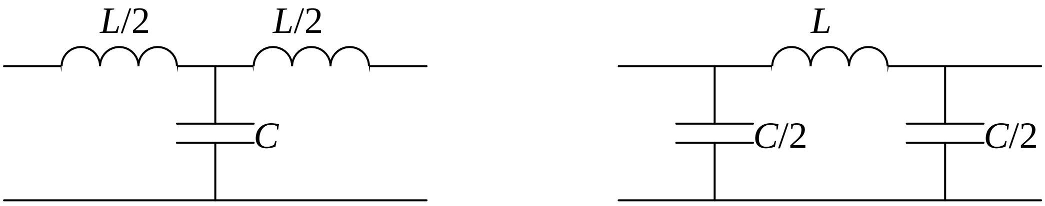
Частоты, определяющие границы полосы задерживания фильтра, находятся из решения неравенства:

1) $-ZY = 4$; 2) $-ZY = \infty$.

Характеристическое сопротивление фильтра в полосе задерживания носит реактивный характер и зависит от частоты.

8. Фильтры нижних частот типа *к*

Простейшие Т- и П-схемы фильтров нижних частот типа *к* приведены на рис. 144, *а*, *б*:



а) Т-схема б) П-схема

Рис.144

Для обеих схем:

$$\underline{Z} = j\omega L; \quad \underline{Y} = j\omega C; \quad k = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \text{const}.$$

Граничные частоты для полосы пропускания определяются из условия:

$$-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = j\omega L \cdot j\omega C = \omega^2 LC = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases},$$

откуда следует $\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \dfrac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_0$. Фильтр низкой частоты пропускает сигналы в диапазоне частот от $\omega_1 = 0$ до ω_0.

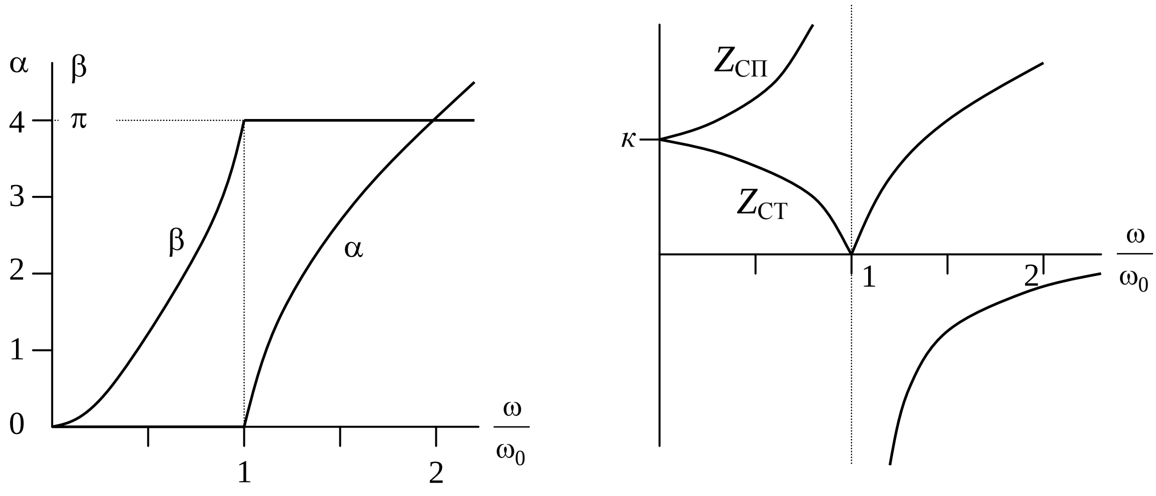
Характеристическое сопротивление для Т- и П-образных схем:

$$Z_{\text{СТ}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} = k \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}, \qquad Z_{\text{СТ}} = \frac{\sqrt{\dfrac{L}{C}}}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega^2 LC}{4}}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}}.$$

Для коэффициента фазы в полосе пропускания решение имеет вид:

$$\beta = \arccos A = \arccos\left(1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{2}\right) = \arccos\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right) = \arccos\left(1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right).$$

Зависимость характеристических параметров фильтров от частоты показана на рис. 145, *а*, *б*.



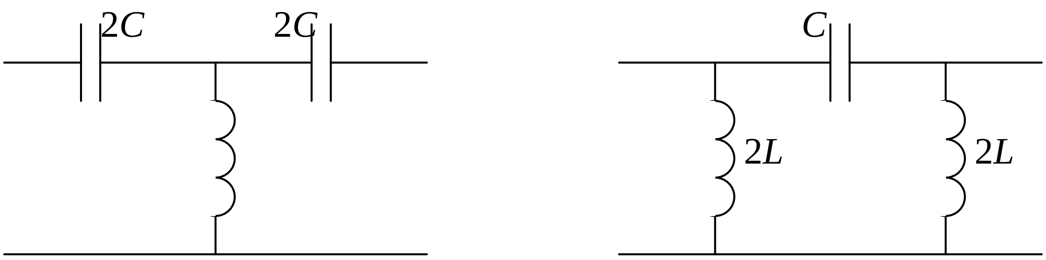
а *б*

Рис. 145

В полосе пропускания характеристическое сопротивление для обеих схем зависит от частоты, поэтому для нормальной работы фильтра требуется согласование сопротивления нагрузки с фильтром во всем диапазоне частот.

9. Фильтры верхних частот типа *к*.

Простейшие Т- и П-схемы фильтров верхних частот типа *к* приведены на рис. 146, *а*, *б*:



а) Т-схема б) П-схема

Рис. 146

Для обеих схем:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}; \quad \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L}; \quad k = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \text{const}.$$

Граничные частоты для полосы пропускания определяются из условия:

$$-\underline{Z}\cdot\underline{Y}=\frac{1}{j\omega L\cdot j\omega C}=\frac{1}{\omega^2 LC}=\begin{cases}0\\4\end{cases},$$

откуда следует $\omega_1=\frac{2}{\sqrt{LC}}=\omega_0$; $\omega_2=\infty$. Фильтр высокой частоты пропускает сигналы в диапазоне частот от $\omega_1=\omega_0$ до ∞.

Характеристическое сопротивление для Т- и П-образных схем:

$$Z_{\text{СТ}}=\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4\omega^2 LC}}=k\cdot\sqrt{1-\frac{\omega_0^{\,2}}{\omega^2}},$$

$$Z_{\text{СП}}=\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4\omega^2 LC}}}=\frac{k}{\sqrt{1-\frac{\omega_0^{\,2}}{\omega^2}}}.$$

Для коэффициента фазы в полосе пропускания решение имеет вид:

$$\beta=\arccos A=\arccos\left(1+\frac{\underline{Z}\cdot\underline{Y}}{2}\right)=\arccos\left(1-\frac{1}{2\omega^2 LC}\right)=\arccos\left(1-2\frac{\omega_0^{\,2}}{\omega^2}\right).$$

Зависимость характеристических параметров фильтров от частоты показана на рис. 147, *а*, *б*:

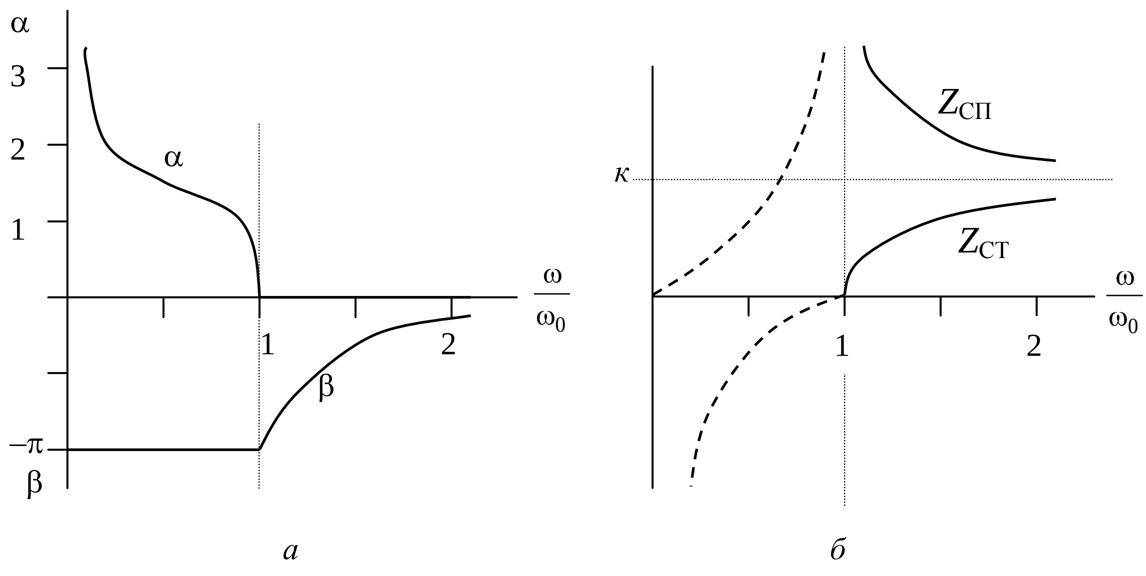


Рис. 147

В полосе пропускания характеристическое сопротивление для обеих схем зависит от частоты, поэтому для нормальной работы фильтра требуется согласование сопротивления нагрузки с фильтром во всем диапазоне частот.

10. Полосовые фильтры

Простейшие Т- и П-схемы полосовых фильтров приведены на рис. 148 и рис. 149:

Параметры элементов фильтра должны удовлетворять условиям: при заданной частоте ω_0 продольное сопротивление $\underline{Z} = j\omega_0 L - j\dfrac{1}{\omega_0 C} = 0$ (резонанс напряжений) и поперечная проводимость $\underline{Y} = j\omega_0 C - j\dfrac{1}{\omega_0 L} = 0$ (резонанс токов), откуда следует:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad \text{или} \quad L_1 C_1 = L_2 C_2, \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{n^2}.$$

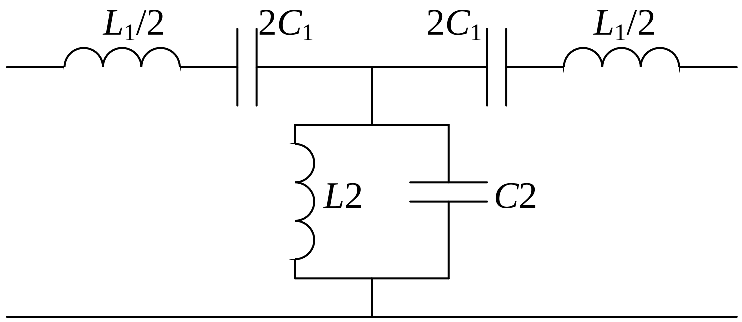


Рис. 148

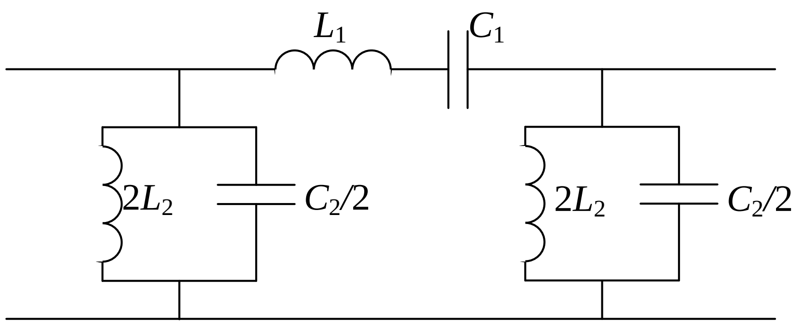


Рис. 149

Обобщенные параметры элементов для обеих схем:

$$\underline{Z} = j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = j\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \left(\omega\sqrt{L_1 C_1} - \frac{1}{\omega\sqrt{L_1 C_1}}\right) = j\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right),$$

$$\underline{Y} = j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = j\sqrt{\frac{C_2}{L_2}} \cdot \left(\omega\sqrt{L_2C_2} - \frac{1}{\omega\sqrt{L_2C_2}}\right) = j\sqrt{\frac{C_2}{L_2}} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Уравнение, определяющее границы полосы пропускания фильтра:

$$-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1} \cdot \frac{C_2}{L_2}} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

При $-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = 0$ решением этого уравнения является принятая ранее частота ω_0.

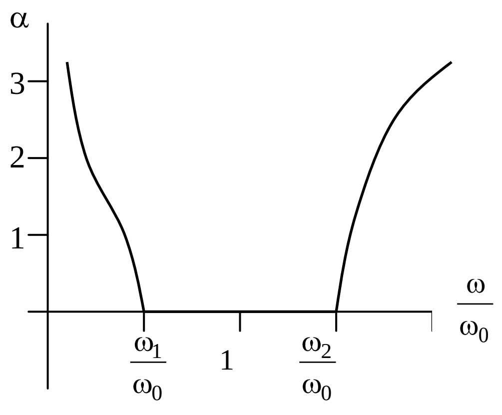
При $-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = 4$ с учетом, что $\sqrt{\frac{L_1}{C_1} \cdot \frac{C_2}{L_2}} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{n^2}$, получим решение в виде: $\frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 4$ или $\omega^2 \pm 2n\omega_0\omega - \omega_0{}^2 = 0$.

Отбрасывая отрицательные корни уравнения, как не имеющие физического смысла, получим значения граничных частот:

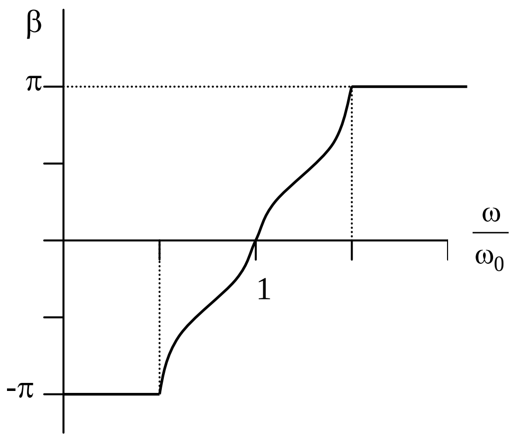
$$\omega_1 = \omega_0\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega_0\left(\sqrt{n^2+1} + n\right).$$

Таким образом, фильтр пропускает сигналы в диапазоне частот от ω_1 до ω_2. Резонансная частота ω_0 является промежуточной и равна среднегеометрическому значению из граничных частот: $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Характеристика затухания $\alpha = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ и фазовая характеристика $\beta = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ показаны на рис. 150, *а*, *б*.



а



б

Рис. 150

11. Заграждающие фильтры

Простейшие Т- и П-схемы заграждающих фильтров приведены на рис. 151 и рис. 152.

Условие резонанса на заданной частоте ω_0: $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}},$$

откуда следует: $L_1 C_1 = L_2 C_2$ или $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{1}{n^2}$.

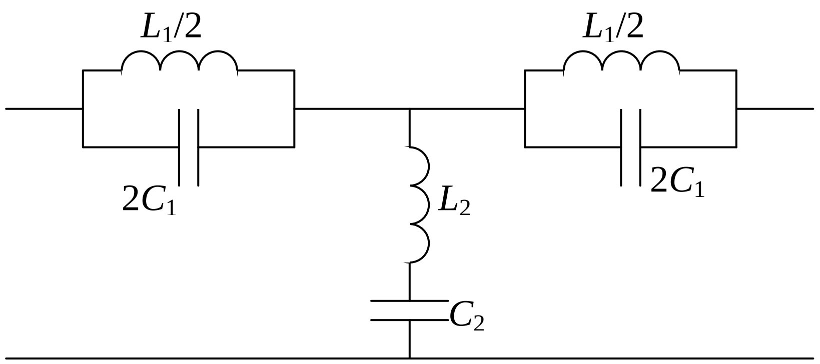


Рис. 151

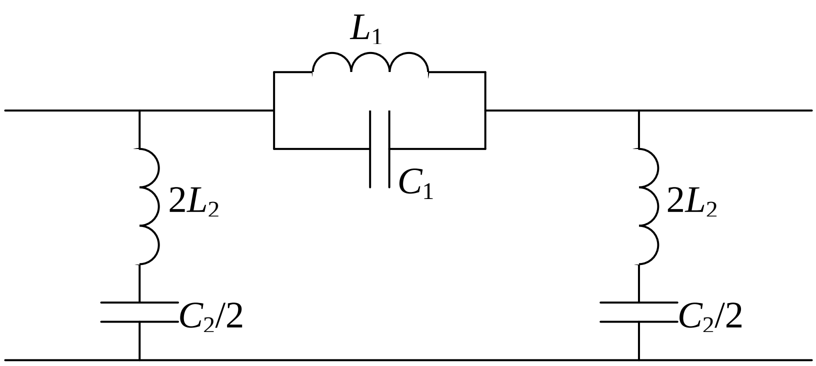


Рис. 152

Обобщенные параметры элементов для обеих схем:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C_1 - j\dfrac{1}{\omega L_1}} = \frac{1}{j\sqrt{\dfrac{C_1}{L_1}}\cdot\left(\omega\sqrt{L_1 C_1} - \dfrac{1}{\omega\sqrt{L_1 C_1}}\right)} = \frac{1}{j\sqrt{\dfrac{C_1}{L_1}}\cdot\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)},$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L_2 - j\dfrac{1}{\omega C_2}} = \frac{1}{j\sqrt{\dfrac{L_2}{C_2}}\cdot\left(\omega\sqrt{L_2 C_2} - \dfrac{1}{\omega\sqrt{L_2 C_2}}\right)} = \frac{1}{j\sqrt{\dfrac{L_2}{C_2}}\cdot\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Уравнение, определяющее границы полосы пропускания фильтра:

$$-\underline{Z}\cdot\underline{Y}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{C_1}{L_1}\cdot\dfrac{L_2}{C_2}}\cdot\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}=\begin{cases}0\\4\end{cases}$$

При $-\underline{Z}\cdot\underline{Y}=0$ решением этого уравнения является $\omega'=0$ и $\omega''=\infty$.

При $-\underline{Z}\cdot\underline{Y}=4$ с учетом, что $\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}\cdot\dfrac{C_2}{L_2}}=\dfrac{L_1}{L_2}=n^2$, получим решение в виде:

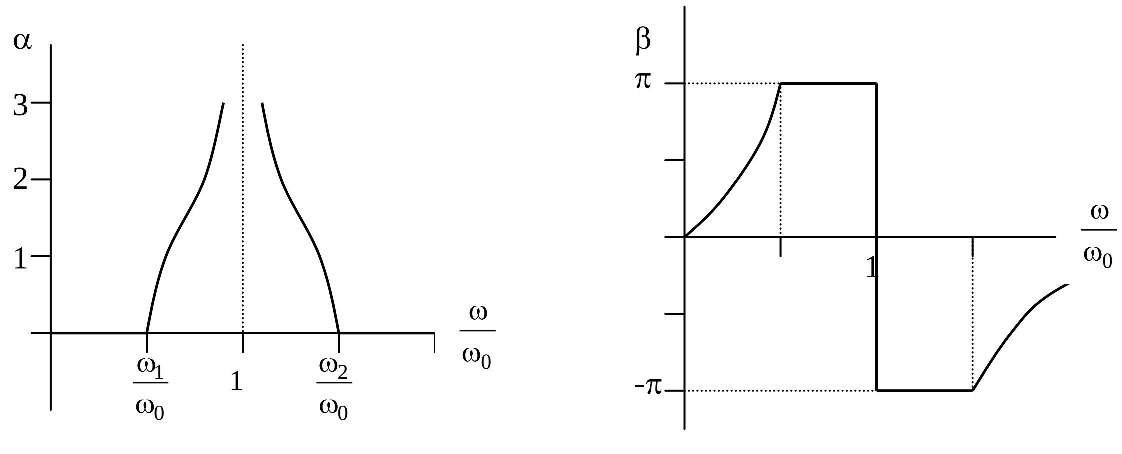
$$\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)=4 \quad \text{или} \quad \omega^2\pm 2n\omega_0\omega-\omega_0{}^2=0.$$

Отбрасывая отрицательные корни уравнения, как не имеющие физического смысла, получим значения граничных частот:

$$\omega_1=\omega_0\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \quad \text{и} \quad \omega_2=\omega_0\left(\sqrt{n^2+1}+n\right).$$

Таким образом, фильтр пропускает сигналы в диапазонах частот от $\omega'=0$ до ω_1 и от ω_2 до $\omega''=\infty$, а в в диапазоне частот от ω_1 до ω_2 сигналы задерживаются. Резонансная частота ω_0 является промежуточной и равна среднегеометрическому значению из граничных частот: $\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$.

Характеристика затухания $\alpha=f\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$ и фазовая характеристика $\beta=f\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$ фильтра показаны на рис. 153, *а*, *б*.



а *б*

Рис. 153

Т11. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1. Общие определения

Параметры электрических цепей в той или иной мере всегда распределены вдоль длины отдельных участков. В большинстве практических случаев распределением параметров вдоль длины пренебрегают и представляют электрическую цепь эквивалентной схемой с сосредоточенными схемными элементами R, L и C.

Однако существует большой класс электрических цепей, для которых пренебрежение распределением параметров вдоль длины приводит к существенным погрешностям при их расчёте и становится неприемлемым.

Из курса физики известно, что электромагнитное поле распространяется вдоль электрической цепи не мгновенно, а с конечной скоростью υ, проходя всю длину цепи l за время $\Delta t = \frac{l}{\upsilon}$. Если за время Δt режимные параметры в цепи (u, i) изменяются незначительно и этим изменением можно пренебречь, то для такой цепи пренебрегают распределением параметров вдоль длины и замещают ее схемой с сосредоточенными элементами. Если за время Δt режимные параметры в цепи (u, i) изменяются на заметную величину, которую необходимо учитывать в расчете, то такие цепи считаются с распределенными параметрами и расчет их проводится уже с учетам распределения параметров вдоль их длины.

Пример 1. Воздушная линия электропередачи длиной l = 50 км работает на частоте f = 50 Гц, скорость волны υ = 300000 км/с, $T = \frac{1}{f}$, $\lambda = \frac{\upsilon}{f} =$ = 6000км, $\Delta t = \frac{l}{\upsilon} = 2 \cdot 10^{-4}$ с, $\Delta\omega t = \frac{360}{T} \cdot \Delta t = 3{,}6^\circ$. Таким образом, фазовый сдвиг для волн напряжения и тока вначале и в конце линии составляет всего $3{,}6^\circ$, чем можно пренебречь и считать такую линию как цепь сосредоточенными параметрами.

Пример 2. Линия электропередачи длиной l = 500 км: f = 50 Гц, скорость волны υ = 300000 км/с, $\Delta t = \frac{l}{\upsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$ с, $\Delta\omega t = \frac{360}{T} \cdot \Delta t = 36^\circ$.

Фазовый сдвиг для волн напряжения и тока в начале и конце линии составляет 36°, расчет режима в такой линии без учета распределения параметров по длине привел бы к существенным ошибкам, поэтому такую линию следует считать как цепь с распределенными параметрами.

Пример 3. Соединительный кабель от комнатной антенны до входного гнезда телевизора имеет длину l = 2 м, телевизионный канал работает на частоте f = 150 МГц, υ = 200000 км/с, $T = \frac{1}{f} = 6{,}67 \cdot 10^{-9}$ с, $\lambda = \frac{\upsilon}{f} = 1{,}3$ м,

$\Delta t = \frac{l}{\upsilon} = 10 \cdot 10^{-9}$ с, $\Delta\omega t = \frac{360}{T} \cdot \Delta t = 540^\circ$.

Вывод: соединительный кабель следует рассматривать как цепь с распределенными параметрами.

При синусоидальном режиме цепи критерием необходимости учета распределения параметров по длине может служить соотношение между длиной линии l и длиной волны λ. Если $l << \lambda$,то цепь рассматривается как с сосредоточенными параметрами (в примере 1 $\frac{l}{\lambda} = \frac{50}{6000} = 0{,}0083$), если l и λ соизмеримы, то цепь рассматривается как с распределенными параметрами (в примере 2 $\frac{l}{\lambda} = \frac{500}{6000} = 0{,}083$, в примере 3 $\frac{l}{\lambda} = \frac{2}{1{,}3} = 1{,}6$).

К цепи с распределенными параметрами относятся все лини связи, линии электропередачи длиной $l > 100$ км.

Одни и те же электрические цепи в зависимости от формы воздействующего напряжения в одних случаях принимаются с распределенными параметрами, а в других – с сосредоточенными параметрами. Например, обмотки силовых трансформаторов при расчете установившихся режимов в них на частоте f = 50 Гц считаются цепями с сосредоточенными параметрами, но при расчете переходных процессов, возникающих в результате коммутации или атмосферных разрядов те же обмотки считаются цепями с распределенными параметрами.

Если параметры цепи распределены равномерно по ее длине, то цепь называется, однородной, если неравномерно – то неоднородной. В курсе ТОЭ рассматриваются только однородные цепи.

2. Дифференциальные уравнения лини с распределенными параметрами

Рассмотрим двухпроводную однородную линию, физические параметры которой равномерно распределены по ее длине:

R_0 – активное сопротивление пары проводов на единицу длины [Ом/м], определяется по известной формуле $R = \rho\frac{l}{s} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{s}$, зависит от материала провода (γ) и от ее температуры $R = R_0(1 + \alpha t)$;

L_0 – индуктивность пары проводов на единицу длины линии [Гн/м], определяется как отношение потокосцепления к току ($L_0 = \frac{\psi_0}{i}$), является отображением магнитного поля линии в ее схеме замещения, зависит от магнитных характеристик среды (μ) и геометрических размеров линии;

G_0 – активная проводимость между проводами на единицу длины линии [См/м], является следствием несовершенства изоляции между проводами, зависит от электрических параметров среды (γ) и геометрических размеров линии;

C_0 – емкость между проводами на единицу длины линии [Ф/м], определяется как отношение заряда к напряжению ($C_0 = \frac{q_0}{U}$), является отображением электрического поля линии в ее схеме замещения, зависит от электрических характеристик среды (ε) и геометрических размеров линии.

Удельные параметры линии R_0, L_0, G_0, C_0 зависят от физических параметров самих проводов и окружающей их среды, поэтому они получили название физических или первичных.

Разделим всю линию на элементарные участки длиной dx и рассмотрим один из таких участков, находящийся на расстоянии x от начала линии. Схема замещения участка будет иметь вид рис. 154. Здесь u и i – напряжение и ток в начале рассматриваемого участка. В конце участка напряжение и ток получают приращения: $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и $\Delta i = \frac{\partial i}{\partial x} dx$.

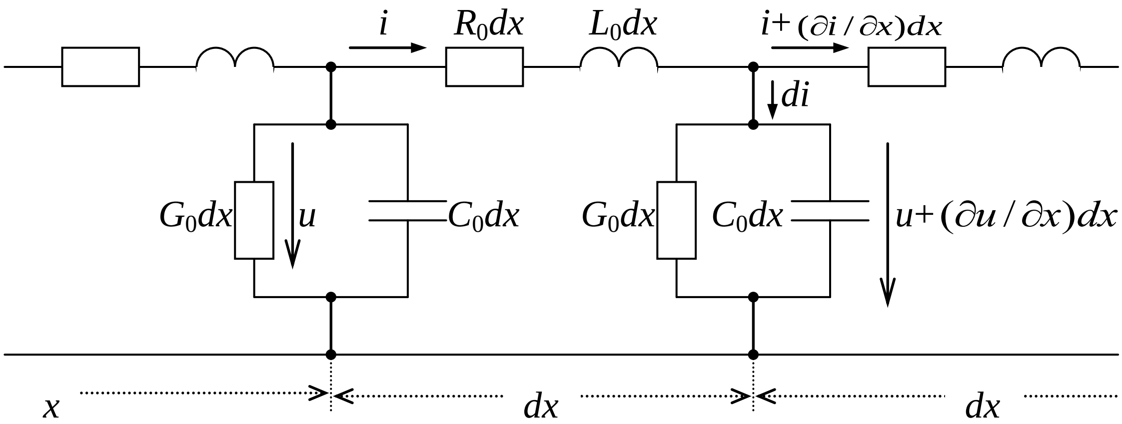


Рис. 154

Функции напряжения и тока (u, i) зависят от двух параметров t и x, они изменяются в пространстве и во времени, поэтому дифференциальные уравнения для схемы замещения следует составлять в частных производных.

Уравнение по 2-му закону Кирхгофа для контура:

$$-u + R_0 dx \cdot i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

После упрощения получим:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \qquad (1)$$

По закону Ома и 1-му закону Кирхгофа:

$$di = (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t}(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = u G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}.$$

В приведенном выражении пренебрегаем слагаемыми второго порядка малости, содержащими $d^2 x$.

По 1-му закону Кирхгофа для узла:

$$i = i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx + di = i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx + u G_0 dx + C_0 \cdot dx \frac{\partial u}{\partial t}.$$

После упрощения получим:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) являются основными дифференциальными уравнениями двухпроводной линии с распределенными параметрами, которые используются для расчета как переходного, так и установившегося режима линии.

3. Решение уравнений линии с распределенными параметрами в установившемся синусоидальном режиме

Пусть напряжение и ток в линии с распределенными параметрами изменяются по синусоидальному закону:

$$u(t) = Um \cdot \sin(\omega t + \psi u) \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\psi u},$$

$$i(t) = \mathrm{Im} \cdot \sin(\omega t + \psi i) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\psi i}.$$

Заменим в дифференциальных уравнениях линии синусоидальные функции $u(t)$ и $i(t)$ и их производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial i}{\partial t}$ соответствующими комплексными изображениями $u(t) \Rightarrow \underline{U}$, $i(t) \Rightarrow \underline{I}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow j\omega \underline{U}$, $\frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow j\omega \underline{I}$:

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = R_0\underline{I} + j\omega L_0\underline{I} = (R_0 + j\omega L_0)\underline{I} = \underline{Z}_0\underline{I} \quad (1)$$

$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = G_0\underline{U} + j\omega C_0\underline{U} = (G_0 + j\omega C_0)\underline{U} = \underline{Y}_0\underline{U} \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) приняты обозначения: $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ – комплексное сопротивление линии на единицу длины [Ом/м], $Y_0 = G_0 + j\omega C_0$ – комплексная проводимость линии на единицу длины [См /м].

Дифференцируем уравнение (2) по переменной x и делаем в него подстановку из (1):

$$-\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0\frac{d\underline{I}}{dx} = \underline{Z}_0(-\underline{Y}_0\underline{U}) = -\underline{Z}_0\underline{Y}_0\cdot\underline{U}$$

или

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - \underline{Z}_0\underline{Y}_0\cdot\underline{U} = 0 \quad (3)$$

Решаем дифференциальное уравнение 2-го порядка (3) классическим методом. Характеристическое уравнение и его корни: $k^2 - \underline{Z}_0\underline{Y}_0 = 0$, откуда $k_1 = -\sqrt{\underline{Z}_0\underline{Y}_0} = -\underline{\gamma}$, $k_2 = +\sqrt{\underline{Z}_0\underline{Y}_0} = +\underline{\gamma}$.

Решение для искомой функции в общем виде:

$$\underline{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} ,$$

где $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0\cdot\underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$ – безразмерная комплексная величина, названная коэффициентом (постоянной) распространения, $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ – комплексные постоянные интегрирования, которые определяются через граничные условия, т. е. через значения искомых функций $\underline{U}(x)$, $\underline{I}(x)$ в заданной точке линии, например в ее начале (x = 0) или в ее конце ($x = l$).

Из уравнения (1) находим:

$$\underline{I}(x) = -\frac{1}{\underline{Z}_0}\frac{d\underline{I}}{dx} = -\frac{1}{\underline{Z}_0}(-\gamma\underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \gamma\underline{A}_2 e^{\gamma x}) =$$

$$= \frac{\underline{Z}_0}{\sqrt{\underline{Z}_0\underline{Y}_0}}(\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{\underline{Z}_c}(\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x})$$

где $\underline{Z}_c = \dfrac{1}{\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}} = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\dfrac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = Z_C e^{j\varphi_c}$ – волновое или характеристическое сопротивление линии.

Таким образом, решения для искомых функций $\underline{U}(x)$ и $\underline{I}(x)$ имеют вид:

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}, \tag{4}$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_C}(\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}). \tag{5}$$

Волновое сопротивление $\underline{Z}_C$ и постоянная распространения $\underline{\gamma}$ получили название вторичных параметров линии.

Выразим постоянные интегрирования $\underline{A}_1$ и $\underline{A}_2$ через граничные условия начала линии. При $x = 0$ $\underline{U}(x) = \underline{U}_1$, $\underline{I}(x) = \underline{I}_1$, подставим эти значения в уравнения (4) и (5):

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 = \dfrac{1}{\underline{Z}_C}(\underline{A}_1 - \underline{A}_2) \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить постоянные интегрирования: $\underline{A}_1 = \dfrac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_C)$, $\underline{A}_2 = \dfrac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_C)$.

Подставим полученные значения постоянных интегрирования в решения для искомых функций (4) и (5):

$$\underline{U}(x) = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_C)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_C)e^{\gamma x} =$$

$$= \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{I}_1 \underline{Z}_C \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}) = \underline{U}_1 ch\gamma x - \underline{I}_1 \underline{Z}_C sh\gamma x,$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_C}\left\{\frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_C)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_C)e^{\gamma x}\right\} =$$

$$= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} \cdot \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \underline{I}_1 ch\gamma x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} sh\gamma x.$$

Полученные уравнения используются при расчетах цепей с распределенными параметрами в установившемся синусоидальном режиме.

Если принять $x = l$,то получим значения параметров режима в конце линии:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{U}_1 ch\gamma\ell - \underline{I}_1 \underline{Z}_C sh\gamma\ell \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1 ch\gamma\ell - \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} sh\gamma\ell \end{cases}$$

Выразим постоянные интегрирования через граничные условия конца линии. Для этой цели в полученных ранее решениях (4) и (5) заменим переменные x на $l - y$ из условия $x = l - y$, где l – длина всей линии, а y – расстояние от конца линии до рассматриваемой точки:

$$\underline{U}(y) = \underline{A}_1 e^{\ \gamma(\ell - y)} + \underline{A}_2 e^{\gamma(\ell - y)} = \underline{A}_1 e^{\ \gamma\ell} \cdot e^{\gamma y} + \underline{A}_2 e^{\gamma\ell} \cdot e^{-\gamma y} =$$

$$= \underline{A}_1 e^{-\gamma\ell} e^{\gamma y} - \underline{A}_2 e^{\gamma\ell} e^{-\gamma y} = \underline{A}_3 e^{\gamma y} - \underline{A}_4 e^{-\gamma y},$$

$$\underline{I}(y) = \frac{1}{\underline{Z}_c}(\underline{A}_1 e^{-\gamma(\ell - y)} - \underline{A}_2 e^{\gamma(\ell - y)}) =$$

$$= \frac{1}{\underline{Z}_c}(\underline{A}_1 e^{-\gamma\ell} e^{\gamma y} - \underline{A}_2 e^{\gamma\ell} e^{-\gamma y}) = \frac{1}{\underline{Z}_c}(\underline{A}_3 e^{\gamma y} - \underline{A}_4 e^{-\gamma y}).$$

Здесь $\underline{A}_3 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l}$, $\underline{A}_3 = \underline{A}_2 e^{\gamma l}$ – есть некоторые новые постоянные интегрирования.

При $y = 0$ $\underline{U}(y) = \underline{U}_2$, $\underline{I}(y) = \underline{I}_2$ подставим эти значения в найденные уравнения, получим:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_3 + \underline{A}_4 \\ \underline{I}_2 = \dfrac{1}{\underline{Z}_C}(\underline{A}_3 - \underline{A}_4) \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить постоянные интегрирования:

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C), \qquad \underline{A}_4 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c)$$

Подставляем значения постоянных в решение для искомых функций:

$$\underline{U}(y) = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{\gamma y} + \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{-\gamma y} =$$

$$= \underline{U}_2 \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2} + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} = \underline{U}_2 ch\gamma y + \underline{I}_2 \underline{Z}_C sh\gamma y,$$

$$\underline{I}(y) = \frac{1}{\underline{Z}_C}\left(\frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{\gamma y} - \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{-\gamma y} =\right.$$

$$= \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \cdot \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} = \underline{I}_2 ch\gamma y + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} sh\gamma y .$$

Полученные уравнения используются при расчете цепей с распределенными параметрами в установившемся синусоидальном режиме.

Если принять $y = l$, то получим значение параметров режима в начале линии:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 ch\gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C sh\gamma l \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 ch\gamma l + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} sh\gamma l \end{cases}$$

4. Волновые процессы в линии с распределенными параметрами

Ранее были получены решения для напряжения и тока в установившемся режиме:

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x},$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_c} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

Учитывая, что постоянные интегрирования и коэффициент распространения являются комплексными числами ($\underline{A}_1 = a_1 e^{j\psi_1}$, $\underline{A}_2 = a_2 e^{j\psi_2}$, $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$) преобразуем уравнение для $\underline{U}(x)$:

$$\underline{U}(x) = a_1 e^{j\psi_1} e^{-(\alpha + j\beta)x} + a_2 e^{j\psi_2} e^{(\alpha + j\beta)x} =$$

$$= a_1 e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \psi_1)} + a_2 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \psi_2)} .$$

Перейдем от комплексного изображения функции к ее оригиналу, т.е. к ее функции времени:

$$u(x,t) = \sqrt{2} a_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} a_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) =$$

$$= U_{1m}(x) \cdot \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + U_{2m}(x) \cdot \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) = u_n(x,t) + u_o(x,t) .$$

Функция $u(x,t)$ состоит из двух слагаемых, первое из которых представляет собой прямую или падающую волну $u_n(x,t)$, а второе – обратную или отраженную волну $u_o(x,t)$. Проанализируем, как изменяется каждая из волн в пространстве и во времени.

Падающая волна напряжения равна:

$$u_n(x,t) = \sqrt{2}a_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1).$$

В произвольной точке линии $x = x' = \mathrm{const}$ напряжение изменяется по синусоидальному закону с постоянной амплитудой:

$$u_n(x',t) = \sqrt{2}a_1 e^{-\alpha x'} \cdot \sin(\omega t - \beta x' + \psi_1) = U'_m \sin(\omega t + \psi'),$$

где $U'_m = \sqrt{2}a_1 e^{-\alpha x'} = \mathrm{const}$, $\psi' = \psi_1 - \beta x'$.

В произвольно выбранный момент времени $t = t' = \mathrm{const}$ напряжение вдоль линии изменяется по синусоидальному закону, но с затуханием амплитуды с увеличением расстояния x:

$$u_n(x,t') = \sqrt{2}a_1 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t' - \beta x + \psi) = U_m(x) \cdot \sin(-\beta x + \psi''),$$

где $U_m(x) = \sqrt{2}a_1 e^{-\alpha x}$, $\psi'' = \psi + \omega'$.

Коэффициент β показывает, как изменяется фаза падающей волны напряжения на единицу длины линии [рад/м] и называется коэффициентом фазы.

Длиной волны λ называется расстояние Δx между двумя ближайшими точками линии, которые находятся в одинаковом фазовом состоянии, т.е. через интервал 2π:

$$\beta\Delta x = \beta\lambda = 2\pi, \text{ откуда следует } \lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

С течением времени синусоидальное распределение напряжения перемещается вдоль линии. Под скоростью распространения волны или фазовой скоростью понимают скорость перемещения вдоль линии определенного фазового состояния, для чего должно удовлетворяться условие:

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = \mathrm{const}.$$

Продифференцируем члены этого уравнения, в результате получим: $\omega dt - \beta dx = 0$, откуда следует:

$$\upsilon_n = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f\lambda$$

Неравенство $\upsilon_n > 0$ означает, что падающая волна перемещается в положительном в направлении, т. е. от начала линии к ее концу.

Амплитуда падающей волны зависит от координаты x: $U_m(x) = \sqrt{2}a_1 e^{-\alpha x}$, она убывает (затухает) по показательному закону $e^{-\alpha x}$ в направление возрастания x, т.е. в направлении движения волны. Скорость затухания определяется коэффициентом α, который получил название коэффициента затухания волны [Неп/м].

Коэффициент $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ показывает в комплексе характер изменения волны при движении ее вдоль линии, поэтому получил название коэффициента распространения волны.

Характер распространения падающей волны напряжения $u_n(x,t)$ показан на рис. 179.

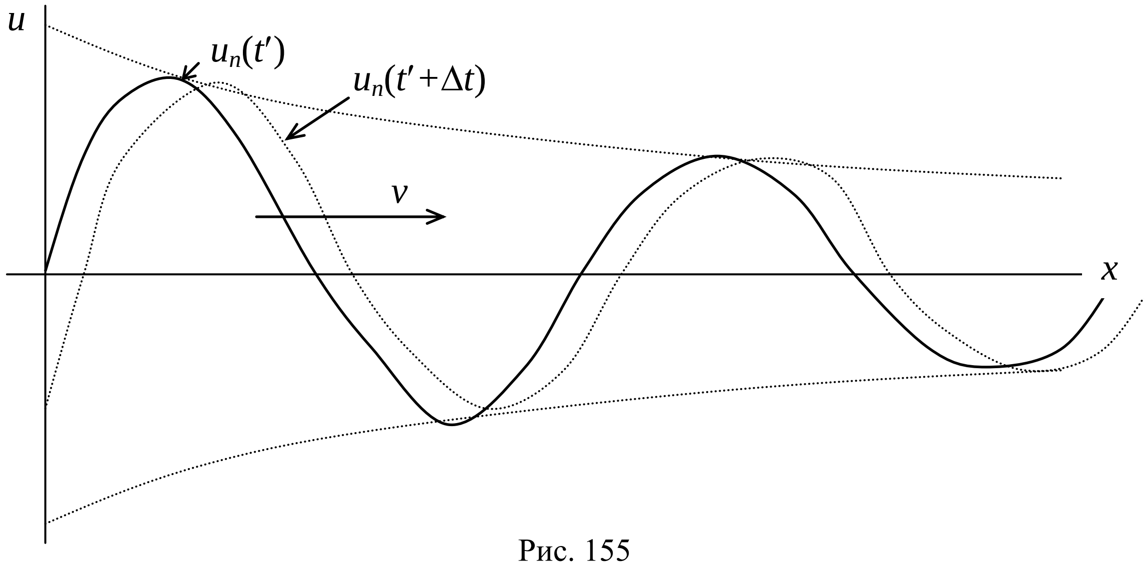


Рис. 155

Отраженная волна напряжения равна:

$$u_o(x,t) = \sqrt{2}a_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2),$$

Фазовая скорость отраженной волны найдется из уравнения: $\omega t + \beta x + \psi_2 = \text{const}$.

После дифференцирования получим: $\omega dt + \beta dx + 0 = 0$, откуда следует

$$\upsilon_0 = \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} = -\upsilon_n$$

Отраженная волна распространяется с той же фазовой скоростью, что и падающая, но в обратном направлении (знак минус), т.е. от конца линии к ее началу. Она имеет ту же длину волны $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$. Амплитуда отраженной волны $U_{mo}(x) = \sqrt{2}a_2 e^{\alpha x}$, при $\alpha > 0$ убывает (затухает) в направлении уменьшения координаты x, т.е. в направлении движения волны.

Характер распространения отраженной волны показан на рис. 156.

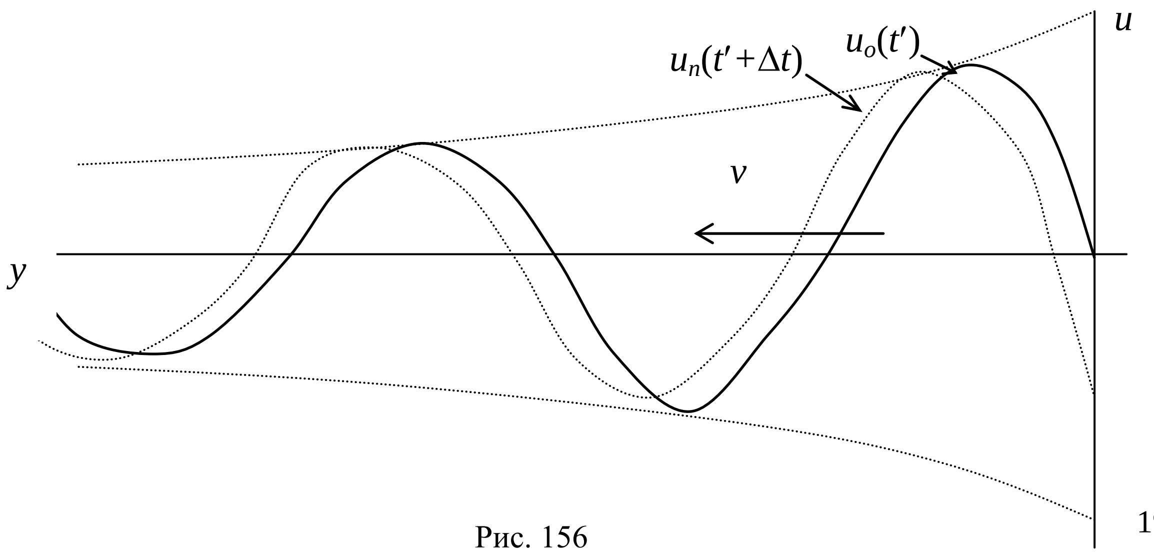


Рис. 156

Действительное значение напряжения в любой точке лини x' в любой момент времени t' будет равно сумме значений напряжений падающей и отраженной волн:

$$u(x',t') = u_n(x',t') + u_o(x',t') .$$

Очевидно, что функцию тока в линии $i(x,t)$ также можно рассматривать как результат наложение падающей $i_n(x,t)$ и отраженной $i_o(x,t)$ волн стой лишь разницей, что отраженная волна накладывается с обратным знаком:

$$i(x,t) = i_n(x,t) - i_o(x,t) .$$

5. Линия с распределенными параметрами в различных режимах

Расчет токов и напряжений в линии с распределенными параметрами при произвольной нагрузке $\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ на основе совместного решения полученных ранее комплексных уравнений. Уравнения режима линии дополняются уравнениями закона Ома для начала и конца линии:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 ch\gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C sh\gamma l \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 ch\gamma l + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} sh\gamma l \end{cases}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1$$

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{U}_1 ch\gamma l - \underline{I}_1 \underline{Z}_C sh\gamma l \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1 ch\gamma l - \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} sh\gamma l \end{cases}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2$$

где $\underline{Z}_1$ – входное сопротивление линии при заданной нагрузке:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 ch\gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C sh\gamma l}{\underline{I}_2 ch\gamma l + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} sh\gamma l} = \underline{Z}_C \cdot \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_C \cdot th\gamma l}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_2 \cdot th\gamma l}$$

Выбор алгоритма расчета определяется конкретными условиями задачи. Рассмотрим характерные режимы линии, представляющие теоретический интерес.

1.Режим холостого хода $\left(Z_2 = \infty\right)$.

В режиме холостого хода $\underline{U}_2 = \underline{U}_{2x}$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_{2x} = \dfrac{\underline{U}_{2x}}{\infty} = 0$, следовательно, уравнения линии получат укороченный вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_{1x} = \underline{U}_{2x} \cdot ch\gamma l \\ \underline{I}_{1x} = \dfrac{\underline{U}_{2x}}{\underline{Z}_C} \cdot sh\gamma l \end{cases}$$

Входное сопротивление линии в режиме холостого хода:

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{1x}} = \frac{\underline{U}_{2x} \cdot ch\gamma l}{\dfrac{\underline{U}_{2x}}{\underline{Z}_C} \cdot sh\gamma l} = \underline{Z}_C \cdot \frac{1}{th\gamma l}.$$

2.<u>Режим короткого замыкания</u> $(Z_2 = 0)$.

В режиме короткого замыкания $I_2 = I_{2k}, \underline{U}_2 = \underline{U}_{2k} = I_2 \cdot 0 = 0$, следовательно, уравнения линии получат указанный вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_{1k} = \underline{I}_{2k} \underline{Z}_C \cdot sh\gamma l \\ \underline{I}_{1k} = \underline{I}_{2k} \cdot ch\gamma l \end{cases}$$

Входное сопротивление линии в режиме короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{1k} = \frac{\underline{U}_{1k}}{\underline{I}_{1k}} = \frac{\underline{I}_{2k} \underline{Z}_C \cdot sh\gamma l}{\underline{I}_{2k} \cdot ch\gamma l} = \underline{Z}_C \cdot th\gamma l.$$

Совместно выполненные опыты холостого хода и короткого замыкания позволяют экспериментально определить сначала вторичные параметры линии ($\underline{Z}_c$ и $\underline{\gamma}$), а затем и первичные (R_0, L_0, G_0, C_0).

Входные сопротивления линии $\underline{Z}_{1x}$ и $\underline{Z}_{1k}$ экспериментально измеряются по схеме трех приборов (амперметра, вольтметра и фазометра), как $\underline{Z}_{вх} = \dfrac{U}{I} \cdot e^{j\varphi}$.

Вторичные параметры линии ($\underline{Z}_C$ и $\underline{\gamma}$) находятся из совместного решения уравнений для $\underline{Z}_{1x}$ и $\underline{Z}_{1k}$:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{1x} \cdot \underline{Z}_{1k}} \quad ; \qquad th\gamma l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1x}}}.$$

Первичные параметры линии (R_0, L_0, G_0, C_0) определяются из совместного решения уравнений для Z_c и γ:

$$\begin{cases} \underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} \\ \underline{Z}_c = \sqrt{\dfrac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} \end{cases},$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0 = \underline{Z}_c \cdot \gamma \qquad , \qquad G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0 = \frac{\gamma}{\underline{Z}_c}.$$

3. Режим согласованной нагрузки $(\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c)$.

В режиме согласованной нагрузки входное сопротивление линии равно:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \cdot \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c \cdot th\gamma \cdot \ell}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_2 \cdot th\gamma \cdot \ell} = \underline{Z}_c = \underline{Z}_2 .$$

Исследуем волновые процессы в линии:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_n(x) + \underline{U}_o(x) = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \frac{1}{2}\left(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_C\right) \cdot e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}\left(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_C\right) \cdot e^{\gamma x} =$$

$$= \underline{U}_1 \cdot e^{-\gamma x} + 0 = \underline{U}_n(x).$$

В режиме согласованной нагрузки в линии отсутствуют отраженные волны напряжения и тока. Вся энергия, доставляемая падающей волной в конец линии полностью потребляется нагрузкой, при этом передаваемая приемнику активная мощность имеет максимальное значение:

$$P_{2\max} = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_c = U_1 \cdot e^{-\alpha \cdot \ell} \cdot I_1 \cdot e^{-\alpha \cdot \ell} \cdot \cos\varphi_c = U_1 \cdot I_1 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot \ell} \cdot \cos\varphi_c .$$

Мощность источника энергии: $P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_c$.

Коэффициент полезного действия: $\eta = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{U_1 \cdot I_1 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot \ell} \cdot \cos\varphi_c}{U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_c} = e^{-2 \cdot \alpha \cdot \ell}$.

Если сопротивление нагрузки несогласованно с волновым сопротивлением линии $(\underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_c)$, то часть энергии, доставляемой падающей волной, отражается и возвращается генератору в виде отраженных волн напряжения и тока.

В линиях связи отраженные волны ухудшают качество основного сигнала (снижается разборчивость речи, четкость изображения и др.). Все линии связи работают в режиме, близком к согласованному. При различии сопротивлений нагрузки и линии $(\underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_c)$ принимаются специальные технические меры для их согласования.

В линиях электропередачи согласование режима не требуется, так как в них основным критерием является передача энергии с наименьшими потерями.

6. Линия с распределенными параметрами без искажений

Сигналы, передаваемые по линиям связи, являются несинусоидальными функциями времени и состоят из суммы гармоник различных частот. Если в линии созданы неодинаковые условия для различных гармоник, то в конце линии гармонический состав сигнала будет отличаться от гармонического состава этого же сигнала в начале линии, т.е. сигнал будет искажен. Для линий связи очень важным условием является создание такого режима работы, при котором отсутствовало бы искажение сигнала.

Различают два вида искажений сигнала амплитудные и фазовые. Амплитудные искажения имеют место в том случае, когда коэффициент затухания α зависит от частоты, при этом амплитуды отдельных гармоник затухают с неодинаковой скоростью, что приводит к искажению формы сигнала. Фазовые искажения возникают в том случае, когда фазовая скорость υ зависит от частоты, при этом происходит сдвиг отдельных гармоник по фазе, что приводит к искажению формы сигнала. Итак, искажение сигнала будет отсутствовать при постоянстве двух параметров: α = const, υ = const.

Вторичные параметры линии $\underline{Z}_c$ и $\underline{\gamma}$ зависят от частоты, что в общем случае создает в линии неодинаковые условия для прохождения волн напряжения и тока различных частот и такая линия является искажающей.

Отсутствие искажений в линии наблюдается только при определенном соотношении между ее первичными параметрами.

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} \qquad \text{или} \qquad \frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}$$

При соблюдении этого условия получим:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0\left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega\right)}{C_0\left(\frac{G_0}{C_0} + j\omega\right)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$ – волновое сопротивление линии является чисто активным и не зависит от частоты;

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{L_0\left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega\right)\cdot C_0\left(\frac{G_0}{C_0} + j\omega\right)} = \sqrt{L_0 C_0}\cdot\left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega\right) =$$

$$= R_0\cdot\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + j\omega\cdot\sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega\sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta,$$

где $\alpha = \sqrt{R_0 \cdot G_0} = const$ – коэффициент затухания не зависит от частоты, $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$ – коэффициент фазы, $\upsilon = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\cdot\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = const$ – фазовая скорость не зависит от частоты.

В реальных кабельных линиях связи соотношение между первичными параметрами $\frac{R_0}{L_0} > \frac{G_0}{C_0}$, так как вследствие совершенства изоляции активная проводимость G_0 очень мала. Режим без искажений может быть получен искусственно путем включения в рассечку линии через определенные интервалы дополнительных катушек индуктивности $L_Д$ из условия $\frac{R_0}{L_0+L_Д}=\frac{G_0}{C_0}$. Однако с увеличением эквивалентной индуктивности $L_Э=L_0+L_Д$ снижается фазовая скорость υ, в результате чего увеличивается общее время прохождения сигнала T, которое по техническим нормам не должно превышать определенную величину.

Реальные линии связи в своем большинстве являются искажающими, а искажения сигналов на приемных концах линии устраняются с помощью специальных корректирующих устройств.

7. Линия с распределенными параметрами без потерь

Для кабельных линий с распределенными параметрами, работающих на высоких частотах (линии связи), реактивные параметры значительно превосходят активные $\omega L_0 >> R_0$ и $\omega C_0 >> G_0$. При расчете режимов таких линий можно без особого ущерба для точности расчета пренебречь активными параметрами и принять их равными нулю $(R_0=0, G_0=0)$. В таком случае линия становится идеальной или без потерь.

Волновое сопротивление линии без потерь:

$Z_C=\sqrt{\frac{R_0+j\omega L_0}{G_0+j\omega C_0}}=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}=Z_C\cdot e^{j0}$ – является чисто активным и не зависит от частоты.

Постоянная распространения линии без потерь:

$$\underline{\gamma}=\sqrt{j\omega L_0\cdot j\omega C_0}=0+j\omega\sqrt{L_0C_0}=\alpha+j\beta,$$

где $\alpha=0;\quad \beta=\omega\sqrt{L_0C_0};\quad v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}=\text{const.}$

В линии без потерь отсутствует затухание сигнала $(\alpha=0)$, а фазовая скорость v не зависит от частоты, следовательно, линия без потерь является неискажающей.

Учитывая математические соотношения, что $\underline{\gamma}=j\beta$, и

$$shjx=\frac{1}{2}\left(e^{jx}-e^{-jx}\right)=\frac{1}{2}(\cos x+j\sin x-\cos x+j\sin x)=j\sin x,$$

$$chjx=\frac{1}{2}\left(e^{jx}+e^{-jx}\right)=\frac{1}{2}(\cos x+j\sin x+\cos x-j\sin x)=\cos x,$$

$$thjx=\frac{shjx}{chjx}=\frac{j\sin x}{\cos x}=jtgx,$$

преобразуем комплексные уравнения установившегося синусоидального режима линии:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cos\beta x - j\underline{I}_1 Z_C \sin\beta x, \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cos\beta x - j\dfrac{\underline{U}_1}{Z_C}\sin\beta x \end{cases}$$ – при отсчете координаты x от начала линии,

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos\beta y + j\underline{I}_2 Z_C \sin\beta y, \\ \underline{I}(y) = \underline{I}_2 \cos\beta y + j\dfrac{\underline{U}_2}{Z_C}\sin\beta y \end{cases}$$ – при отсчете координаты y от конца линии,

$$\underline{Z}_1 = Z_C \frac{\underline{Z}_2 + jZ_C \operatorname{tg}\beta l}{Z_C + j\underline{Z}_2 \operatorname{tg}\beta l}$$ – входное сопротивление линии.

Режим линии без потерь определяется свойствами (параметрами) самой линии и величиной и характером нагрузки $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi}$ на ее конце. Исследуем работу линии в различных режимах нагрузки.

1.<u>Режим согласованной нагрузки:</u> $\underline{Z}_2 = Z_C = \sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$.

Учитывая, что $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{I}_2 Z_C$, комплексные уравнения линии получат следующий вид:

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos\beta y + j\underline{U}_2 \sin\beta y = \underline{U}_2 e^{j\beta y} = \underline{U}_n(y), \\ \underline{I}(y) = \underline{I}_2 \cos\beta y + j\underline{I}_2 \sin\beta y = \underline{U}_2 e^{j\beta y} = \underline{I}_n(y) \end{cases}$$ – при отсчете координаты y от конца линии,

$$\underline{Z}_1(y) = Z_C \frac{Zc + jZ_C \operatorname{tg}\beta y}{Z_C + jZ_C \operatorname{tg}\beta y}$$ – входное сопротивление линии.

В режим согласованной нагрузки напряжение $u(t,y)$ и ток $i(t,y)$ состоят только из падающих волн, которые распространяются от начала линии к ее концу без затухания. Действующие значения напряжения $U(y)$ и тока $I(y)$ не зависят от координаты y и во всех точках линии имеют одинаковые значения.

Входное сопротивление линии $\underline{Z}_1$ равно волновому $\left(\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c\right)$ и не зависит от длины линии. Графические диаграммы названных функций показаны на рис. 157

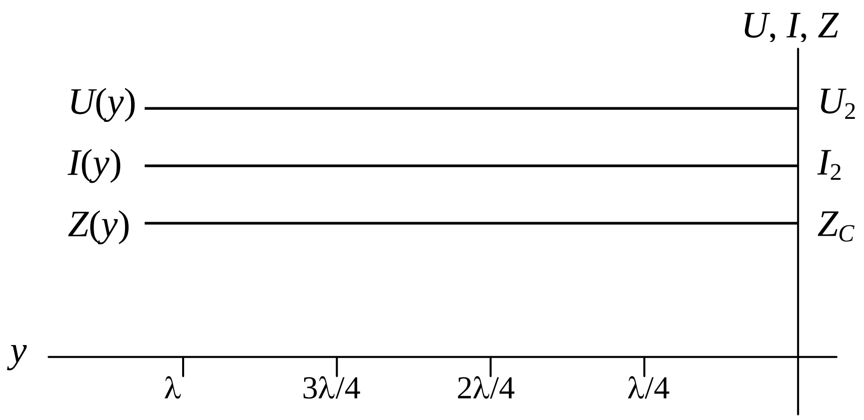


Рис. 157

2.Режим холостого хода: $Z_2 = \infty$, $I_2 = 0$. Комплексные уравнения режима линии при отсчете координаты у от конца линии получат вид:

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos\beta y, \\ \underline{I}(y) = j\dfrac{\underline{U}_2}{Z_C}\sin\beta y = \underline{I}_2 \sin\beta y \cdot e^{j90^\circ} \end{cases}$$

Входное сопротивление линии:

$$\underline{Z}_1(y) = Z_C \frac{\underline{Z}_2 + jZ_C \mathrm{tg}\beta y}{Z_C + j\underline{Z}_2 \mathrm{tg}\beta y} = Z_C \frac{1}{j\mathrm{tg}\beta y} = -jZ_C \frac{1}{\mathrm{tg}\beta y}.$$

Входное сопротивление линии $\underline{Z}_1(y)$ является чисто реактивным, его величина и характер зависят от длины линии.

Графические диаграммы названных функций показаны на рис. 2.

Режим линии, при котором в некоторых ее точках наблюдаются максимальные значения напряжения (тока) или пучности, а в других ее точках – нулевые значения этих величин или узлы, получил название в технике режима стоячих волн. Узлы и пучности для одной и той же величины следуют друг за другом через отрезки, равные λ/4 где $\lambda = \dfrac{2\pi}{\beta} = \dfrac{v}{f}$ – длина волны, при этом узлы одной величины совпадают с пучностями другой.

Режим стоячих волн физически можно объяснить как результат наложения падающей и наложенной волн с одинаковыми амплитудами. В точках линии, в которых мгновенные значения падающей и отраженной волн всегда совпадают, образуются пучности, а в точках, где эти значения складываются с противоположным знаком (в противофазе), образуются узлы (рис. 158).

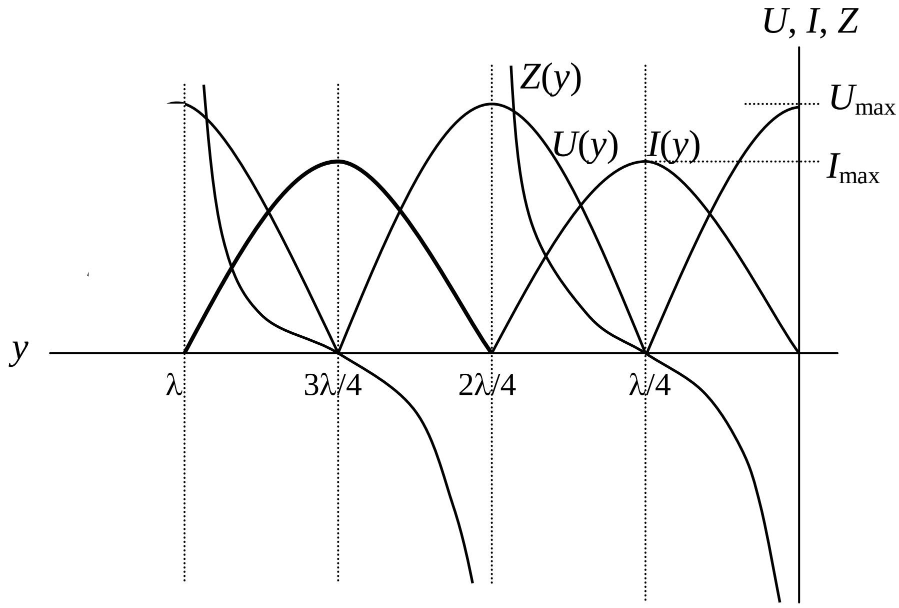


Рис. 158

Следует отметить, что режим стоячих волн имеет место в линии без потерь при чисто реактивной нагрузке $\underline{Z}_2 = \pm jX_2$ любой величины ($\infty \geq X_2 \geq -\infty$). При реактивной нагрузке энергия, доставляемая падающей волной в конец линии, полностью отражается, при этом амплитуда отраженной волны равна амплитуде подающей волны. Входное сопротивление линии при реактивной нагрузке $\underline{Z}_2 = \pm jX_2$ является чисто реактивным:

$$\underline{Z}_1(y) = Z_C \frac{\pm jX_2 + jZ_C \mathrm{tg}\beta y}{Z_C + j(\pm jX_2)\mathrm{tg}\beta y} = jZ_C \mathrm{tg}(\beta y + \varphi),$$

где $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\pm X_2}{Z_C}$.

3.<u>Режим произвольной нагрузки</u>: $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi}$.

Расчет режима линии производится путем совместного решения ее комплексных уравнений и уравнений закона Ома: $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2$ и $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1$. При произвольной несогласованной нагрузке в конце линии происходит частичное отражение волн, при этом амплитуды отраженных волн напряжения и тока будут меньше амплитуд падающих волн. Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии будет носить волнообразный характер рис. 159, при этом максимумы и минимумы функции будут следовать друг за другом через интервал λ/4.

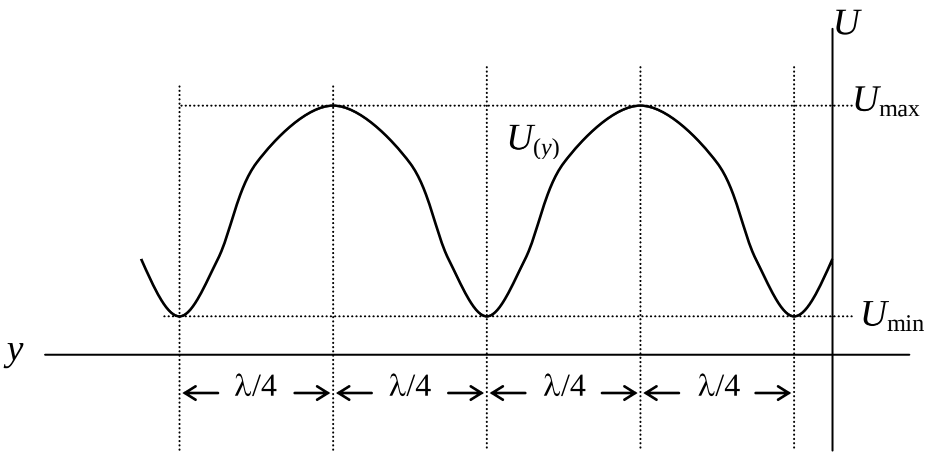


Рис. 159

Степень несогласованности сопротивления нагрузки $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi}$ с волновым сопротивлением линии Z_C характеризуется коэффициентом стоячей волны:

$$K_C = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{U_n + U_o}{U_n - U_o}$$

В реальных условиях для согласования нагрузки с линией применяются специальные согласующие устройства.