

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра “Электротехника и электроника”

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
ЧАСТЬ 2**

Учебное пособие
для студентов электротехнических специальностей

Минск 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1. Теория линейных цепей (продолжение).....	4
Т2-1. Переходные процессы в электрических цепях.....	4
1. Определение переходных процессов	4
2. Законы (правила) коммутации	5
3. Начальные условия переходного процесса.....	6
4. Классический метод расчета переходных процессов	8
5. Определение установившейся составляющей $x_y(t)$	10
6. Методы составления характеристического уравнения	11
7. Определение постоянных интегрирования	14
8. Последовательность расчета переходных процессов классическим методом	14
9. Операторный метод расчета переходных процессов.....	16
10. Операторные изображения некоторых функций времени	17
11. Законы электротехники в операторной форме.....	19
12. Способы составления системы операторных уравнений.....	21
13. Переход от изображения функции $F(p)$ к ее оригиналу $f(t)$. Формула разложения.....	23
14. Последовательность расчета переходных процессов операторным методом	26
15. Расчет переходных процессов методом численного интегрирования дифференциальных уравнений на ЭВМ	28
16. Расчет переходных процессов численным методом на основе стандартных программ	31
17. Анализ переходных процессов в цепи R, L	35
18. Анализ переходных процессов в цепи R, C	38
19. Анализ переходных процессов в цепи R, L, C	41
20. Переходные функции по току и напряжению	45
21. Расчет переходных процессов методом интеграла Дюамеля	47
22. Расчет переходных процессов в цепи при воздействии на нее ЭДС $e(t)$ произвольной формы. ..	50
Т12. Синтез электрических цепей.....	52
1. Характеристика задач синтеза.....	52
2. Свойства входных операторных функций пассивных электрических цепей	54
3. Синтез двухполюсника лестничной (цепной) схемой	55
4. Синтез двухполюсника методом разложения входной функции на простейшие составляющие... ..	57
Часть 2. Теория нелинейных цепей.....	60
Т1. Нелинейные цепи постоянного тока.....	60
1. Нелинейные элементы, их характеристики и параметры	60
2. Нелинейные цепи и их свойства	63
3. Графический метод расчета простых нелинейных цепей.....	64
4. Графический метод расчета нелинейной цепи с несколькими источниками ЭДС	67
5. Комбинированный графоаналитический метод расчета нелинейной цепи с одним или двумя нелинейными элементами.....	69
6. Аппроксимация ВАХ нелинейных элементов	72
7. Аналитические методы расчета нелинейных цепей	73
8. Расчет нелинейных цепей на ЭВМ по стандартной программе	77
Т2. Нелинейные магнитные цепи постоянного потока	80
1. Основные понятия и законы магнитной цепи.....	80
3. Расчет неразветвленной магнитной цепи.....	86
4. Расчет разветвленной магнитной цепи	88
5. Расчет магнитной цепи с постоянным магнитом.....	91
6. Расчет разветвленной магнитной цепи на ЭВМ в MathCAD.....	93
Т3. Нелинейные цепи переменного тока.	96
1. Общая характеристика нелинейных цепей переменного тока и методов их исследования	96
2. Замена несинусоидальных функций $u(t)$ и $i(t)$ эквивалентными синусоидальными	98
3. Методы расчета нелинейных цепей переменного тока на основе ВАХ для эквивалентных синусоид.....	100
4. Резонансные явления в нелинейных цепях	104
5. Нелинейная катушка с сердечником на переменном токе.....	106
6. Трансформатор с сердечником и его схема замещения.....	107
7. Управляемая катушка индуктивности	111
8. Расчет нелинейных цепей переменного тока на основе физических характеристик нелинейных элементов.....	113
10. Преобразователь частоты в 3 раза на нелинейных катушках	122

11. Выпрямители с емкостным фильтром.....	125
T4. Переходные процессы в нелинейных цепях.....	127
1. Общая характеристика переходных процессов в нелинейных цепях.....	127
2. Расчет переходного процесса методом интегрируемой аппроксимации.....	129
3. Расчет переходного процесса методом кусочно-линейной аппроксимации.....	130
4. Расчет переходного процесса методом линеаризации дифференциального уравнения.....	133
5. Расчет переходного процесса методом численного интегрирования дифференциального уравнения.....	135
6. Расчет переходного процесса на ЭВМ по стандартной программе.....	137
7. Расчет переходного процесса в трансформаторе при его включении в режиме холостого хода.....	139
T5. Магнитные цепи переменного потока.....	141
1. Потери в сердечниках из ферромагнитного материала при периодическом перемагничивании.....	141
2. Расчет магнитной цепи переменного потока комплексным методом.....	143
Часть 3. Теория электромагнитного поля.....	146
T1. Электростатическое поле.....	146
1. Основные понятия и определения.....	146
2. Уравнения электростатического поля в интегральной и дифференциальной форме.....	150
3. Граничные условия в электростатическом поле.....	152
4. Уравнение Пуассона и Лапласа. Теорема единственности решения.....	153
5. Электростатическое поле осевых зарядов.....	155
6. Электростатическое поле и емкость двухпроводной линии.....	159
7. Электростатическое поле и емкость цилиндрического провода, расположенного над проводящей плоскостью (землей).....	161
8. Поле многопроводной линии. Метод зеркальных отображений.....	162
9. Электрическое поле трехфазной линии электропередачи.....	166
T2. Электрическое поле постоянного тока.....	170
1. Законы электрического поля в интегральной и дифференциальной формах.....	170
2. Методы расчета электрических полей постоянного тока.....	173
T3. Магнитное поле постоянных токов.....	178
1. Уравнения магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.....	178
2. Векторный потенциал магнитного поля.....	180
3. Скалярный потенциал магнитного поля.....	181
4. Магнитное поле цилиндрического проводника с током.....	182
5. Магнитное поле двухпроводной линии.....	184
6. Взаимная индуктивность двух параллельных линий.....	185
7. Магнитное поле сложной системы проводов с током.....	187
8. Механические силы в магнитном поле.....	188
T4. Переменное электромагнитное поле.....	191
1. Основные уравнения Максвелла и их физический смысл.....	191
2. Теорема Умова-Пойтинга для электромагнитного поля.....	195
3. Поток вектора Пойтинга в коаксиальном кабеле.....	197
4. Уравнения Максвелла в комплексной форме.....	199
5. Плоская гармоническая волна в диэлектрике.....	199
6. Плоская гармоническая волна в проводящей среде.....	203
7. Поверхностный эффект в плоском листе.....	206
8. Поверхностный эффект в круглом проводе.....	208

Часть 1. Теория линейных цепей (продолжение)

Т2-1. Переходные процессы в электрических цепях

1. Определение переходных процессов

Установившимся режимом называется такое состояние электрической цепи (схемы), при котором наблюдается равновесие между действием на цепь источников энергии и реакцией элементов цепи на это действие. Различают следующие 4 вида установившихся режимов в цепи:

- 1) режим отсутствия тока и напряжения;
- 2) режим постоянного тока;
- 3) режим переменного синусоидального тока;
- 4) режим периодического несинусоидального тока.

В установившемся режиме теоретически токи и напряжения в элементах цепи могут существовать неограниченно долго, не изменяя своих величин и характеристик. При этом энергетическое состояние каждого элемента цепи может быть однозначно определено для любого момента времени.

Переходным называется процесс, возникающий в электрической цепи при переходе ее от одного установившегося режима (старого) к другому установившемуся режиму (новому). Переходные процессы в цепи возникают в результате коммутаций. Под коммутацией понимают скачкообразные (мгновенные) изменения структуры (схемы) цепи или параметров ее отдельных элементов, вызванные включением, отключением или переключением отдельных ее участков. На электрических схемах коммутация обозначается в виде ключей в разомкнутом (рис. 1, а) или замкнутом (рис. 1, б) положении, при этом разомкнутый ключ в момент $t = 0$ замыкается, а замкнутый в момент $t = 0$ размыкается.



Рис. 1

Запасы энергии в магнитном поле катушки $W_M = \frac{L \cdot i^2}{2}$ и в электрическом поле

конденсатора $W_{\text{Э}} = \frac{C \cdot u^2}{2}$ в момент коммутации

соответствуют старому (до коммутации) установившемуся режиму и не могут измениться скачкообразно. Требуется некоторое время, чтобы эти запасы энергии пришли в соответствие с новым (после коммутаций) установившимся режимом цепи. Таким образом, физически переходный процесс есть переход цепи из одного энергетического состояния в другое.

По времени переходные процессы в электрических цепях являются быстропротекающими, их длительность составляет обычно доли секунды и в редких случаях несколько секунд.

В результате переходных процессов токи и напряжения на отдельных участках цепи могут значительно возрасти и превысить их значения в установившемся режиме. Расчет переходных процессов в электрических цепях является весьма важным мероприятием: результаты таких расчетов в инженерной практике используются для правильного выбора уровня изоляции токоведущих частей электроустановок и для проверки технических устройств на динамическую устойчивость.

2. Законы (правила) коммутации

Первый закон коммутации гласит, что ток i_L в цепи с идеальной катушкой индуктивности L в момент коммутации не может измениться скачкообразно, т.е.

$$i_L(-0) = i_L(+0) = i_L(0) = \text{const}.$$

Предположим обратное, что ток i_L изменяется скачком, что означает $\frac{di}{dt} = \infty$. Из этого следует, что напряжение на катушке и мощность, потребляемая магнитным полем катушки должны быть бесконечно большими:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \infty, \quad P = \frac{dW_M}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} Li_L^2\right)}{dt} = Li_L \frac{di_L}{dt} = \infty.$$

Полученные выводы противоречат физическим законам, так как нельзя получить напряжение $u = \infty$ и в природе не существует источников энергии, способных развивать бесконечную мощность. Следовательно, наше первоначальное предположение является некорректным, и мы вправе утверждать, что $\frac{di_L}{dt} \neq 0$, или ток i_L в цепи с катушкой L в момент коммутации не может измениться скачкообразно.

Второй закон коммутации гласит, что напряжение u_C на выводах идеального конденсатора C в момент коммутации не может измениться скачкообразно, т.е.

$$u_C(-0) = u_C(+0) = u_C(0) = \text{const}.$$

Предположим обратное, что напряжение u_C изменяется скачком, что означает $\frac{du_C}{dt} = \infty$. Из этого следует, что ток в конденсаторе и мощность, потребляемая электрическим полем конденсатора должны быть бесконечно большими:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \infty, \quad P = \frac{dW_{\text{Э}}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt} = Cu_C \frac{du_C}{dt} = \infty.$$

Полученные выводы противоречат физическим законам, так как нельзя получить ток $i = \infty$ и не существует источников энергии бесконечной мощности. Следовательно, наше первоначальное предположение является некорректным, и мы вправе утверждать, что $\frac{du_C}{dt} \neq \infty$, или напряжение u_C на выводах конденсатора C в момент коммутации не может измениться скачкообразно.

Законы коммутации используются на практике для определения начальных условий при расчете переходных процессов.

3. Начальные условия переходного процесса

Начальными условиями называются значения отдельных токов и напряжений, а также их первых, вторых и т.д. производных в начале переходного процесса, т.е. в момент коммутации при $t = 0$. Начальные условия делятся на 2 вида: независимые и зависимые.

К независимым начальным условиям относятся токи в катушках $i_L(0)$ и напряжения на конденсаторах $u_C(0)$. Независимые начальные условия определяются законами коммутации, они не могут измениться скачкообразно и не зависят от вида коммутации. Их значения определяются из расчета схемы цепи в установившемся докоммутационном режиме на момент коммутации $t = 0$.

Пример. Определить независимые начальные условия $i_L(0)$, $u_C(0)$ в схеме рис. 2 при заданных значениях параметров элементов: $R_1 = 50$ Ом, $L = 100$ мГн, $R_2 = 100$ Ом, $C = 50$ мкФ;

а) для постоянной ЭДС $e(t) = E = 150$ В = const;

б) для синусоидальной ЭДС $e(t) = 150\sin\omega t$, $f = 50$ Гц.

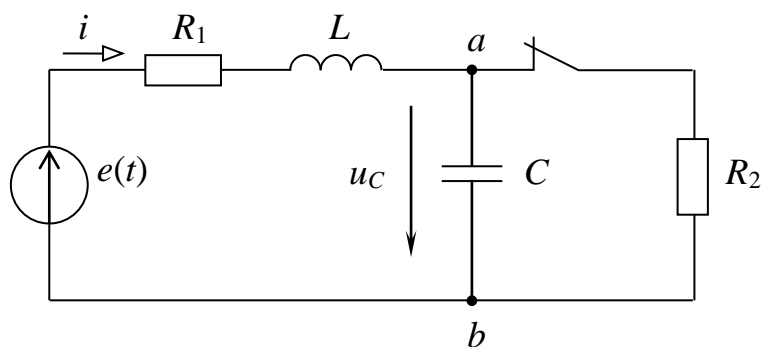


Рис. 2

Решение. а) При постоянной ЭДС источника $e(t) = E$ расчет схемы производится как для цепи постоянного тока: катушка L закорачивается, ветвь с конденсатором C размыкается, учитываются только резистивные элементы R .

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{150}{50 + 100} = 1 \text{ А};$$

$$U_C = U_{ab} = I \cdot R_2 = 1 \cdot 100 = 100 \text{ В}$$

Независимые начальные условия: $i_L(0) = 1 \text{ А}$, $u_C(0) = 100 \text{ В}$.

б) При синусоидальной ЭДС источника $e(t) = E_m \cdot \sin \omega t$ расчет схемы производится как для цепи переменного тока в комплексной форме для комплексных амплитуд функций.

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0,1 = 31,4 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 63,7 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = \frac{100(-j63,7)}{100 - j63,7} = 53,7e^{-j57,5} \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{\Sigma} = R_1 + jX_L + \underline{Z}_{ab} = 50 + j31,4 + 53,7e^{-j57,5} = 80,1e^{-j10,1} \text{ Ом}$$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_{\Sigma}} = \frac{150e^{j0}}{80,1e^{-j10,1}} = 1,87e^{j10,1} \text{ А}$$

$$\underline{U}_{m_{ab}} = \underline{I}_m \cdot \underline{Z}_{ab} = 1,87e^{j10,1} \cdot 53,7e^{-j57,5} = 100,4e^{-j47,4} \text{ В}$$

$$i(t) = 1,87 \sin(\omega t + 10,1^\circ) \text{ А}$$

$$u_C(t) = 100,4 \sin(\omega t - 47,4^\circ) \text{ В.}$$

Независимые начальные условия:

$$i(0) = 1,87 \sin(10,1^\circ) = 0,32 \text{ А}$$

$$u_C(0) = 100,4 \sin(-47,4^\circ) = -73,9 \text{ В}$$

К зависимым начальным условиям относятся значения всех остальных токов и напряжений, а так же значения производных от всех переменных в момент коммутации при $t = 0$. Зависимые начальные условия могут изменяться скачкообразно, их значения зависят от вида и места коммутации.

Зависимые начальные условия определяются на момент коммутации $t = 0$ из системы дифференциальных уравнений (уравнений Кирхгофа),

составленных для схемы в состоянии после коммутации, путем подстановки в них найденных ранее независимых начальных условий.

Для рассматриваемой схемы рис. 2 система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}iR_1 + L \frac{di}{dt} + u_C &= e(t) \\ i &= C \frac{du_C}{dt}\end{aligned}$$

Из системы уравнений выражаем производные:

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{1}{L}(e(0) - u_C(0) - i(0)R),$$

$$\frac{du_C}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C}.$$

Для определения начальных условий для вторых производных исходные дифференциальные уравнения дифференцируют по переменной t и подставляют в них найденные на предыдущем этапе значения зависимых начальных условий, и т.д.

Начальные условия используются при расчете переходных процессов любым методом.

4. Классический метод расчета переходных процессов

Переходные процессы в любой электрической цепи можно описать системой дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. В математике известно несколько методов решения систем дифференциальных уравнений: классический, операционный, численный и др. Название метода расчета переходных процессов адекватно названию математического метода решения системы дифференциальных уравнений, которыми описывается переходные процессы.

Исключая из системы дифференциальных уравнений Кирхгофа лишние переменные, получим в результате для искомой функции $x(t)$ неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = F(t),$$

где x – искомая величина, например i или u ;

a_k – постоянные коэффициенты;

$F(t)$ – некоторая функция времени, определяемая источником энергии.

Из курса математики известно, что решение (общий интеграл) линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы двух решений: а) $x'(t)$ – полного решения однородного (без правой части) дифференциального уравнения и б) $x''(t)$ – частного решения неоднородного дифференциального уравнения для $t = \infty$:

$$x(t) = x'(t) + x''(t).$$

Вид частного решения $x''(t)$ для $t = \infty$ определяется источниками энергии и соответствует значению искомой функции в установившемся режиме после коммутации, в электротехнике эта составляющая решения получила название установившейся: $x''(t) = x_y(t)$.

Полное решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x'(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n t},$$

где A_1, A_2, \dots, A_n – постоянные интегрирования;

p_1, p_2, \dots, p_n – корни характеристического уравнения, которое получают из однородного дифференциального, заменив в нем $x \rightarrow 1$, $dx/dt \rightarrow p$ и т.д.:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0 = 0.$$

Эта составляющая решения не зависит от источников энергии, в электротехнике она получила название свободной: $x'(t) = x_{св}(t)$.

Таким образом, решение для искомой функции (тока, напряжения) может быть представлено в принятой в электротехнике форме:

$$x(t) = x_y(t) + x_{св}(t) = x_y(t) + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots$$

Физический смысл имеет только полное решение для искомой функции $x(t)$, а ее отдельные составляющие $x_y(t)$ и $x_{св}(t)$ являются расчетными величинами.

Метод расчета переходного процесса, заключающийся в решении неоднородного дифференциального уравнения классическим методом математики и определения решения для искомой функции в виде суммы установившейся и свободной составляющих, получил название классического.

Расчет переходного процесса классическим методом состоит из следующих составных частей или этапов:

- а) расчет установившейся составляющей $x_y(t)$;
- б) составление характеристического уравнения и определение его корней p_1, \dots, p_n ;
- в) определение постоянных интегрирования A_1, A_2, \dots .

Следует отметить, что расчет переходного процесса классическим методом выполняется не в строгом соответствии с математическим методом

решения неоднородного дифференциального уравнения. Физические законы электротехники позволяют существенно упростить это решение.

5. Определение установившейся составляющей $x_y(t)$

Как известно, установившаяся составляющая искомой функции $x_y(t)$, являясь частным решением неоднородного дифференциального уравнения при $t = \infty$, соответствует значению искомой функции в установившемся после коммутации режиме. Определение этой составляющей математическим методом из решения дифференциального уравнения довольно сложно и трудоемко. Гораздо проще найти эту функцию инженерным методом путем расчета схемы цепи в установившемся режиме после коммутации, что и делают на практике.

Пример. Определить установившуюся составляющую для тока i_y в схеме рис. 3 при заданных значениях параметров элементов: $R_1 = 50$ Ом, $L = 100$ мГн, $R_2 = 100$ Ом, $C = 50$ мкФ,

а) для постоянной ЭДС $e(t) = E = 150$ В = const;

б) для синусоидальной ЭДС $e(t) = 150\sin\omega t$, $f = 50$ Гц.

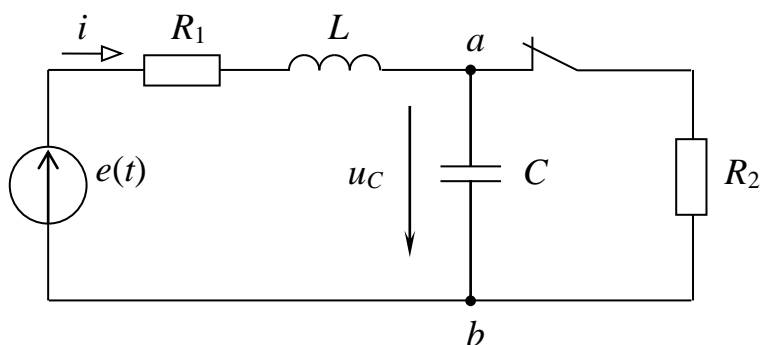


Рис. 3

После коммутации ветвь с резистором R_2 отключается и не оказывает влияния на режим остальной схемы.

Решение. а) При постоянной ЭДС источника $e(t) = E = \text{const}$ ток в схеме протекать не может (сопротивление конденсатора постоянному току равно ∞), следовательно $i_y(t) = 0$.

б) При переменной ЭДС источника $e(t) = E_m\sin\omega t$ расчет установившегося режима выполняется в комплексной форме для комплексных амплитуд функций. По закону Ома:

$$\underline{I}_{ym} = \frac{\underline{E}_m}{R_1 + jX_L - jX_C} = \frac{150e^{j0}}{50 + j31,4 - j63,7} = 2,52e^{j32,9} \text{ А},$$

$$i_y(t) = 2,52\sin(\omega t + 32,9^\circ) \text{ А}.$$

Вид установившейся составляющей соответствует виду источников энергии, которые действуют в схеме цепи.

6. Методы составления характеристического уравнения

Свободный режим схемы не зависит от источников энергии, определяется только структурой схемы и параметрами ее элементов. Из этого следует, что корни характеристического уравнения p_1, p_2, \dots, p_n будут одинаковыми для всех переменных функций (токов и напряжений).

Характеристическое уравнение можно составить различными методами. Первый метод – классический, когда характеристическое уравнение составляется строго в соответствии с дифференциальным по классической схеме. При расчете переходных процессов в сложной схеме составляется система из “ m ” дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для схемы цепи после коммутации. Так как корни характеристического уравнения являются общими для всех переменных, то решение системы дифференциальных уравнений выполняется относительно любой переменной (по выбору). В результате решения получают неоднородное дифференциальное уравнение с одной переменной. Составляют характеристическое уравнение в соответствии с полученным дифференциальным и определяют его корни.

Пример. Составить характеристическое уравнение и определить его корни для переменных в схеме рис. 4. Параметры элементов заданы в общем виде.

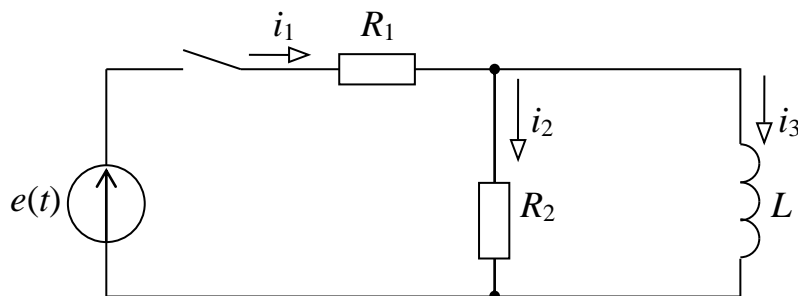


Рис. 4

Система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L \frac{di_3}{dt} = e(t) \quad (1) \Rightarrow i_1 = \frac{e}{R_1} - \frac{L}{R_1} \cdot \frac{di_3}{dt} \\ -i_2 R_2 + L \frac{di_3}{dt} = 0 \quad (2) \Rightarrow i_2 = \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_3}{dt} \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (3) \end{cases} .$$

Решим систему уравнений относительно переменной i_3 , в результате получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{E}{R_1} - \frac{L}{R_1} \cdot \frac{di_3}{dt} - \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_3}{dt} - i_3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2} \right) \cdot \frac{di_3}{dt} + i_3 = \frac{1}{R_1} e(t).$$

Характеристическое уравнение и его корень:

$$p \left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2} \right) + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \quad [c^{-1}].$$

Второй способ составления характеристического уравнения заключается в приравнивании нулю главного определителя системы уравнений Кирхгофа для свободных составляющих переменных.

Пусть свободная составляющая произвольного тока имеет вид $i_{кcb} = A_k e^{p \cdot t}$, тогда

$$\frac{di_{кcb}}{dt} = p \cdot A_k e^{p \cdot t} = p \cdot i_{кcb} \quad ; \quad \int i_{кcb} dt = \int A_k e^{p \cdot t} dt = \frac{1}{p} A_k e^{p \cdot t} = \frac{1}{p} i_{кcb}.$$

Система уравнений для свободных составляющих получается из системы дифференциальных уравнений Кирхгофа путем замены производных от переменных на множитель p , а интегралов – на $1/p$. Для рассматриваемого примера система уравнений для свободных составляющих имеет вид:

$$\begin{cases} i_{1cb} R_1 + 0 + pL \cdot i_{3cb} = 0 \\ 0 + i_{2cb} R_2 + pL \cdot i_{3cb} = 0 \\ i_{1cb} - i_{2cb} - i_{3cb} = 0 \end{cases}.$$

Характеристическое уравнение и его корень:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & pL \\ 0 & -R_2 & pL \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot pL - R_2 \cdot pL = 0 \Rightarrow p = \frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Третий способ составления характеристического уравнения (инженерный) заключается в приравнении нулю входного операторного сопротивления схемы относительно любой ее ветви.

Операторное сопротивление элемента получается из его комплексного сопротивления путем простой замены множителя $j\omega$ на p , следовательно

$$Z_R(p) = R; \quad Z_L(p) = pL; \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}.$$

Для рассматриваемого примера:

$$Z_1(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot pL}{R_2 + pL} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)};$$

$$Z_2(p) = R_2 + \frac{R_1 \cdot pL}{R_1 + pL} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)};$$

$$Z_3(p) = pL + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Третий способ является наиболее простым и экономичным, поэтому он чаще других применяется при расчете переходных процессов в электрических цепях.

Корни характеристического уравнения характеризуют свободный переходной процесс в схеме без источников энергии. Такой процесс протекает с потерями энергии и поэтому затухает во времени. Из этого следует, что корни характеристического уравнения должны быть отрицательными или иметь отрицательную вещественную часть.

В общем случае порядок дифференциального уравнения, которым описывается переходный процесс в схеме, и, следовательно, степень характеристического уравнения и число его корней равны числу независимых начальных условий, или числу независимых накопителей энергии (катушек L и конденсаторов C). Если в схеме цепи содержатся параллельно включенные конденсаторы C_1, C_2, \dots или последовательно включенные катушки L_1, L_2, \dots , то при расчете переходных процессов они должны быть заменены одним эквивалентным элементом $C_{\Sigma} = C_1 + C_2 + \dots$ или $L_{\Sigma} = L_1 + L_2 + \dots$.

Таким образом, общий вид решения для любой переменной при расчете переходного процесса может быть составлен только из анализа схемы цепи, без составления и решения системы дифференциальных уравнений.

Для рассматриваемого выше примера:

$$a) \dot{i}_1(t) = i_{1y}(t) + i_{1cs}(t) = I_{1y} + A_1 e^{p t} \quad - \text{при } e(t) = E = \text{const};$$

$$б) i(t) = i_{1y}(t) + i_{1cb}(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi) + A_1 e^{p_1 t} \quad \text{— при } e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha).$$

7. Определение постоянных интегрирования

Определение постоянных интегрирования производится на заключительном этапе расчета переходного процесса, когда остальные составляющие решения уже найдены. Постоянные интегрирования определяются путем подстановки в решение для искомой функции соответствующих начальных условий.

Пусть решение для искомой функции $i(t)$ содержит только одну постоянную интегрирования:

$$i(t) = i_y(t) + i_{cb}(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha) + A e^{p_1 t}.$$

Постоянная интегрирования находится путем подстановки в решение начального условия для самой функции, т.е. $i(0)$:

$$i(0) = i_y(0) + i_{cb}(0) = I_m \sin \alpha + A \quad \Rightarrow \quad A = i(0) - I_m \sin \alpha.$$

Пусть решение для искомой функции $i(t)$ содержит две постоянных интегрирования и имеет вид:

$$i(t) = i_y(t) + i_{cb}(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Постоянные интегрирования в этом случае находятся путем подстановки в решение начальных условий для самой функции $i(0)$ и для ее первой производной $\frac{di}{dt}(0)$:

$$\begin{cases} i(0) = I_m \sin \alpha + A_1 + A_2 \\ \frac{di}{dt}(0) = \omega I_m \cos \alpha + p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{cases}.$$

В результате совместного решения этой системы уравнений определяют искомые постоянные интегрирования A_1 и A_2 .

Последовательность выполнения отдельных этапов расчета переходных процессов классическим методом показана ниже в виде диаграммы.

8. Последовательность расчета переходных процессов классическим методом

Последовательность расчета переходных процессов классическим методом рассмотрена на конкретном примере. Пусть для схемы рис. 5

с заданными параметрами элементов $E = 100$ В, $R = 50$ Ом, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $C = 83,5$ мкФ, требуется определить ток i_1 после коммутации.

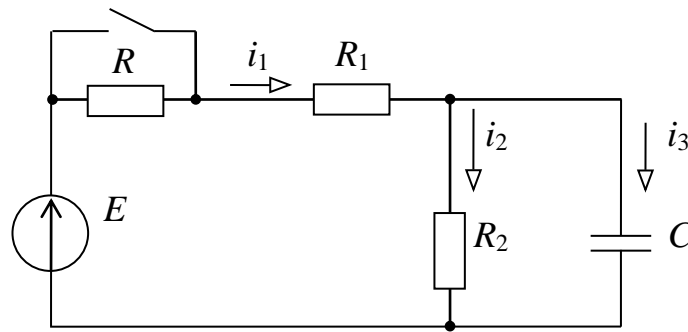


Рис. 5

1) Анализируется структура схемы в состоянии после коммутации, определяется общий вид решения для искомой функции:

$$i_1(t) = i_{1y} + i_{1св} = I_{1y} + Ae^{pt}.$$

2) Определяется установившаяся составляющая путем расчета схемы после коммутации:

$$i_{1y}(t) = I_{1y} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{20 + 30} = 2 \text{ А.}$$

3) Составляется характеристическое уравнение и определяется его корень:

$$Z_3(p) = \frac{1}{pC} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = \frac{20 + 30}{20 \cdot 30 \cdot 83,5 \cdot 10^{-6}} = -1000 \text{ с}^{-1}.$$

4) Определяется независимое начальное условие $u_C(0)$ путем расчета схемы до коммутации:

$$u_C(\text{до к}) = u_C(0) = i_2 R_2 = \frac{E \cdot R_2}{R + R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 30}{50 + 20 + 30} = 30 \text{ В.}$$

5) Составляется система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt = E & (1) \\ -i_2 R_2 + \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0 & (2) \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

6) Определяется зависимое начальное условие $i_1(0)$, необходимое для определения постоянной интегрирования из уравнения (1):

$$i_1(0) = \frac{E - u_C(0)}{R_1} = \frac{100 - 30}{20} = 3,5 \text{ А.}$$

7) Определяется постоянная интегрирования:

$$i_1(0) = i_{1y}(0) + i_{1cb}(0) = 2 + A_1 = 3,5 \Rightarrow A_1 = 3,5 - 2 = 1,5 \text{ А.}$$

8) Оформляется вид решения для искомой функции:

$$i_1(t) = i_{1y} + i_{1cb} = 2 + 1,5e^{-1000t}.$$

9) Строится графическая диаграмма искомой функции $i_1(t)$ (рис. 6):

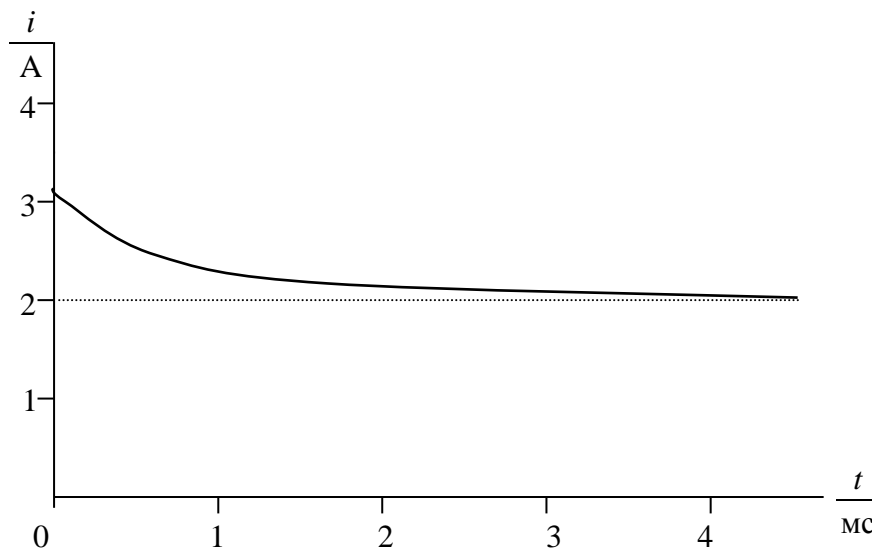


Рис. 6

9. Операторный метод расчета переходных процессов

Если система дифференциальных уравнений, которыми описывается переходной процесс в схеме, решается операционным методом, то и сам метод расчета переходного процесса также называется операционным или операторным.

Сущность операторного метода состоит в том, что на 1-ом этапе действительные функции времени $i(t)$, $u(t)$, называемые оригиналами, заменяются некоторыми новыми функциями $I(p)$, $U(p)$, называемыми операторными изображениями. Соответствие между оригиналом функции $f(t)$ и ее операторным изображением $F(p)$ устанавливается на основе прямого преобразования интеграла Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad \text{или} \quad F(p) \Leftrightarrow f(t),$$

где \Leftrightarrow – знак соответствия;

$p = \sigma + j\omega$ – комплексный оператор Лапласа.

Если $\sigma = 0$, то $p = j\omega$, и преобразование Лапласа превращается в преобразование Фурье, которое лежит в основе комплексного метода расчета цепей переменного тока.

Преобразование Лапласа позволяет заменить операции 2-го рода над оригиналами функций (дифференцирование и интегрирование) на операции 1-го рода (умножение и деление) над операторными изображениями этих функций.

Расчет переходных процессов операторным методом условно выполняется в 3 этапа.

На 1-м этапе расчета система дифференциальных уравнений, составленная по законам Кирхгофа для оригиналов функций, после применения преобразования Лапласа превращается в систему алгебраических уравнений для операторных изображений этих функций.

На 2-ом этапе выполняется решение системы алгебраических операторных уравнений относительно искомой функции, в результате чего получают выражение искомой функции в операторной форме $F(p)$.

На заключительном 3-м этапе выполняется обратный переход от найденного операторного решения для искомой функции $F(p)$ к соответствующей ей функции времени $f(t)$, т. е. Выполняется переход от изображения функции $F(p)$ к ее оригиналу $f(t)$.

Теоретически обратный переход от операторного изображения функции $F(p)$ к ее оригиналу $f(t)$ устанавливается на основе обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{pt} \cdot dp.$$

На практике для обратного перехода используются более простые и удобные методы, а именно: формула разложения и таблицы соответствия.

10. Операторные изображения некоторых функций времени

Найдем операторные изображения некоторых функций времени, которые встречаются в электротехнике.

1) Изображение постоянной функции $f(t) = A$:

$$f(t) = A \quad \Leftrightarrow \quad F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

2) Изображения экспоненциальных функций:

$$f(t) = e^{\pm\alpha t} \Leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{\pm\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{1}{-p \pm \alpha} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p \mp \alpha};$$

$$f(t) = e^{j(\omega t + \psi)} = e^{j\psi} e^{j\omega t} \Leftrightarrow F(p) = \frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}.$$

3) Изображения гармонических функций:

$$f(t) = \sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \Leftrightarrow F(p) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$f(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \Leftrightarrow F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

$$f(t) = \sin(\omega t + \psi) = \cos \psi \sin \omega t + \sin \psi \cos \omega t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(p) = \frac{\omega \cos \psi + p \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$$

1) Изображения 1-ой и 2-ой производной от функции времени:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &\Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot df = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot d(e^{-pt}) = \\ &= 0 - f(0) + p \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = pF(p) - f(0), \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Leftrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0).$$

2) Изображение определенного интеграла от функции:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t) \cdot dt &\Leftrightarrow \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) \cdot dt \right] \cdot e^{-pt} \cdot dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) \cdot dt \right] \cdot d(e^{-pt}) = \\ &= -\frac{1}{p} \left[\int_0^t f(t) \cdot dt \right] \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt = 0 + \frac{1}{p} F(p). \end{aligned}$$

Для удобства пользования сведем полученные результаты в общую таблицу, которая называется таблицей соответствия.

Таблица соответствия

Оригинал функции $f(t)$	Изображение функции $F(P)$
A	$\frac{1}{p} A$
$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$\frac{df}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0)$
$\int_0^t f(t) \cdot dt$	$\frac{1}{p} F(0)$

11. Законы электротехники в операторной форме

Мгновенные значения тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$ на идеальных элементах электрических схем связаны между собой дифференциальной формой уравнений: $u_R(t) = iR$ – для резистора; $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$ – для катушки индуктивности; $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$ – для конденсатора.

Применим к дифференциальным уравнениям преобразование Лапласа и получим соответствующие им операторные изображения:

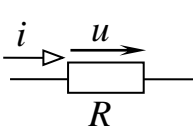
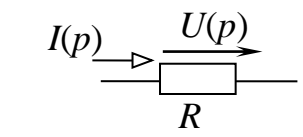
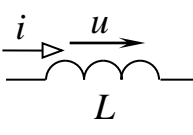
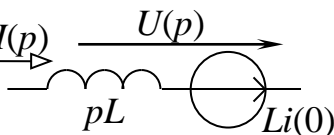
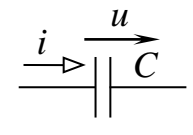
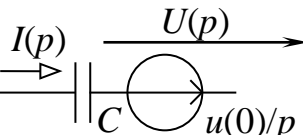
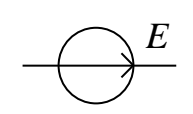
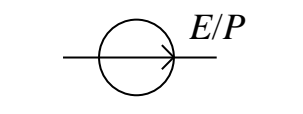
$$U_R(p) = I(p) \cdot R \text{ – для резистора;}$$

$$U_L(p) = I(p) \cdot pL - Li(0) \text{ – для катушки индуктивности;}$$

$$U_C(p) = I(p) \frac{1}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} \text{ – для конденсатора.}$$

Таким образом, идеальным элементам R, L, C электрической схемы будут соответствовать новые схемные представления этих элементов в операторной схеме (см. табл.).

Здесь $R, pL, 1/pC$ – операторные сопротивления соответственно резистора R , катушки L и конденсатора C . Операторное сопротивление $Z(p)$ любого участка схемы можно получить из его комплексного сопротивления $Z(j\omega)$, заменив в выражении множитель $j\omega$ на оператор p .

Электрическая схема	Дифференциальные уравнения	Операторные уравнения	Операторная схема
	$u = iR$	$U(p) = I(p)R$	
	$u = L \frac{di}{dt}$	$U(p) = pLI(p) - Li(0)$	
	$u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0)$	$U(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u(0)}{p}$	
	$E = \text{const}$	$\frac{E}{p}$	

$Li(0), u_C(0)/p$ – внутренние источники ЭДС, обусловленные запасами энергии в магнитном и электрическом полях в момент коммутации при $t = 0$. Направления действия внутренних источников ЭДС принимаются по направлению тока $i(0)$ для источника L $i(0)$ и навстречу напряжению $u_C(0)$ для источника $u_C(0)/p$.

С учетом полученных соотношений любую электрическую схему для оригиналов функций $i(t), u(t)$ можно заменить соответствующей ей операторной схемой для изображений функций $I(p), U(p)$, например, электрической схеме рис. 7 соответствует операторная схема, представленная на рис. 8.

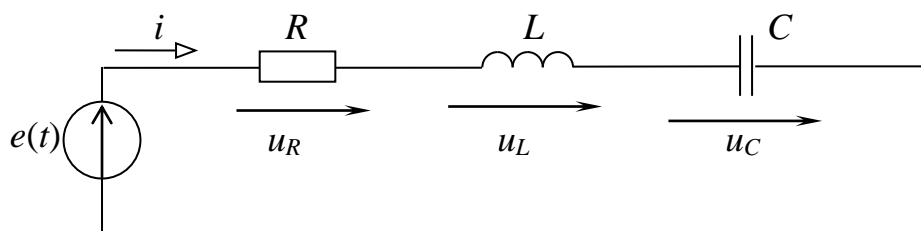


Рис. 7

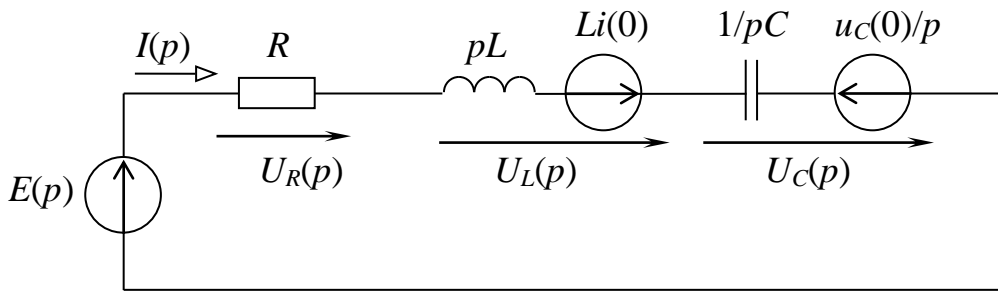


Рис. 8

Для электрической схемы рис. 7 справедливо дифференциальное уравнение, составленное по 2-му закону Кирхгофа:

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + u_C(0) = e(t).$$

Для операторной схемы рис. 8 справедливо аналогичное уравнение, но в операторной форме:

$$R \cdot I(p) + pL \cdot I(p) - Li(0) + \frac{1}{pC} \cdot I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = E(p),$$

откуда следует:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{\sum E(p)}{Z(p)},$$

где $Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$ – операторное сопротивление всей схемы,

$\sum E(p)$ – сумма всех источников ЭДС контура, в том числе и внутренних.

Для сложных операторных схем справедливы 1-й и 2-й законы Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum I(p)$$

$$\sum I(p) \cdot Z(p) = \sum E(p)$$

Для расчета таких схем можно применять любые методы расчета линейных цепей: метод законов Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов и другие. Порядок составления операторных уравнений для сложных схем аналогичен методу, тому порядку, который применяется по этому методу для электрических схем.

12. Способы составления системы операторных уравнений

При расчете переходных процессов операторным методом на практике применяется два способа составления системы операторных уравнений.

Сущность 1-го способа состоит в том, что для исходной электрической схемы составляется система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа. Затем каждое слагаемое в этих уравнениях непосредственно подвергается преобразованию Лапласа и таким образом система дифференциальных уравнений преобразуется в соответствующую ей систему операторных уравнений. Составление операторной схемы при этом не требуется.

По 2-му способу вначале составляется операторная схема цепи. Затем для операторной схемы по одному из методов расчета составляется система операторных уравнений, при этом преобразование Лапласа непосредственно не применяется.

Преимущество 2-го способа состоит в том, что система операторных уравнений для расчетной схемы может быть составлена по наиболее рациональному методу расчета.

Оба способа составления операторных уравнений иллюстрируются ниже на примере электрической схемы рис. 9.

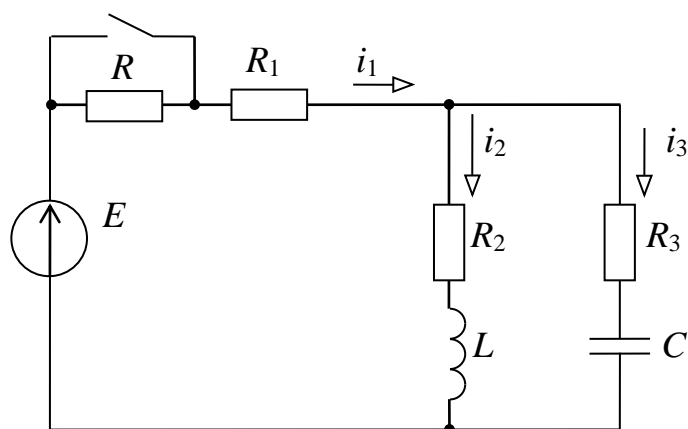


Рис. 9

По 1-му способу составляем систему дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для электрической схемы:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 R_1 + i_2 R_2 + L \frac{di_2}{dt} = E \\ i_1 R_1 + i_3 R_3 + \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt + u_C(0) = E \end{cases} .$$

Подвергаем преобразованию Лапласа каждое слагаемое в этих уравнениях и таким образом превращаем их в систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0 \\ I_1(p)R_1 - I_2(p)R_2 + L[pI_2(0) - i_2(0)] = \frac{E}{p} \\ I_1(p)R_1 - I_3(p)R_3 + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} I_3(p) + \frac{U_C(0)}{p} = \frac{E}{p} \end{cases} .$$

По 2-му способу составляется операторная схема замещения (рис. 10):

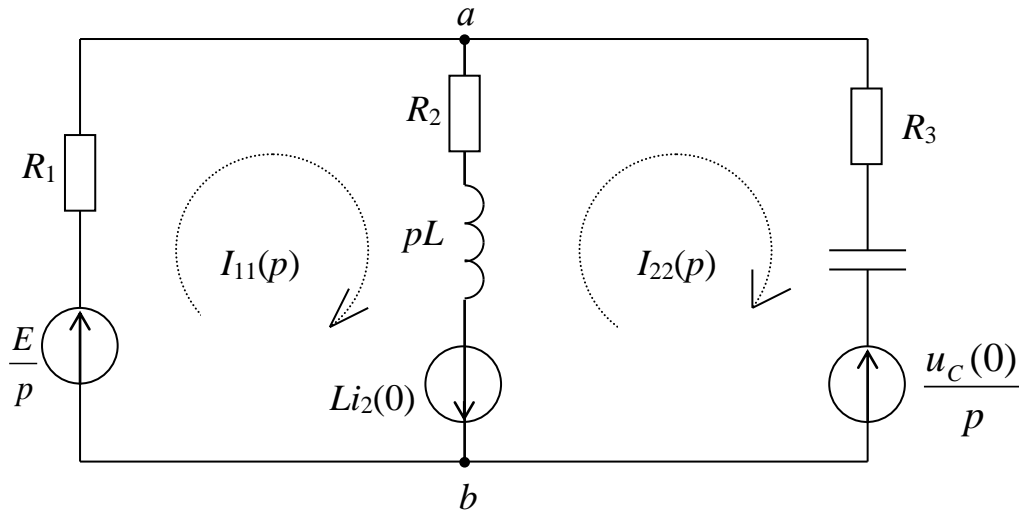


Рис. 10

Для операторной схемы рис. 10 составляем систему уравнений по одному из методов расчета сложных цепей, например, по методу контурных токов:

$$\begin{cases} I_{11}(p)(R_1 + R_2 + pL) - I_{22}(p)(R_2 + pL) = \frac{E}{p} + Li_2(0) \\ -I_{11}(p)(R_2 + pL) + I_{22}(p)\left(R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}\right) = -Li_2(0) - \frac{U_C(0)}{p} \end{cases}$$

или по методу двух узлов:

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{pR_1} - \frac{Li_2(0)}{R_2 + pL} + \frac{u_C(0)}{p(R_3 + 1/pC)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + pL} + \frac{1}{R_3 + 1/pC}}.$$

13. Переход от изображения функции $F(p)$ к ее оригиналу $f(t)$. Формула разложения

В результате совместного решения системы операторных уравнений получают выражение для искомой функции в операторной форме, т.е. ее операторное изображение $F(p)$. Переход от операторного изображения функции к ее оригиналу, т.е. к функции времени $f(t)$, является наиболее трудоемкой частью операторного метода расчета. На практике для этой цели применяются два способа.

Первый способ – по таблице соответствия. В этом случае операторное выражение искомой функции $F(p)$ преобразуется к одному из табличных видов и по таблице соответствия определяется оригинал функции $f(t)$. Следует заметить, что такое преобразование удается осуществить только для

простых выражений, что существенно ограничивает возможности этого способа.

Второй способ – по формуле разложения – является более универсальным, поэтому находит применение в большинстве практических случаев. Сущность этого способа изложена ниже.

При решении системы операторных уравнений для искомой функции получают операторное выражение $F(p)$ в виде дроби, в числителе и знаменателе которой стоят степенные полиномы:

$$F(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Из курса математики известно, что при выполнении условий: а) $m > n$ и б) уравнение $M(p) = 0$ не содержит кратных корней, выражение

$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ может быть представлена в виде суммы простых дробей:

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_m}{p - p_m} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{A_k}{p - p_k},$$

где A_1, A_2, \dots, A_m – постоянные коэффициенты,

p_1, p_2, \dots, p_m – корни уравнения $M(p) = 0$.

Для определения коэффициента A_1 умножим обе части уравнения на множитель $(p - p_1)$ и найдем предел выражения $F(p)$ при $p \rightarrow p_1$. Очевидно, что в правой части уравнения получим A_1 , а в левой – неопределенность, так как $M(p_1) = 0$. Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталья:

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{N(p)}{M(p)} (p - p_1) = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{N(p) \cdot 1 + (p - p_1) \cdot N'(p)}{M'(p)} = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)}.$$

Следовательно, формула для произвольного коэффициента:

$$A_k = \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}.$$

Тогда выражение искомой функции получает вид:

$$F(p) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \dots + \frac{N(p_m)}{M'(p_m)} \cdot \frac{1}{p - p_m} = \sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}.$$

По таблице соответствия находим, что операторному изображению $F(p) = \frac{A_k}{p - p_k}$ соответствует оригинал $f(t) = A_k e^{p_k t}$, следовательно, оригинал искомой функции получает вид:

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Это уравнение получило название **формулы разложения** и используется для перехода от операторного изображения функции $F(p)$ к ее оригиналу, т.е. функции времени $f(t)$. Порядок применения формулы разложения:

1) Операторное изображение искомой функции $F(p)$ преобразуют к виду дроби $F(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$, чтобы в числителе и знаменателе ее стояли степенные полиномы.

2) Приравнивают к нулю знаменатель дроби $M(p) = 0$ и находят корни этого уравнения p_1, p_2, \dots, p_m .

3) Находят выражение производной знаменателя дроби $M'(p) = \frac{dM(p)}{dp}$.

4) Определяют коэффициенты $A_k = \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$ путем поочередной подстановки значений каждого из корней p_1, p_2, \dots, p_m в это выражение.

5) Записывают решение для функции $f(t)$ в виде суммы отдельных слагаемых-экспонент, при необходимости упрощают выражение:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{k=m} A_k e^{p_k t}.$$

Последовательность выполнения отдельных этапов расчета переходных процессов операторным методом показано ниже в виде диаграммы.

Примечание. Составление системы операторных уравнений может выполняться по одному из двух вариантов: 1) путем непосредственного преобразования дифференциальных уравнений Кирхгофа в операторные и 2) путем составления системы уравнений по одному из методов расчета для операторной схемы замещения.

Замечания к формуле разложения.

1) Если в исходной схеме имеются источники постоянных ЭДС E , то уравнение $M(p) = 0$ может иметь один корень, равный нулю ($p_1 = 0$). Подстановка этого корня в формулу разложения дает постоянную величину

$f_1(t) = \frac{N(0)}{M'(0)} e^{0 \cdot t} = \text{const}$, которая соответствует установившейся составляющей искомой функции.

2) Если в исходной схеме имеются источники синусоидальных ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$, то уравнение $M(p) = 0$ будет иметь два чисто мнимых и сопряженных корня $p_1 = j\omega$ и $p_2 = -j\omega$. Подстановка этих корней в формулу разложения в сумме дает синусоидальную функцию времени, которая соответствует установившейся составляющей искомой функции:

$$f_1(t) = \frac{N(j\omega)}{M'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{N(-j\omega)}{M'(-j\omega)} e^{-j\omega t} = (C + jD)(\cos \omega t + j \sin \omega t) + (C - jD)(\cos \omega t - j \sin \omega t) = 2C \cos \omega t - 2D \sin \omega t = A \sin(\omega t + \psi)$$

3) Если уравнение $M(p) = 0$ имеет два комплексно сопряженных корня $p_1 = -b + j\omega_0$ и $p_2 = -b - j\omega_0$, то подстановка этих корней в формулу разложения в сумме дает синусоидальную функцию с затухающей амплитудой:

$$f_1(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} = (C + jD)e^{(-b + j\omega_0)t} + (C - jD)e^{(-b - j\omega_0)t} = e^{-bt} \cdot (2C \cos \omega_0 t - 2D \sin \omega_0 t) = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega_0 t + \psi)$$

4) Если уравнение $M(p) = 0$ имеет кратные корни ($p_1 = p_2$), то формула разложения неприменима. Случай кратных корней может встретиться в практике крайне редко. Чтобы применить формулу разложения в этом случае достаточно несущественно изменить параметры одного из элементов схемы.

14. Последовательность расчета переходных процессов операторным методом

Последовательность расчета переходных процессов операторным методом рассмотрена на конкретном примере. Пусть для схемы рис. 11 с заданными параметрами элементов $E = 100$ В, $R = 50$ Ом, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $C = 83,5$ мкФ, требуется определить ток i_1 после коммутации.

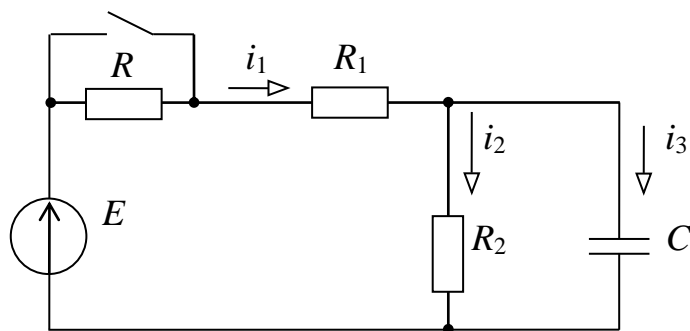


Рис. 11

1) Определяется независимое начальное условие $u_C(0)$ путем расчета схемы до коммутации:

$$u_C(\text{дк}) = u_C(0) = i_2 R_2 = \frac{E \cdot R_2}{R + R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 30}{50 + 20 + 30} = 30 \text{ В};$$

2) Составляется операторная схема цепи после коммутации (рис. 12):

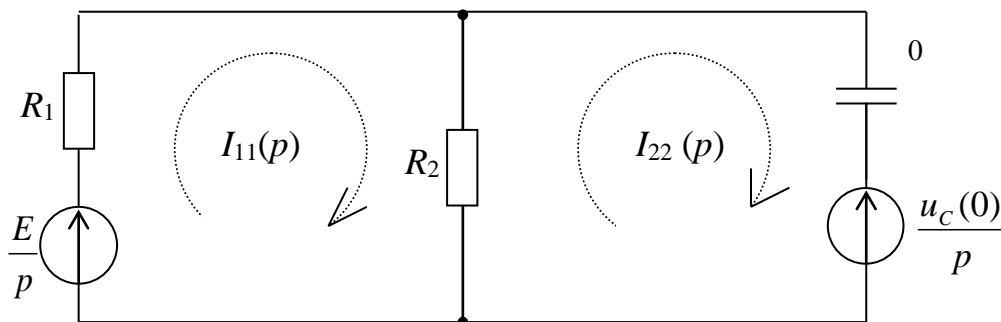


Рис. 12

3) Составляется система контурных уравнений в операторной форме для схемы рис. 12:

$$I_{11}(p) \cdot (R_1 + R_2) - I_{22}(p) \cdot R_2 = \frac{E}{p};$$

$$-I_{11}(p) \cdot R_2 + I_{22}(p) \cdot \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) = \frac{u_C(0)}{p};$$

4) Производится решение операторных уравнений относительно искомой функции $I_1(p)$:

$$I_1(p) = I_{11}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \dots = \frac{42p + 24000}{p(12p + 12000)} = \frac{N(p)}{M(p)},$$

где $N(p) = 42p + 24000$; $M(p) = p(12p + 1200)$; $M'(p) = 24p + 12000$;

5) Определяются корни уравнения $M(p) = 0$:

$$p(12p + 12000) = 0 \Rightarrow p_1 = 0; \quad p_2 = -1000;$$

6) Определяются коэффициенты A_k для отдельных корней p_k :

$$A_1 = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} = \frac{24000}{12000} = 2;$$

$$A_2 = \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} = \frac{42 \cdot (-1000) + 24000}{24 \cdot (-1000) + 12000} = 1.5;$$

7) Оформляется вид решения для искомой функции:

$$i_1(t) = \sum A_k e^{p_k t} = 2 + 1.5e^{-1000t}$$

8) Строится графическая диаграмма искомой функции $i_1(t)$ (рис. 13):

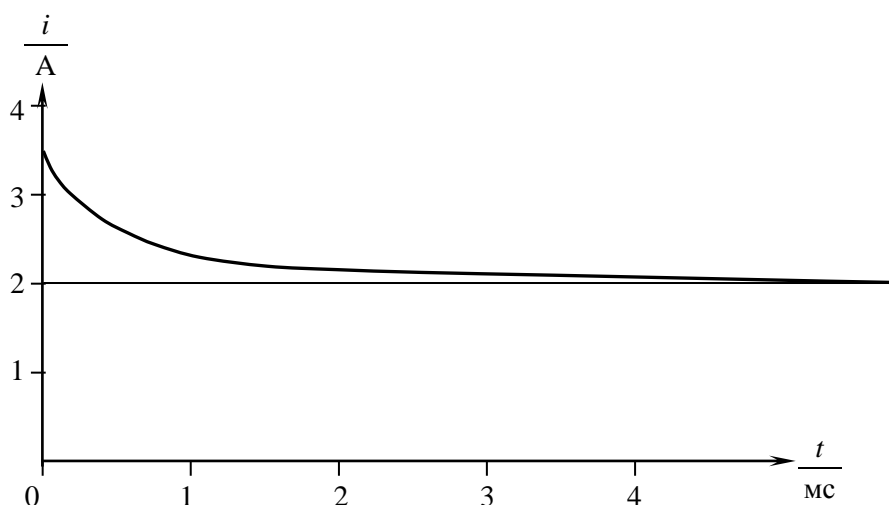


Рис. 13

15. Расчет переходных процессов методом численного интегрирования дифференциальных уравнений на ЭВМ

Система дифференциальных уравнений, которыми описывается состояние любой электрической цепи, может быть решена методом численного интегрирования на ЭВМ (метод последовательных интервалов или метод Эйлера).

Сущность метода состоит в том, что исследуемый промежуток времени T (при расчете переходных процессов это продолжительность переходного процесса) разбивается на большое число N элементарных отрезков времени $\Delta t = \frac{T}{N} = h$, которые называются шагом интегрирования.

В дифференциальных уравнениях дифференциалы функций заменяются их конечными приращениями

$$dt \rightarrow \Delta t = h, \quad dx_{(k)} \rightarrow \Delta x_{(k)} = x_{(k)} - x_{(k-1)},$$

а производные функций – отношениями приращений:

$$\frac{dx}{dt}(k) \rightarrow \frac{\Delta x_{(k)}}{\Delta t} = \frac{x_{(k)} - x_{(k-1)}}{h}, \text{ откуда следует: } x_{(k)} = x_{(k-1)} + h \frac{dx}{dt}(k).$$

Система дифференциальных уравнений решается на каждом шаге интегрирования, в результате решения определяются численные значения производных и самих функций. В качестве исходных данных для их определения используются значения этих же функций на предыдущем шаге, а на начальном 1-ом шаге – их значения в момент коммутации при $t = 0$, т.е. начальные условия. В результате расчета для функций и их производных составляются массивы их значений в исследуемом интервале времени T , которые после завершения цикла подвергаются соответствующей математической обработке, а именно: строятся графические диаграммы функций, составляются необходимые таблицы, исследуются функции на наличие максимумов и минимумов, устанавливается продолжительность переходного процесса и его характер, и т.д.

Пример. Рассчитать переходный процесс в схеме рис. 14 с заданными параметрами элементов: $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$, $R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, C$.

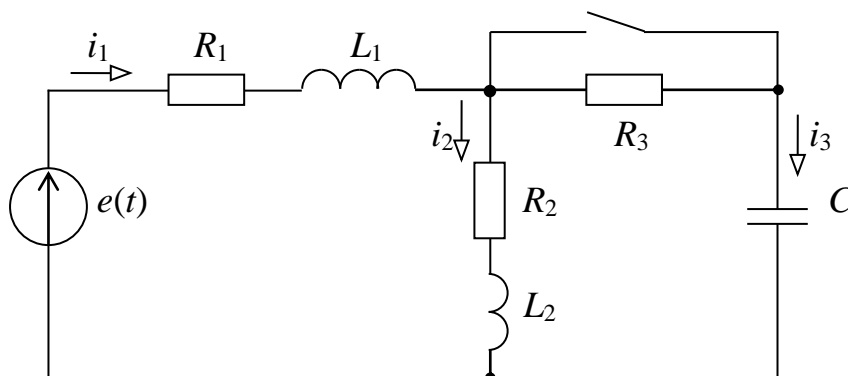


Рис. 14

Путем расчета схемы в установившемся режиме до коммутации определяются независимые начальные условия $i_1(0)$, $i_2(0)$, $u_C(0)$.

По законам Кирхгофа для схемы после коммутации составляется система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, & (1) \\ i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_C = E_m \sin(\omega t + \alpha), & (2) \\ -i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} + u_C = 0, & (3) \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}, & (4) \end{cases}$$

Выбирается шаг интегрирования h (например, из расчета $N = 1000$ шагов на период $T = 0,02$ с переменного тока, тогда $h = T / N = 2 \cdot 10^{-5}$ с).

Составляется алгоритм вычислений для произвольного k -го шага:

$i_1(k-1), i_2(k-1), u_C(k-1)$ – исходные данные,

$t(k) = k \cdot h$ – текущее время,

$$e(k) = E_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t(k) + \alpha\right),$$

$$\text{из (1)} \Rightarrow i_3(k) = i_1(k-1) - i_2(k-1),$$

$$\text{из (2)} \Rightarrow \frac{di_1}{dt}(k) = \frac{1}{L_1} (e(k) - i_1(k-1) \cdot R_1 - U_C(k-1)),$$

$$\text{из (3)} \Rightarrow \frac{di_2}{dt}(k) = \frac{1}{L_2} (U_C(k-1) - i_2(k-1) \cdot R_2),$$

$$\text{из (4)} \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(k) = \frac{1}{C} i_3(k),$$

$$i_1(k) = i_1(k-1) + h \frac{di_1}{dt}(k),$$

$$i_2(k) = i_2(k-1) + h \frac{di_2}{dt}(k),$$

$$u_C(k) = u_C(k-1) + h \frac{du_C}{dt}(k), \text{ конец цикла вычислений.}$$

Далее следуют вычисления по тому же алгоритму для $(k + 1)$ -го шага и т. д.

В соответствии с составленным алгоритмом на любом языке составляется программа вычислений на ЭВМ, что представляет собой несложную инженерную задачу.

16. Расчет переходных процессов численным методом на основе стандартных программ

Уравнениями состояния электрической цепи называют любую систему дифференциальных уравнений, которая описывает состояние (режим) данной цепи. Например, система уравнений Кирхгофа является уравнениями состояния цепи, для которой она составлена.

В более узком смысле в математике уравнениями состояния называют систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производных (форма Коши). Система уравнений состояния в обобщенной форме имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + F_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + F_2(t) \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + F_n(t) \end{cases}$$

Та же система уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

или в обобщенной матричной форме:

$$[x'] = [a] \times [x] + [F(t)]$$

Система уравнений формы Коши решается методом численного интегрирования (метод Эйлера или методы Рунге-Кутты) на ЭВМ по стандартной программе. Пример решения системы уравнений формы Коши методом Эйлера для k -го шага приведен ниже:

$$t_k = k \cdot h$$

Значения производных на k -ом шаге:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(k) = a_{11}x_1(k-1) + a_{12}x_2(k-1) + \dots + F_1(t_k) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt}(k) = a_{n1}x_1(k-1) + a_{n2}x_2(k-1) + \dots + F_n(t_k) \end{cases}$$

Значения переменных на k -ом шаге:

$$x_1(k) = x_1(k-1) + h \frac{dx_1}{dt}(k)$$

.....

$$x_n(k-1) = x_n(k-1) + h \frac{dx_n}{dt}(k)$$

Для определения значений переменных и их производных на 1-ом шаге интегрирования используются их значения на момент $t = 0$, т.е. их начальные условия $x_1(0)$, $x_2(0)$, ... $x_n(0)$.

В пакете MathCAD для численного интегрирования предусмотрены более сложные программы: *rkfixed(...)* – метод Рунге-Кутты 4-го порядка с фиксированным шагом интегрирования, *Rkadapt(...)* – метод Рунге-Кутты 4-го порядка с переменным (адаптивным) шагом интегрирования, и др.

Уравнения состояния формы Коши для заданной схемы могут быть получены из системы уравнений Кирхгофа путем их преобразования. Для этой цели: а) из системы уравнений Кирхгофа методом подстановки исключаются "лишние" переменные, имеющие зависимые начальные условия, и оставляют переменные $i_L(t)$ и $u_C(t)$, которые не изменяются скачком и имеют независимые начальные условия $i_L(0)$, $u_C(0)$; б) оставшиеся уравнения решаются относительно производных и приводятся их к форме Коши.

В случае сложных схем уравнения состояния формы Коши могут быть составлены топологическими методами с использованием матриц соединений $[A]$ и $[B]$.

Последовательность расчета переходного процесса численным методом на основе стандартных программ показана ниже на конкретном примере.

Пусть требуется для схемы рис. 15 с заданными параметрами элементов $e(t) = E_0 + E_m \sin(\omega t + \psi_E)$, $R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, C$ выполнить расчет переходного процесса и определить функции токов $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$.

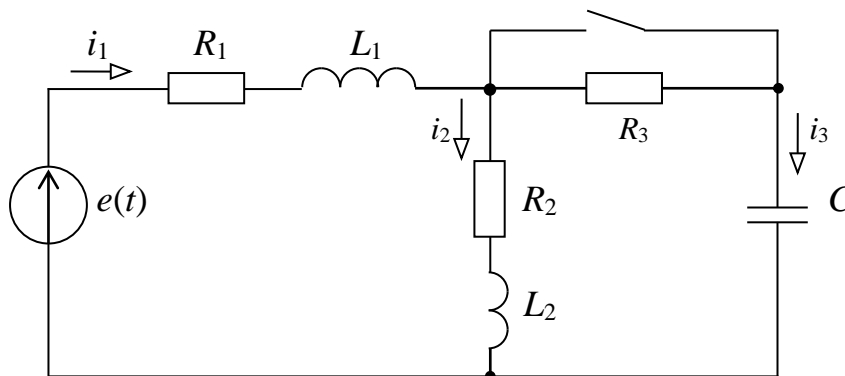


Рис. 15

1. Выполняется расчет схемы в установившемся режиме до коммутации и определяются начальные условия: $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$, $u_C(0) = 0$.

2. Составляется система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 & (1) \\ i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + i_3 R_3 + u_C = e(t) & (2) \\ -i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} + i_3 R_3 + u_C = 0 & (3) \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt} & (4) \end{cases}$$

3. Система уравнений Кирхгофа преобразуется в систему уравнений Коши. Для этой цели из (1) выражаем $i_3 = i_1 - i_2$ и делаем подстановку в (2) и (3), а из (4) делаем подстановку в (1). Тогда получим:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{-(R_3 + R_1)}{L_1} i_1 + \frac{R_3}{L_1} i_2 - \frac{1}{L_1} u_C + \frac{1}{L_1} e(t)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{R_3}{L_2} i_1 - \frac{R_3 + R_2}{L_2} i_2 - \frac{1}{L_2} u_C$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_2$$

4. Вводятся одноименные обозначения переменных: $i_1 = X_0$, $i_2 = X_1$, $u_C = X_2$. Составляются матрицы начальных условий и правых частей уравнений Коши.

$$\underline{N} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{F}(t, X) := \begin{bmatrix} \frac{-(R_1 + R_3)}{L_1} \cdot X_0 + \frac{R_3}{L_1} \cdot X_1 + \frac{-1}{L_1} \cdot X_2 + \frac{1}{L_1} \cdot e(t) \\ \frac{R_3}{L_2} \cdot X_0 + \frac{-(R_2 + R_3)}{L_2} \cdot X_1 + \frac{1}{L_2} \cdot X_2 \\ \frac{1}{C} \cdot X_0 + \frac{-1}{C} \cdot X_1 \end{bmatrix}$$

5. Система уравнений решается численным методом на ЭВМ по стандартной программе *rkfixed(...)*. Массивы значений переменных величин, получаемые в результате численного интегрирования, превращаются в соответствующие функции методом линейного интерполирования.

$$Z := rkfixed(N, 0, 0.2, 10000, F)$$

$$tn := Z^{(0)} \quad i1n := Z^{(1)} \quad i2n := Z^{(2)} \quad Ucn := Z^{(3)}$$

$$i1(t) := \text{lininterp}(tn, i1n, t) \quad i2(t) := \text{lininterp}(tn, i2n, t) \quad Uc(t) := \text{lininterp}(tn, Ucn, t)$$

$$i3(t) := i1(t) - i2(t) \quad Uab(t) := i3(t) \cdot R3 + Uc(t)$$

6. На заключительном этапе производится математическая обработка полученных результатов. Например, строятся графические диаграммы исследуемых функций (рис. 16), определяется характер и время переходного процесса и т.д.

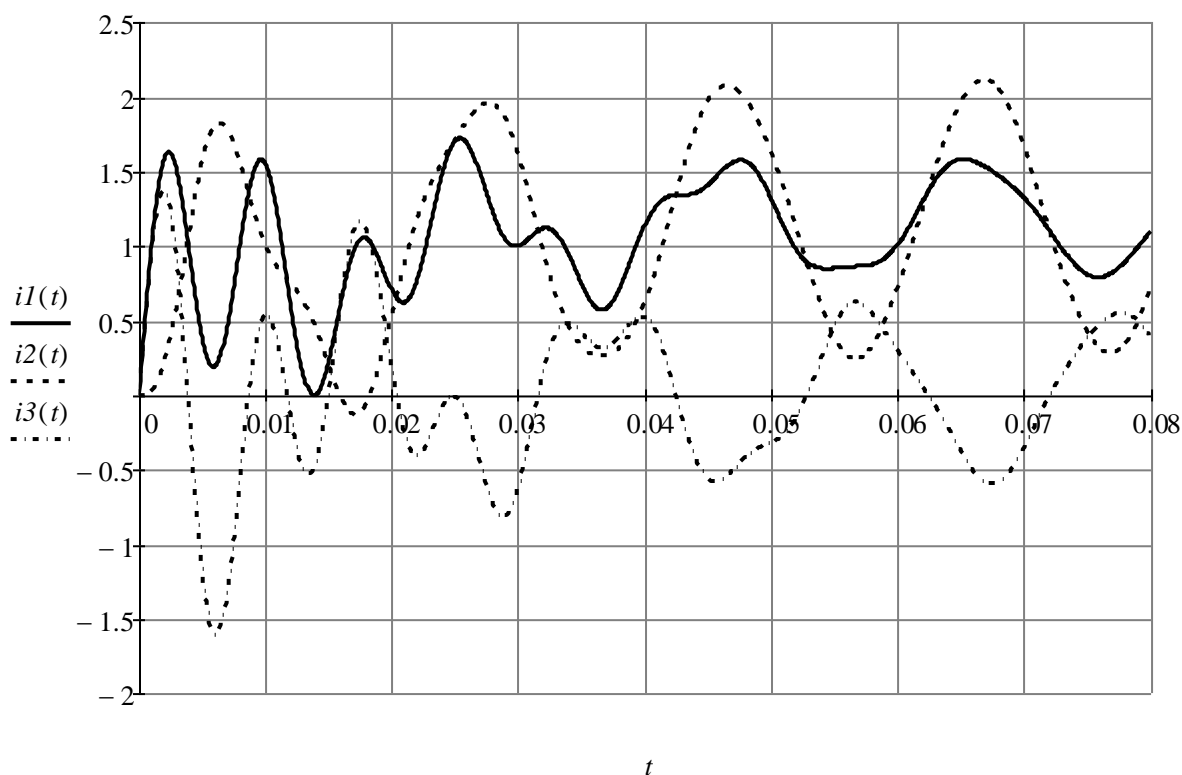


Рис. 16. Графические диаграммы функций токов

В настоящее время метод численного интегрирования является наиболее универсальным и наиболее простым методом расчета переходных процессов в электрических цепях. Достоинствами данного метода являются:

1. Метод численного интегрирования одинаково просто может применяться для расчета переходных процессов в электрических цепях любой сложности, содержащих любое число независимых накопителей энергии L и C . В то же время в классическом и операторном методах с увеличением числа независимых накопителей энергии (и соответственно порядка дифференциального уравнения) значительно возрастают математические сложности, что практически не позволяет применять эти методы для решения дифференциальных уравнений высоких порядков.

2. Метод численного интегрирования позволяет одинаково просто выполнять расчет переходных процессов в цепи при воздействии на нее источников ЭДС любой формы: постоянной, синусоидальной, несинусоидальной, импульсной, произвольной.

3. Метод численного интегрирования позволяет сравнительно просто выполнить математический анализ решения для искомой функции и получить выводы, необходимые для инженерной практики, а именно: определить характер и продолжительность переходного процесса, определить максимальные значения функций и т.д.

17. Анализ переходных процессов в цепи R, L

Исследуем, как изменяется ток $i(t)$ в цепи с резистором R и катушкой L в переходном режиме. В качестве примера рассмотрим переходной процесс при включении цепи R, L к источнику а) постоянной ЭДС $e(t) = E = \text{const}$ и б) переменной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$ (рис. 17).

Расчет переходного процесса выполним классическим методом.

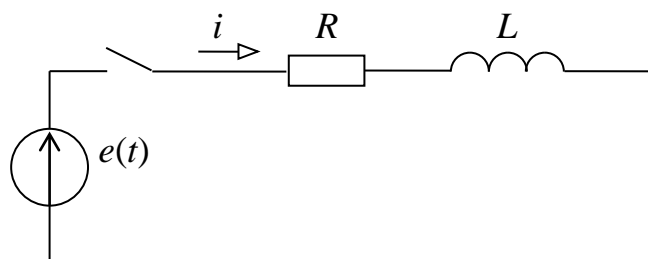


Рис. 17

а) Включение цепи R, L к источнику постоянной ЭДС $e(t) = E = \text{const}$.

Общий вид решения для тока: $i(t) = i_y(t) + i_{\text{св}}(t) = I_y + Ae^{pt}$.

Установившаяся составляющая тока: $I_y = \frac{E}{R}$.

Характеристическое уравнение и его корни:

$$Z(p) = R + pL = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}.$$

Независимое начальное условие: $i(0) = 0$.

Постоянная интегрирования: $i(0) = I_y + A = 0 \Rightarrow A = -I_y = -\frac{E}{R}$.

Окончательное решение для искомой функции:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

где $\tau = \frac{L}{R}$ – постоянная времени, численно равная времени, за амплитуда свободной составляющей затухает в $e = 2,72$ раза. Чем больше $\tau = \frac{L}{R}$, тем медленнее затухает переходной процесс. Теоретически затухание свободной составляющей продолжается до бесконечности. Техническое время переходного процесса $T_{\text{п}}$ определяется из условия, что за это время свободная составляющая уменьшается до 0,01 от ее первоначального значения:

$$e^{-\frac{T_{\text{п}}}{\tau}} = 0,01, \text{ откуда } T_{\text{п}} \approx 4\tau = 4 \frac{L}{R}.$$

На рис. 18 представлена графическая диаграмма искомой функции $i(t)$.

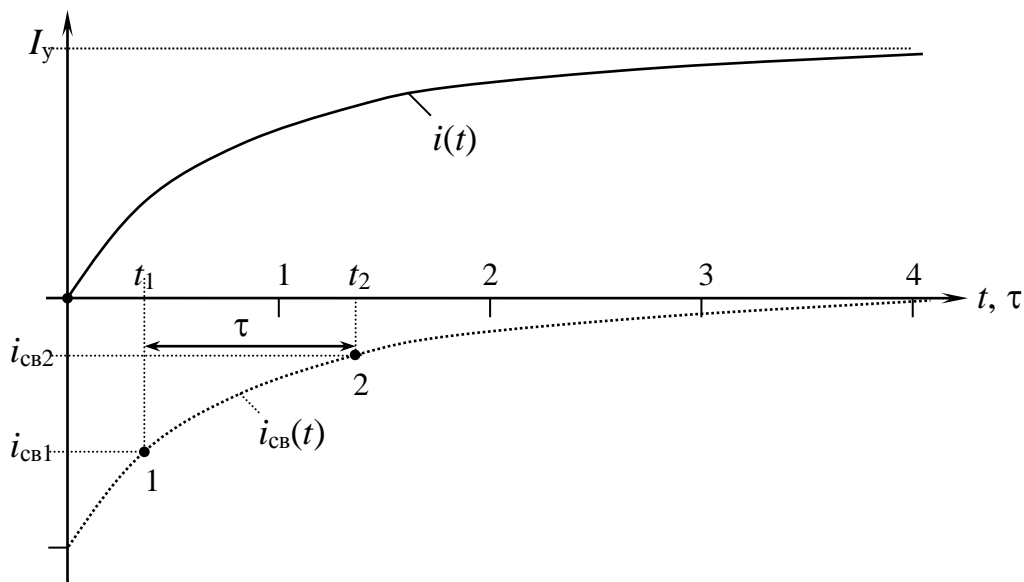


Рис. 18

Для приближенного построения графической диаграммы свободной составляющей $i_{св}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ можно воспользоваться таблицей значений этой функции в интервале времени $T_{\text{п}} = 4\tau$:

t	0	0,5	1,0	1,5	2	3	4
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0,61	0,37	0,22	0,14	0,05	0,02

Постоянная времени τ может быть определена из графической диаграммы функции $i_{\text{св}}(t)$ как отрезок времени $t_2 - t_1$, по краям которого отношение значений функции равно $\frac{i_{\text{св}1}}{i_{\text{св}2}} = e = 2.72$ раза (рис. 18).

б) Включение цепи R, L к источнику синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$

Общий вид решения для тока:

$$i(t) = i_y(t) + i_{\text{св}}(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) + Ae^{pt}.$$

Характеристическое уравнение и его корни:

$$Z(p) = R + pL = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

Установившаяся составляющая тока:

$$I_{ym} = \frac{E_m}{Z_{\ominus}} = \frac{E_m e^{j\alpha}}{R + jX_L} = \frac{E_m e^{j\alpha}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{E_m}{Z} e^{j(\alpha - \varphi)},$$

откуда следует

$$i_y(t) = \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi),$$

где $X_L = \omega L$, $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$, $\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$.

Независимое начальное условие: $i(0) = 0$

Постоянная интегрирования:

$$i(0) = \frac{E_m}{Z} \sin(\alpha - \varphi) + A = 0, \quad \text{откуда} \quad A = -\frac{E_m}{Z} \sin(\alpha - \varphi)$$

Окончательное решение для искомой функции:

$$i(t) = i_y(t) + i_{\text{св}}(t) = \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - \frac{E_m}{Z} \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Из анализа решения видно, что амплитуда свободной составляющей A зависит от начальной фазы α источника ЭДС. При $\alpha - \varphi = \pm 90^\circ$ эта ампли-

туда имеет максимальное значение $A = A_{\max} = \frac{E_m}{Z}$, при этом переходной процесс протекает с максимальной интенсивностью. При $\alpha - \varphi = 0$ амплитуда свободной составляющей равна нулю, и переходной процесс в цепи вообще отсутствует. На рис. 19 представлена графическая диаграмма искомой функции $i(t)$ при $\alpha - \varphi = -90$, $A = A_{\max} = \frac{E_m}{Z} = I_m$.

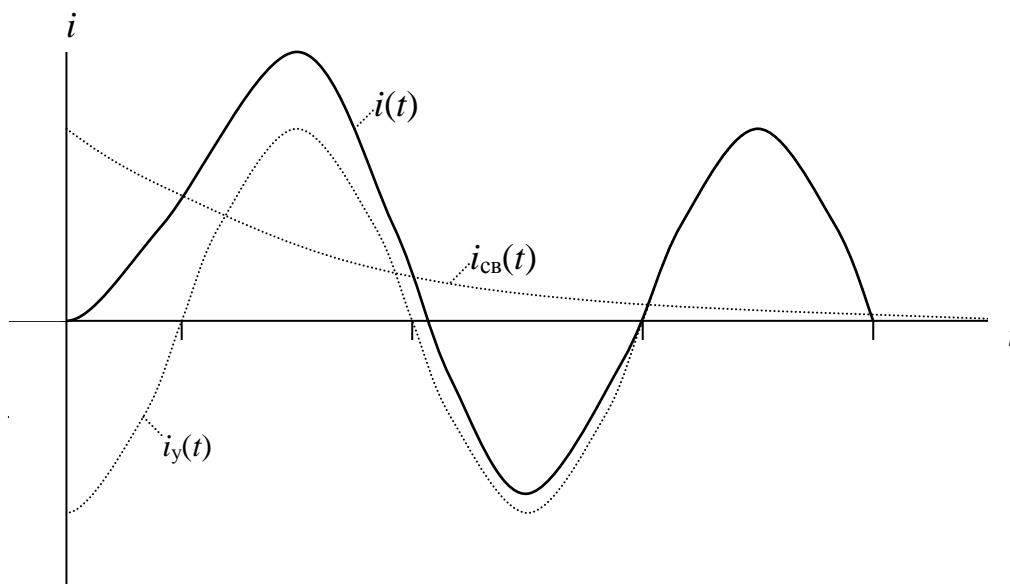


Рис. 19

18. Анализ переходных процессов в цепи R, C

Исследуем характер переходных процессов в цепи R, C при включении ее к источнику а) постоянной ЭДС $e(t) = E$, б) переменной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$ (рис. 20).

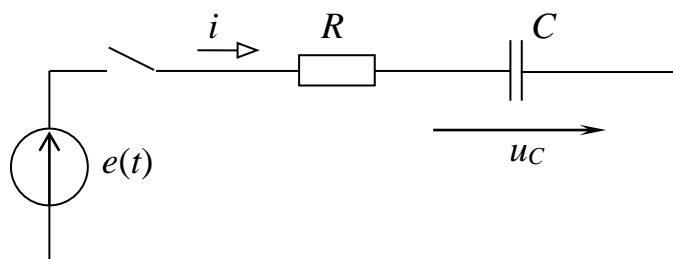


Рис. 20

а) Включение цепи R, C к источнику постоянной ЭДС $e(t) = E = \text{const}$.
Общий вид решения для напряжения $u_C(t)$:

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Cсв}(t) = U_{Cy} + Ae^{pt}.$$

Установившаяся составляющая напряжения: $U_{Cy} = E$:

Характеристическое уравнение и его корни:

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau},$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени.

Независимое начальное условие: $u_C(0) = 0$.

Постоянная интегрирования: $u_C(0) = u_{Cy} + A = 0 \Rightarrow A = -u_{Cy} = -E$.

Окончательное решение для искомой функции:

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Cсв}(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0 + C \frac{E}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Подсчитаем баланс энергий при зарядке конденсатора.

Энергия источника ЭДС:

$$W_{ucm} = \int_0^{\infty} E i dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{RC}} dt = -\frac{E^2 RC}{R} \left| e^{-\frac{t}{RC}} \right| = CE^2.$$

Энергия, выделяемая в резисторе R в виде тепла:

$$W_{тепл} = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{E^2 R}{R^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = -\frac{E^2 RC}{2R} \left| e^{-\frac{2t}{RC}} \right| = \frac{CE^2}{2}.$$

Энергия электрического поля конденсатора:

$$W_{эл} = \frac{Cu_{Cy}^2}{2} = \frac{CE^2}{2}.$$

Таким образом, энергия электрического поля конденсатора составляет ровно половину энергии источника $W_{эл} = \frac{W_{ист}}{2}$ и не зависит от величины сопротивления зарядного резистора R (закон половины).

Графические диаграммы функций $u_C(t)$ и $i(t)$ показаны на рис. 21.

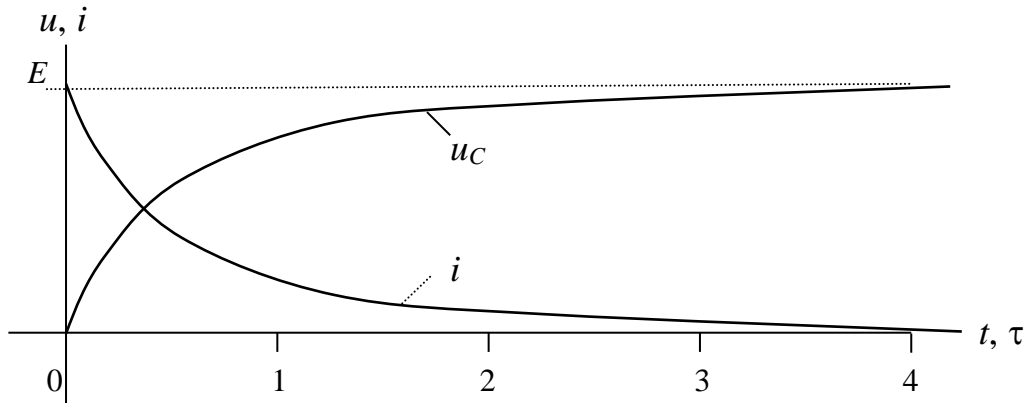


Рис. 21

б) Включение цепи R, C к источнику синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$.

Общий вид решения для напряжения u_C

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Cc}(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) + Ae^{pt}.$$

Характеристическое уравнение и его корень:

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} \Rightarrow p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}.$$

Установившаяся составляющая напряжения:

$$\underline{U}_{Cm} = I_m(-jX_C) = \frac{Ee^{j\alpha}}{Ze^{j\varphi}} X_c e^{-j90^\circ} = \frac{E_m X_C}{Z} e^{j(\alpha - \varphi - 90^\circ)},$$

откуда

$$u_{Cy}(t) = \frac{E_m}{Z} X_c \sin(\omega t + \alpha - \varphi - 90^\circ),$$

где $X_C = 1/\omega C$, $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$, $\varphi = \arctg \frac{-X_C}{R}$.

Независимое начальное условие: $u_C(0) = 0$.

Определение постоянной интегрирования:

$$u_C(0) = \frac{E_m X_C}{Z} \sin(\alpha - \varphi - 90^\circ) + A = 0 ;$$

откуда

$$A = -\frac{E_m X_C}{Z} \sin(\alpha - \varphi - 90^\circ).$$

Как следует из полученного уравнения, амплитуда свободной составляющей A зависит от начальной фазы α источника ЭДС. При $\alpha - \varphi - 90^\circ = \pm 90^\circ$ эта амплитуда имеет максимальное значение $A = A_{\max} = \frac{E_m X_C}{Z}$, при этом переходной процесс протекает с максимальной интенсивностью. При $\alpha - \varphi - 90^\circ = 0$ амплитуда свободной составляющей равна нулю и переходной процесс в цепи отсутствует.

19. Анализ переходных процессов в цепи R, L, C

Переходные процессы в цепи R, L, C описываются дифференциальным уравнением 2-го порядка. Установившиеся составляющие токов и напряжений определяются видом источника энергии и определяются известными методами расчета установившихся режимов. Наибольший теоретический интерес представляют свободные составляющие, так как характер свободного процесса оказывается существенно различным в зависимости от того, являются ли корни характеристического уравнения вещественными или комплексными сопряженными.

Проанализируем переходной процесс в цепи R, L, C при включении ее к источнику постоянной ЭДС (рис. 22).

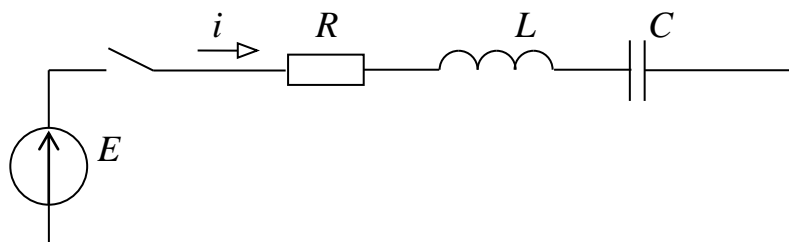


Рис. 22

Общий вид решения для тока:

$$i(t) = i_y(t) + i_{св}(t) = I_y + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Установившаяся составляющая: $I_y = 0$.

Характеристическое уравнение и его корни: $Z(p) = pL + \frac{1}{pC} + R = 0$,

откуда:

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}; \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Дифференциальное уравнение: $iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = E$.

Независимые начальные условия: $i(0) = 0$; $u_C(0) = 0$.

Зависимое начальное условие: $i(0)R + L\frac{di}{dt}(0) + u_C(0) = E$;

откуда $\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$.

Постоянные интегрирования определяется из совместного решения системы уравнений:

$$\begin{cases} i(0) = A_1 + A_2 = 0 \\ \frac{di}{dt}(0) = p_1A_1 + p_2A_2 = \frac{E}{L} \end{cases}$$

откуда $A_1 = -A_2 = \frac{E}{(p_1 - p_2)L}$.

Окончательное решение для тока:

$$i(t) = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t} = \frac{E}{(p_1 - p_2)L}(e^{p_1t} - e^{p_2t}).$$

Исследуем вид функции $i(t)$ при различных значениях корней характеристического уравнения.

а) Корни характеристического уравнения вещественные, не равны друг другу. Это имеет место при условии $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$ или $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, тогда $p_1 < 0$, $p_2 < 0$, причем $|p_1| < |p_2|$, $p_1 - p_2 > 0$.

При изменении t от 0 до ∞ отдельные функции e^{p_1t} и e^{p_2t} убывают по экспоненциальному закону от 1 до 0, причем вторая из них убывает быстрее, при этом их разность $e^{p_1t} - e^{p_2t} \geq 0$. Из этого следует вывод, что искомая функция тока $i(t)$ в крайних точках при $t = 0$ и при $t = \infty$ равна нулю,

а в промежутке времени $0 < t < \infty$ – всегда положительна, достигая при некотором значении времени t_m своего максимального значения I_{\max} . Найдем этот момент времени:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (p_1 e^{p_1 t_m} - p_2 e^{p_2 t_m}) = 0, \text{ или } p_1 e^{p_1 t_m} - p_2 e^{p_2 t_m} = 0,$$

откуда
$$t_m = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}.$$

Графическая диаграмма функции $i(t)$ для случая вещественных корней характеристического уравнения показана на рис. 23.

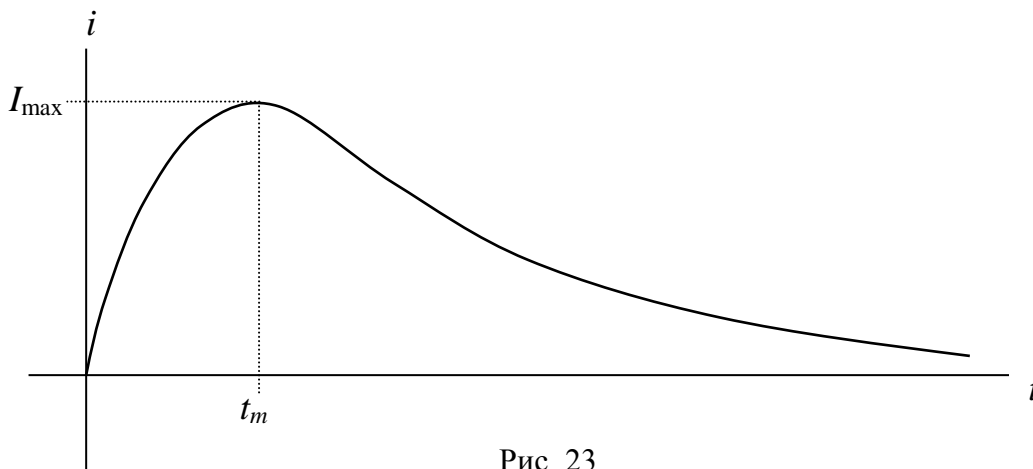


Рис. 23

Продолжительность переходного процесса в этом случае определяется меньшим по модулю корнем: $T_n = \frac{4}{|p_{\min}|}$.

Характер переходного процесса при вещественных корнях характеристического уравнения получил название затухающего или аperiodического.

б) Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные.

Это имеет место при соотношении параметров $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$ или $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$,

тогда

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -b \pm j\omega_0,$$

где $b = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ – угловая частота собственных колебаний.

Решение для исконой функции может быть преобразовано к другому виду:

$$i(t) = \frac{E}{(p_1 - p_2)L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E}{(-b + j\omega_0 + b + j\omega_0)L} (e^{(-b+j\omega_0)t} - e^{(-b-j\omega_0)t}) =$$

$$= \frac{Ee^{-bt}}{2j\omega_0 L} (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-bt} \sin \omega_0 t = Ae^{-bt} \sin \omega_0 t.$$

Таким образом, в случае комплексно сопряженных корней характеристического уравнения искомая функция $i(t)$ изменяется во времени по гармоническому закону $I_m \sin \omega_0 t$ с затухающей амплитудой $I_m(t) = Ae^{-bt}$. Графическая диаграмма функции $i(t)$ показана на рис. 24.

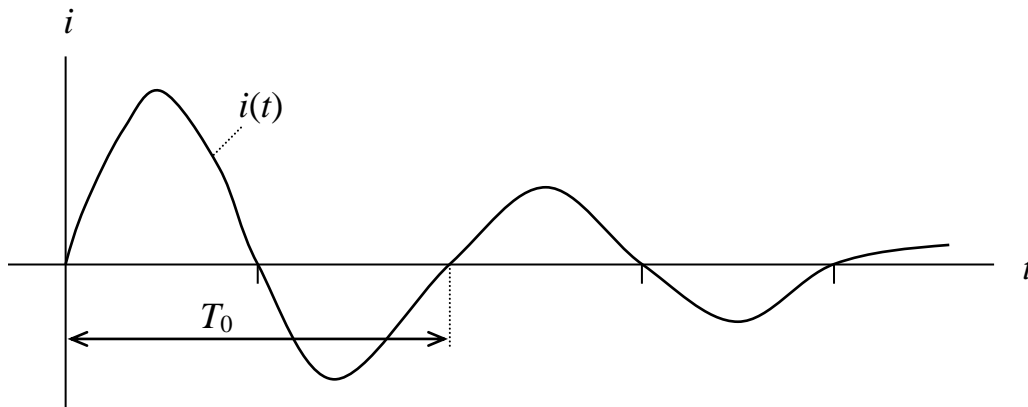


Рис. 24

Период колебаний $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, продолжительность переходного процес-

са определяется коэффициентом затухания: $T_n = \frac{4}{b}$.

Характер переходного процесса при комплексно сопряженных корнях характеристического уравнения получил название колебательного или периодического.

В случае комплексно сопряженных корней для определения свободной составляющей применяют частную форму:

$$x_{св}(t) = Ae^{-bt} \sin(\omega_0 t + \psi) \text{ или } x_{св}(t) = e^{-bt} (B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t),$$

где коэффициенты A и ψ или B и C являются новыми постоянными интегрирования, которые определяются через начальные условия для искомой функции.

в) Корни характеристического уравнения вещественные и равны друг другу. Это имеет место при условии $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$ или $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{кр}$, тогда $p_1 = p_2 = p = \frac{R}{2L}$.

Полученное ранее решение для искомой функции $i(t)$ в этом случае становится неопределенным, так как числитель и знаменатель дроби превращаются в нуль. Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталья, считая $p_2 = p = \text{const}$, а $p_1 = \text{var}$, которая стремится к p . Тогда получим:

$$i(t) = \frac{E}{L} \lim_{p_1 \rightarrow p} \frac{e^{p_1 t} - e^{p t}}{p_1 - p} = \frac{E}{L} \lim_{p_1 \rightarrow p} \frac{t e^{p_1 t}}{1} = \frac{E}{L} t e^{p t} = A t e^{p t}.$$

Характер переходного процесса при равных корнях характеристического уравнения получил название критического. Критический характер переходного процесса является граничным между затухающим и колебательным и по форме ничем не отличается от затухающего. Продолжительность переходного процесса $T_n = \frac{4}{p}$. При изменении только сопротивления резистора $R = \text{var} = 0 \div \infty$ затухающий характер переходного процесса соответствует области значений R_{var} ($R_{\text{кр}} < R_{\text{var}} < \infty$), колебательный характер – также области значений ($0 < R_{\text{var}} < R_{\text{кр}}$), а критический характер – одной точке $R_{\text{var}} = R_{\text{кр}}$. Поэтому на практике случай равных корней характеристического уравнения встречается крайне редко.

В случае равных корней для определения свободной составляющей применяют частную форму:

$$x_{\text{св}}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{p t},$$

где коэффициенты A_1 и A_2 являются новыми постоянными интегрирования, которые определяются через начальные условия для искомой функции.

Критический режим переходного процесса характерен тем, что его продолжительность имеет минимальное значение $\left(T_{n \text{ min}} = 2 \cdot \frac{4}{p_{\text{кр}}} = \frac{4R}{L} \right)$.

Указанное свойство находит применение в электротехнике.

20. Переходные функции по току и напряжению

Пусть произвольная электрическая цепь с нулевыми начальными условиями $[i_L(0) = 0, u_C(0) = 0]$ в момент времени $t = 0$ включается под действием источника постоянной ЭДС $e(t) = E = \text{const}$ (рис. 25).

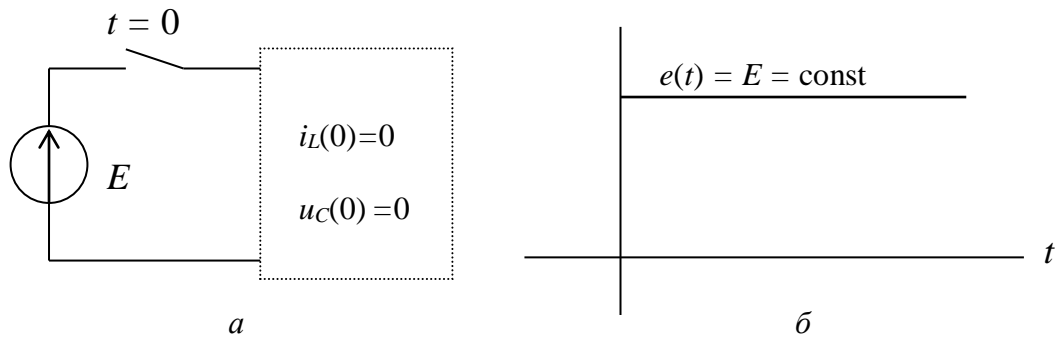


Рис. 25

Переходный процесс не изменится, если из схемы убрать ключ, а постоянную ЭДС $e(t) = E = \text{const}$ заменить скачкообразной $e(t) = E \cdot 1(t)$ со скачком в момент $t = 0$ (рис. 26).

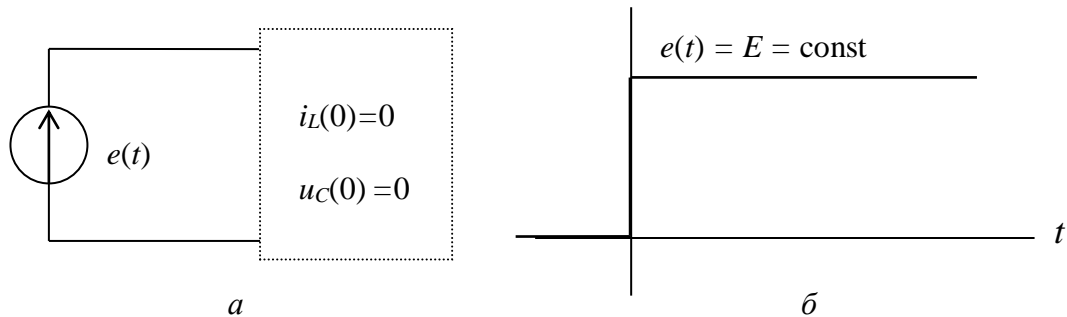


Рис. 26

Функция $1(t)$ называется единичной скачкообразной функцией, имеющей значения:

$$1(t) \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{при } t < 0 \\ \rightarrow 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Возникающие на любых участках цепи токи $i_k(t)$ и напряжения $u_k(t)$ прямо пропорциональны скачкообразной ЭДС $e(t) = E \cdot 1(t)$:

$$i_k(t) = e(t) \cdot h_i(t) = e(t) \cdot g(t)$$

$$u_k(t) = e(t) \cdot h_u(t) = e(t) \cdot k(t)$$

где $h_i(t) = g(t)$ – переходная функция по току, или переходная проводимость,

$h_u(t) = k(t)$ – переходная функция по напряжению.

Переходная функция по току $g(t)$ или по напряжению $k(t)$ называется функцией по времени, численно равная соответствующему току $i(t)$ или напряжению $u(t)$ при включении цепи с нулевыми начальными условиями к источнику единичной постоянной $e(t) = E \cdot 1(t)$. Переходные функции

$g(t)$ и $k(t)$ могут быть рассчитаны для любой схемы классическим или операторным методом.

Пример. Рассчитать переходные функции для тока $i(t)$ и напряжения $u_C(t)$ в цепи R, C .

Решение. Выполним расчет переходного процесса в цепи R, C при включении ее к источнику постоянной ЭДС $e(t) = E$ (рис. 27) классическим методом. В результате найдем:

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}; \quad u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

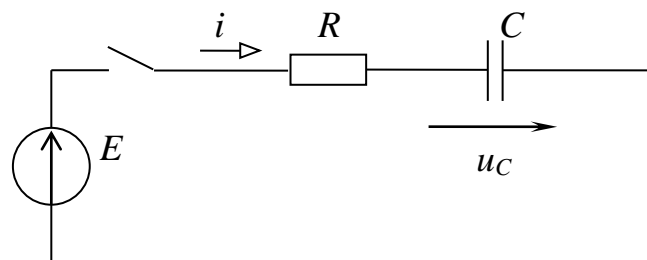


Рис. 27

Искомые переходные функции получим из найденных выражений, заменив в них E на 1.

$$g(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}; \quad k(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Переходные функции используются при расчете переходных процессов методом интеграла Дюамеля.

21. Расчет переходных процессов методом интеграла Дюамеля

Метод интеграла Дюамеля применяется для расчета переходных процессов в электрических цепях в том случае, если в рассматриваемой цепи действует источник ЭДС $u(t)$ произвольной формы, отличной от стандартной (постоянной или синусоидальной).

Пусть к источнику ЭДС произвольной формы $u(t)$ подключается цепь с нулевыми начальными условиями и с заданной переходной проводимостью $g(t)$ (рис. 28).

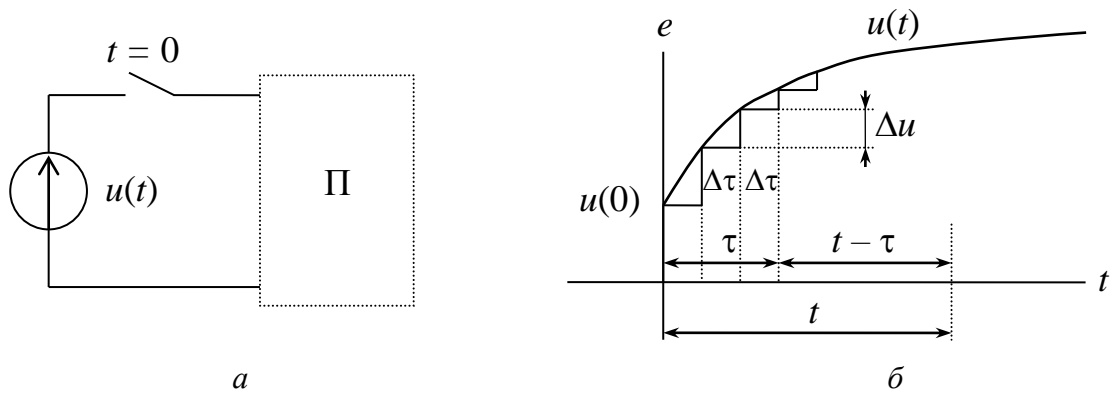


Рис. 28

Заменим непрерывную кривую ЭДС $u(t)$ приближенно ступенчатой с интервалами по оси t между отдельными скачками, равными $\Delta\tau$. Первый скачок ЭДС равен $u(0)$ и действует в момент $t = 0$. Все последующие скачки ЭДС можно определить как $\Delta u = \Delta\tau \cdot \operatorname{tg}\alpha = e'(\tau)\Delta\tau$ и действуют они с запаздыванием на τ , то есть в момент $t - \tau$. Ток на выходе цепи в произвольный момент времени t можно рассматривать в соответствии с принципом наложения как сумму частичных токов, возникающих под действием отдельных скачков ЭДС, следующих друг за другом через промежутки $\Delta\tau$ в интервале времени от 0 до t .

Частичный ток, вызванный первым источником ЭДС, будет равен $i'(t) = u(0) \cdot g(t)$, а частичные токи, вызванные последующими скачками ЭДС, будут равны: $i''(t) = \Delta u \cdot g(t - \tau) = u'(\tau) \cdot \Delta\tau \cdot g(t - \tau)$.

Результирующий ток равен сумме частичных токов:

$$i(t) = i'(t) + \sum_0^t i''(t) = u(0) \cdot g(t) + \sum_{\tau=0}^{\tau=t} u'(\tau) \cdot g(t - \tau) \Delta\tau.$$

Перейдем к бесконечно малым интервалам $\Delta\tau \Rightarrow dt$ и заменим сумму интегралом:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau.$$

Полученное выражение для $i(t)$ носит название интеграла Дюамеля и применяется на практике для расчета переходных процессов в электрических цепях при воздействии на них источников ЭДС или тока произвольной формы.

Порядок применения интеграла Дюамеля:

1) Выполняют расчет переходного процесса классическим или операторным методом при включении исследуемой цепи к источнику единичной

постоянной ЭДС $E=1$ и таким образом определяют необходимую переходную функцию по току $g(t)$ или по напряжению $k(t)$.

2) Определяют переходную функцию $g(t-\tau)$ или $k(t-\tau)$ путем замены в выражениях $g(t)$ или $k(t)$ переменной t на $t-\tau$.

3) Находят производную от функции ЭДС $u'(t) = \frac{d[u(t)]}{dt}$ и в полученном выражении заменяют переменную t на τ , в результате получают функцию $e'(\tau)$.

4) Выражения функций $u'(\tau)$, $g(t-\tau)$ или $k(t-\tau)$ подставляют в формулу интеграла Дюамеля, выполняют интегрирование по переменной τ и подставляют пределы интегрирования по переменной t . При необходимости упрощают структуру полученного выражения искомой функции $i(t)$ или $u(t)$.

Замечания:

1) Если функция $u(t)$ претерпевает скачки или разрывы, то она разбивается на отдельные участки с плавным изменением функции, при этом интеграл Дюамеля применяется к каждому участку в отдельности.

2) При расчете переходных процессов в цепях постоянного или синусоидального тока метод интеграла Дюамеля проигрывает классическому и операторному методам, поэтому для таких цепей он не применяется.

Пример. Рассчитать ток $i(t)$ в цепи R, C при действии на нее трапециевидного импульса с заданными параметрами (рис. 29):

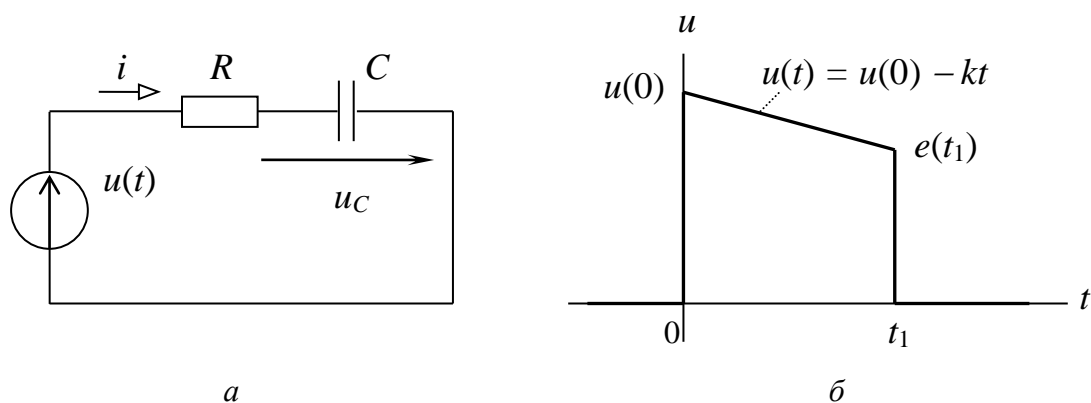


Рис. 29

Решение. Переходная проводимость схемы:

$$g(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{rC}}; \quad g(t-\tau) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t-\tau}{rC}} = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} e^{\frac{\tau}{RC}}.$$

Производная от функции ЭДС $u(t)$: $u'(t) = -k$; $u'(\tau) = -k$.

Так как функция $u(t)$ в момент времени $t = t_1$ изменяется скачком, то ее разбиваем на два участка $(0 \div t_1, t_1 \div \infty)$, для каждого из которых находим свое решение для искомой функции $i(t)$.

Решение для $0 \leq t \leq t_1$:

$$i(t) = u(0) \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} + \int_0^t -k \frac{1}{R} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = \frac{e(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{k}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \left(RC e^{-\frac{\tau}{RC}} \right)_0^t =$$

$$= u \frac{e(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - kC e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{-\frac{\tau}{RC}} - 1 \right) = \left(\frac{e(0)}{R} + kC \right) e^{-\frac{t}{RC}} - kC.$$

Решение для $t_1 \leq t \leq \infty$:

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^{t_1} u'(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau - u(t_1) \cdot g(t-t_1).$$

22. Расчет переходных процессов в цепи при воздействии на нее ЭДС $e(t)$ произвольной формы.

Расчет переходных процессов в цепи при воздействии на нее ЭДС $e(t)$ произвольной формы, отличной от стандартной (постоянной или синусоидальной), может быть выполнен также численным методом на ЭВМ основе стандартных программ. Рассмотрим применение данного метода на конкретном примере.

Пусть на цепь RLC (рис. 30) с заданными параметрами элементов в момент $t = 0$ действует напряжение импульсной формы (рис. 31).

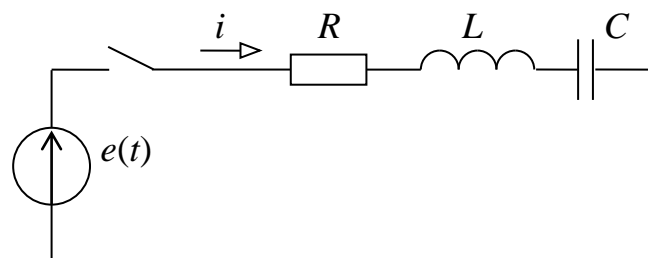
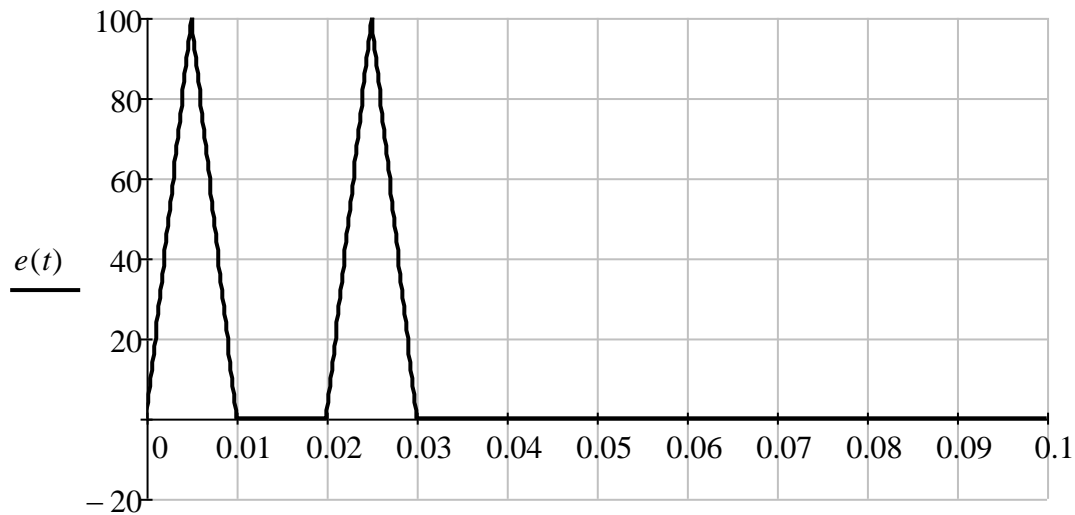


Рис. 30



t
Рис. 31

Решение задачи выполняется в следующей последовательности.

а) Выполняется аппроксимация (кусочно-линейная или сплайновая) заданной функции $e(t)$:

$$tk := (0 \ .005 \ .010 \ .020 \ .025 \ .030 \ .1)^T$$

$$uk := (0 \ 100 \ 0 \ 0 \ 100 \ 0 \ 0)^T$$

$$\underline{e}(t) := \text{lininterp}(tk, uk, t)$$

б) Для схемы цепи составляется система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа:

$$i_l \cdot R + L \frac{d}{dt} i_l + U_c = u(t) \qquad i_l = C \left(\frac{d}{dt} U_c \right)$$

в) Система дифференциальных уравнений приводится к форме Коши и решается по стандартной программе $Rkadapt(\dots)$

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D(t, X) := \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} X_0 + \frac{-1}{L} X_1 + e(t) \\ \frac{1}{C} \cdot X_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F} := Rkadapt(X, 0, 0.2, 10000, D)$$

$$t := F^{\langle 0 \rangle} \qquad i_l := F^{\langle 1 \rangle} \qquad U_c := F^{\langle 2 \rangle}$$

г) Производится обработка результатов расчета: строятся графические диаграммы исследуемых функций (рис. 32), определяются время и характер переходного процесса и т. д.

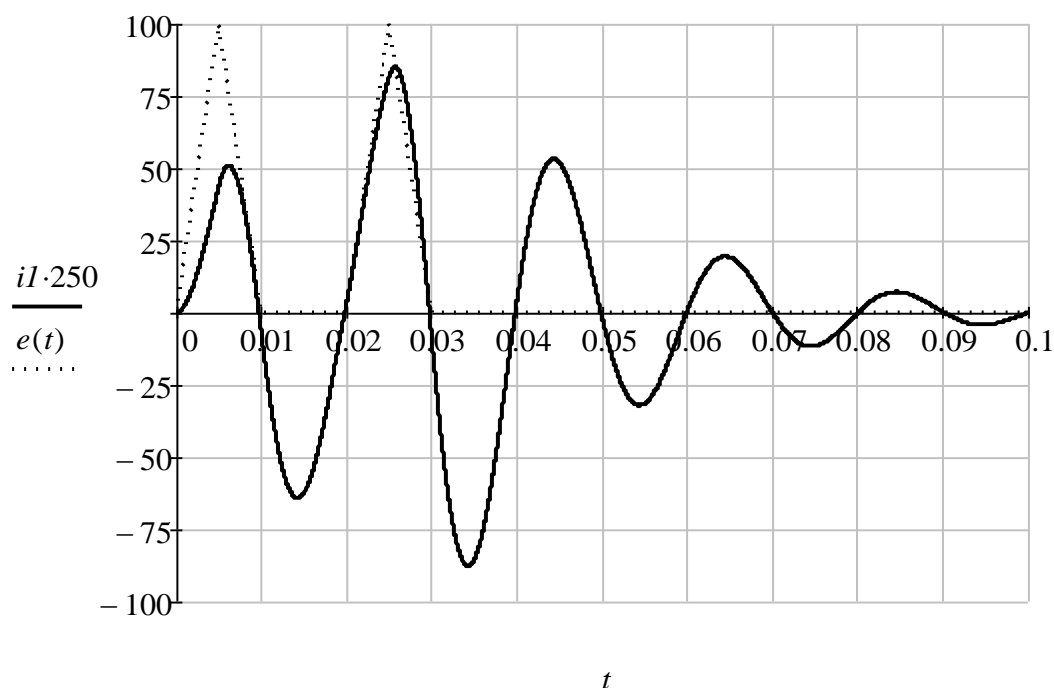


Рис.32

По сравнению с рассмотренным ранее методом интеграла Дюамеля численный метод обладает значительными преимуществами: а) численный метод универсален, он с одинаковым успехом может применяться для любых форм функции $e(t)$ и для цепей любой сложности; б) численный метод экономичен, трудозатраты на решение задачи практически не зависят от ее сложности; в) численный метод обладает сравнительно высокой точностью; г) результаты решения легко поддаются математической обработке и могут быть представлены в любой форме.

Т12. Синтез электрических цепей

1. Характеристика задач синтеза

Синтезом электрической цепи называют определение структуры цепи и параметров составляющих ее элементов R , L и C по известным свойствам (характеристикам), которым должна удовлетворять цепь. Задачи синтеза цепей противоположны по цели и содержанию задачам анализа. В отличие от задач анализа, имеющих, как правило, единственное решение, задачи синтеза могут иметь несколько решений, удовлетворяющих заданным условиям. В этом случае выбирают наиболее рациональное решение (например, по стоимости, по габаритам, по массе, по числу элементов и т.

д.) Кроме того, физического решения может не существовать вообще, так как из существующих реальных элементов не всегда можно построить электрическую цепь, удовлетворяющую заданным условиям.

Пусть требуется синтезировать электрическую цепь, для которой заданы временные характеристики на входе: $u(t) = 100\sin\omega t$, $i(t) = 1\sin(\omega t - 30^\circ)$. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость такой цепи равны:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{100e^{j0}}{1e^{-j30}} = 100e^{j30} = 86,7 + j50 = R + j\omega L,$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{1e^{-j30}}{100e^{j0}} = 0,01e^{-j30} = 0,00867 - j0,005 = \frac{1}{115} + \frac{1}{j200} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}.$$

Полученным значениям для \underline{Z} и \underline{Y} соответствуют две различные схемы замещения цепи (рис. 33, а, б):

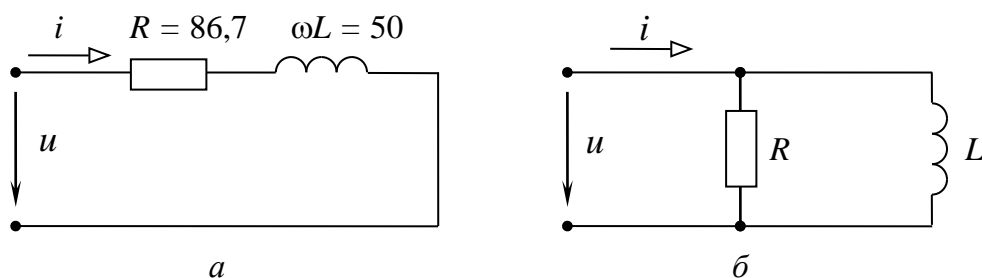


Рис. 33

Пусть временные характеристики цепи на входе имеют вид: $u(t) = 100\sin\omega t$, $i(t) = 1\sin(\omega t - 120^\circ)$. Комплексное сопротивление такой цепи равно:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{100e^{j0}}{1e^{-j120}} = 100e^{j120} = -50 + j86,7 = ? + j\omega L.$$

Данная цепь на основе пассивных элементов R , L и C физически нереализуема, так как в природе не существует резисторов с отрицательным сопротивлением.

С задачами синтеза на практике встречаются при проектировании сложных фильтров, корректирующих устройств в радиотехнике, технике связи, автоматике и телемеханике.

Синтез электрических цепей развивался по нескольким направлениям:

- 1) синтез цепи, заданной операторной входной характеристикой;

2) синтез цепи, заданной временной характеристикой в виде реакции цепи на воздействие импульса напряжения или тока прямоугольной формы, и др.

Наиболее простые результаты получены по первому направлению, которое и будет в дальнейшем рассмотрено.

2. Свойства входных операторных функций пассивных электрических цепей

Входной функцией цепи (двухполюсника) называется входное операторное сопротивление $Z(p)$ или входная операторная проводимость $Y(p)$. Пусть задана операторная схема некоторой цепи (рис. 34):

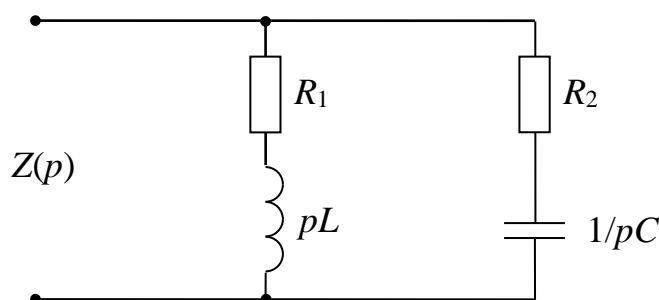


Рис. 34

Входное операторное сопротивление схемы будет равно:

$$Z(p) = \frac{(R_1 + pL)(R_2 + \frac{1}{pC})}{(R_1 + pL) + (R_2 + \frac{1}{pC})} = \dots = \frac{LCR_2p^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1}{LCp^2 + (R_1C + R_2C)p + 1} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Таким образом, входное операторное сопротивление $Z(p)$ или входную операторную проводимость $Y(p)$ для любой схемы можно представить в виде отношения двух полиномов:

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Входные операторные функции обладают следующими свойствами:

1) все коэффициенты a_k и b_k в числителе и знаменателе выражения $Z(p)$ должны быть вещественными и положительными числами, так как они образуются суммами, произведениями и частными от вещественных параметров элементов R , L и C ;

2) наивысшая степень числителя должна отличаться от наивысшей степени знаменателя не более, чем на 1;

3) нули и полюсы функции $Z(p)$ должны иметь отрицательную вещественную часть;

4) при замене оператора Лапласа на оператор Фурье ($p = \sigma + j\omega \Rightarrow j\omega$) вещественная часть функции должна быть положительной: $\text{Re}[Z(p)] = \text{Re}[Z(j\omega)] \geq 0$.

Нулями функции $Z(p)$ называются корни p_k уравнения $N(p) = 0$, при подстановке которых значение функции равно нулю: $Z(p_k) = 0$. Полюсами функции $Z(p)$ называются корни p_k уравнения $M(p) = 0$, при подстановке которых значение функции равно бесконечности: $Z(p_k) = \infty$. Известно, что свободные составляющие переходного процесса в электрической цепи описываются слагаемыми вида $A_k e^{p_k t}$ и обязательно должны затухать во времени, что возможно только, если действительная часть корней p_k отрицательна.

При замене оператора Лапласа на оператор Фурье ($p = \sigma + j\omega \Rightarrow j\omega$) операторное сопротивление $Z(p)$ превращается в комплексное сопротивление $\underline{Z}(j\omega) = R + jX$, вещественная часть которого равна активному сопротивлению R , которое не может быть отрицательным.

Функции, обладающие перечисленными свойствами, называются положительными вещественными функциями. Только такие функции могут быть реализованы в виде конкретной электрической цепи.

3. Синтез двухполюсника лестничной (цепной) схемой

Непрерывной дробью называется математическое уравнение вида:

$$D = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}}$$

Пусть электрическая цепь имеет лестничную (цепную) схему (рис. 35).

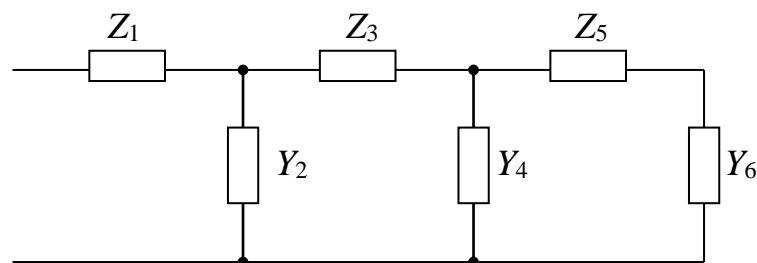


Рис. 35

Методом свертки выразим входное сопротивление и входную проводимость цепной схемы:

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}}; \quad Y_{\text{вх}} = \frac{1}{Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}}}.$$

Входное сопротивление и входная проводимость цепной схемы выражается уравнением, которое имеет структурную форму непрерывной дроби.

Таким образом, задача синтеза двухполюсника, заданного входной функцией $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ или $Y(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$, сводится к преобразованию этой функции к виду непрерывной дроби и последующему переходу к соответствующей этой дроби цепной схеме.

В математике разработаны способы преобразования простых дробей к виду непрерывной дроби. Порядок такого преобразования показан на конкретном примере:

$$D = \frac{41}{30} = 1 + \frac{11}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{11}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{8}{11}} = \dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}.$$

По аналогичной форме выполняется преобразование к виду непрерывной дроби выражений входных функций $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ или $Y(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$.

Процесс преобразования можно представить следующим образом:

1) располагают полиномы $N(p)$ и $M(p)$ либо по убывающим, либо по возрастающим степеням p ;

2) делят $N(p)$ на $M(p)$ как многочлен на многочлен, в результате получают частное $Ч_1(p)$ и некоторый остаток $O_1(p)$;

3) делят $M(p)$ на остаток $O_1(p)$ как многочлен на многочлен, в результате получают частное $Ч_2(p)$ и некоторый остаток $O_2(p)$;

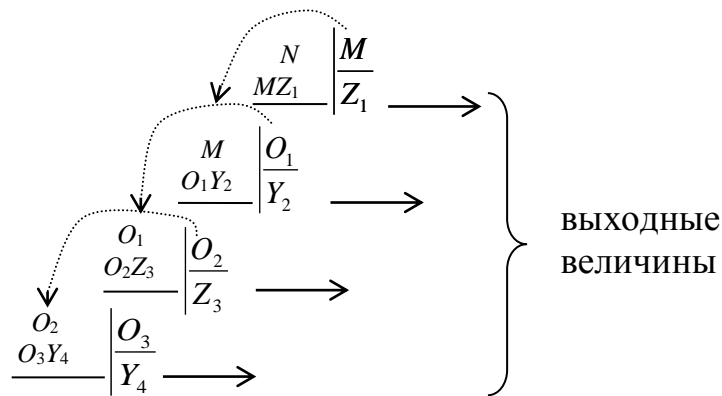
4) и т. д. продолжают процесс деления до получения частного без остатка;

5) в соответствии с полученной непрерывной дробью составляют цепную схему замещения в операторной форме;

6) переходят к физическим параметрам элементов схемы (к электрической схеме) на основе формул соответствия:

$$Z_R(p) = R; \quad Z_L(p) = pL; \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}.$$

На основании изложенного процесс последовательного деления можно представить следующей схемой:



При делении многочлена на многочлен следят за тем, чтобы в процессе деления в частном содержались только положительные члены, и чтобы они не содержали множитель p в степени больше 1.

4. Синтез двухполюсника методом разложения входной функции на простейшие составляющие

Выражение для входной функции $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ или $Y(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ математически можно разложить на простые слагаемые по форме:

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = A_{\infty}p + A_0 + \frac{N_1(p)}{M(p)} = A_{\infty}p + A_0 + \sum_1^m \frac{A_k}{p - p_k}.$$

Первые два слагаемые выделяют из входной функции $Z(p)$ путем деления $N(p)$ на $M(p)$ как многочлен на многочлен с целью понижения показателя числителя до значения $n = m - 1$, в результате получают частное $A_{\infty}p + A_0$ и некоторый остаток $N_1(p)$. Остаток функции раскладывают на простые слагаемые по известной в математике формуле разложения:

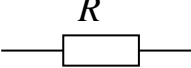
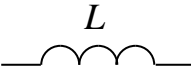
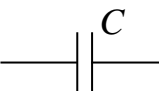
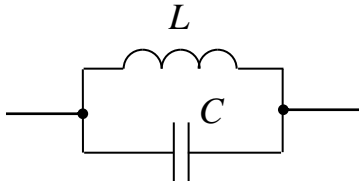
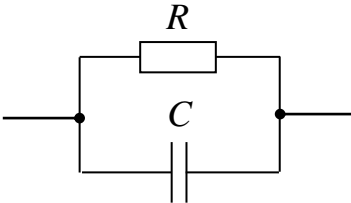
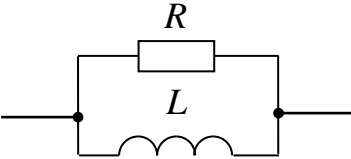
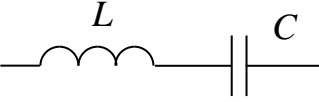
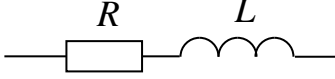
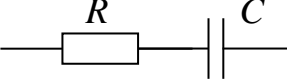
$$Z_1(p) = \frac{N_1(p)}{M(p)} = \sum_1^m \frac{A_k}{p - p_k},$$

где p_1, p_2, \dots, p_m – корни уравнения $M(p) = 0$; $A_k = \frac{N_1(p_k)}{M'(p_k)}$ – коэффициенты, определяемые согласно формуле разложения.

После разложения входной функции на простые слагаемые каждому слагаемому подбирают соответствующий ему участок операторной схемы, отдельные участки соединяют между собой последовательно для функ-

ции $Z(p)$ или параллельно для функции $Y(p)$, и таким образом получают схему цепи, соответствующей входной функции $Z(p)$ или $Y(p)$.

Рассмотрим простейшие схемы соединения элементов и соответствующие им операторные изображения.

	\Rightarrow	$Z(p) = R; \quad Y(p) = \frac{1}{R}$
	\Rightarrow	$Z(p) = pL; \quad Y(p) = \frac{1}{pL}$
	\Rightarrow	$Z(p) = \frac{1}{pC}; \quad Y(p) = pC$
	\Rightarrow	$Z(p) = \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{p \cdot \frac{1}{C}}{p^2 + \frac{1}{LC}}$
	\Rightarrow	$Z(p) = \frac{R \cdot \frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{1}{C}}{p + \frac{1}{RC}}$
	\Rightarrow	$Z(p) = \frac{R \cdot pL}{R + pL} = \frac{R \cdot p}{p + \frac{R}{L}}$
	\Rightarrow	$Y(p) = \frac{1}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{p \cdot \frac{1}{L}}{p^2 + \frac{1}{LC}}$
	\Rightarrow	$Y(p) = \frac{1}{R + pL} = \frac{\frac{1}{L}}{p + \frac{R}{L}}$
	\Rightarrow	$Y(p) = \frac{1}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{p \cdot \frac{1}{R}}{p + \frac{1}{RC}}$

Рассмотрим, каким образом может быть реализовано каждое слагаемое входной функции $Z(p)$. Первому слагаемому $A_\infty p$ соответствует катушка индуктивности $L = A_\infty$, так как $Z_L(p) = Lp$. Второму слагаемому A_0 соответствует резистор $R = A_0$.

Если среди корней p_k имеется корень $p_1 = 0$, то его подстановка в формулу разложения дает выражение вида $\frac{A_k}{p}$, которое в схеме может быть реализовано конденсатором $C = \frac{1}{A_k}$, так как $Z_C(p) = \frac{1}{pC}$.

Если среди корней p_k имеются мнимые сопряженные корни $p_2 = j\omega$ и $p_3 = -j\omega$, то их подстановка в формулу разложения дает следующее выражение ($A_2 = A_3 = A_k$):

$$\frac{A_2}{p - j\omega} + \frac{A_3}{p + j\omega} = \frac{2A_k \cdot p}{p^2 - \omega^2},$$

которому соответствует параллельный резонансный контур, состоящий из элементов L и C , для которого $\frac{1}{L} = 2A_k$ и $\omega^2 = \frac{1}{LC}$.

Если среди корней p_k имеется вещественный отрицательный корень $p_4 = -b$, то его подстановка в формулу разложения дает выражение вида $\frac{A_k}{p + b}$, которое может быть реализовано схемой с параллельным соединением элементов R и C при соотношении $A_k = \frac{1}{C}$, и $b = \frac{1}{RC}$.

Слагаемые, соответствующие комплексно сопряженным корням $pk = -b \pm j\omega_0$, могут быть реализованы более сложными методами, рассмотрение которых здесь не приводится.

Часть 2. Теория нелинейных цепей

Т1. Нелинейные цепи постоянного тока

1. Нелинейные элементы, их характеристики и параметры

В теории линейных цепей предполагалось, что параметры всех элементов цепи являются постоянными величинами, независящими от токов и напряжений. Каждому идеальному элементу цепи приписывалось определенное значение его параметра: резистору – сопротивление R , катушке – индуктивность L , конденсатору – емкость C . Физические характеристики таких элементов ($u = R \cdot i$ – для резистора, $\psi = L \cdot i$ – для катушки, $q = C \cdot u$ – для конденсатора) описываются уравнением прямой линии $y = a \cdot x$, поэтому такие элементы получили общее название линейных, а электрические цепи, состоящие из таких элементов, также называются линейными.

Идеальных линейных элементов в природе не существует. В действительности параметры всех элементов в той или иной мере зависят от их физического состояния, т.е. от тока, напряжения, температуры. Если эта зависимость выражена незначительно, то ею при расчете цепей пренебрегают и элементы считают линейными.

Однако существует обширный класс элементов электрических цепей, параметры которых существенно зависят от тока и напряжения и эту зависимость необходимо учитывать при расчете электрических цепей. Такие элементы получили название нелинейных, так как их физические характеристики не могут быть описаны уравнением прямой линии. Таким элементам нельзя придать определенное значение параметра сопротивления R , индуктивности L и емкости C . С целью отличия нелинейных элементов от линейных на электрических схемах на обозначение элемента наносится дополнительный знак “ключка” (рис. 36):

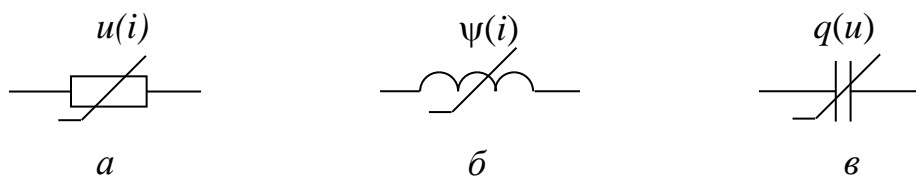


Рис. 36

При расчете электрических цепей нелинейные элементы задаются их физическими характеристиками в исследуемом диапазоне значений физических параметров. Эти характеристики получили следующие названия: а) для нелинейного резистора $u = f(i)$ или $i = f(u)$ – вольт-амперная характеристика или сокращенно ВАХ; б) для нелинейной катушки $\psi = f(i)$ или $i = f(\psi)$ – вебер-амперная характеристика или сокращенно ВАХ; в) для нелинейного конденсатора $q = f(u)$ или $u = f(q)$ – кулон-вольтная характеристика или сокращенно КВХ.

Физические характеристики нелинейных элементов могут быть заданы тремя способами:

1) графической диаграммой функции $y = f(x)$ с указанием масштабов физических величин по координатным осям, например, для нелинейного резистора ВАХ $u = f(i)$ показана на рис. 37;

2) таблицей координат точек функции $y = f(x)$ в исследуемом диапазоне значений физических величин, например, для нелинейного резистора ВАХ $u = f(i)$ задана табл. 1;

3) в виде нелинейного математического уравнения $y = f(x)$, которое приближенно описывает функцию в исследуемом диапазоне значений физических величин, например, для нелинейного резистора ВАХ $u = f(i)$ задана уравнением $u = 100i^2$.

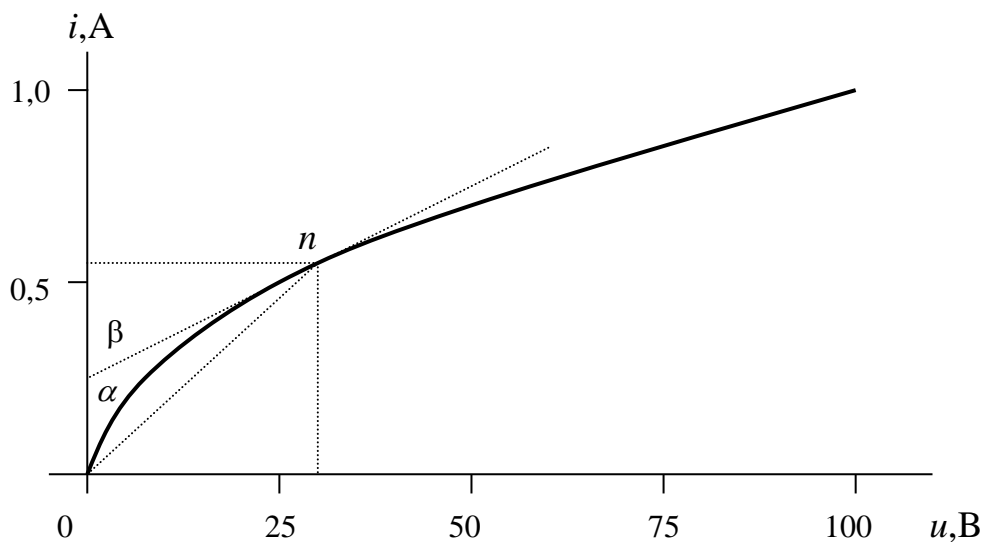


Рис. 37

Т а б л и ц а 1

i, A	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
u, B	9	25	49	64	81	100	121

Для каждой точки характеристики нелинейного элемента могут быть определены статические и дифференциальные параметры. Для рассматриваемого примера нелинейного резистора в каждой точке характеристики $u = f(i)$ могут быть определены статическое и дифференциальное сопротивления:

$$R_{cm} = \frac{u}{i} = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \alpha, \quad R_d = \frac{du}{di} = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \beta.$$

Как статическое, так и дифференциальное сопротивления нелинейного резистора зависят от положения точки на ВАХ, т.е. от параметров режима (u, i). Как следует из графической диаграммы рис. 199 для рассмат-

риваемой точки n $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, $R_{ст} \neq R_{\partial}$. Статическое сопротивление нелинейного резистора $R_{ст}$ во всех точках ВАХ всегда положительно ($R_{ст} > 0$), а дифференциальное сопротивление на некоторых участках ВАХ может быть отрицательным.

Ниже приводятся графические диаграммы ВАХ некоторых нелинейных элементов, наиболее часто встречающихся в цепях электроэнергетики (рис. 38, а, б, в, г).

На рис. 38, а представлена графическая диаграмма ВАХ $i = f(u)$ для лампы накаливания. Характерная особенность ВАХ: увеличение $R_{ст}$ с ростом тока, что объясняется зависимостью сопротивления металлов от температуры. Для ламп накаливания $R_{гор} / R_{хол} \approx 10$.

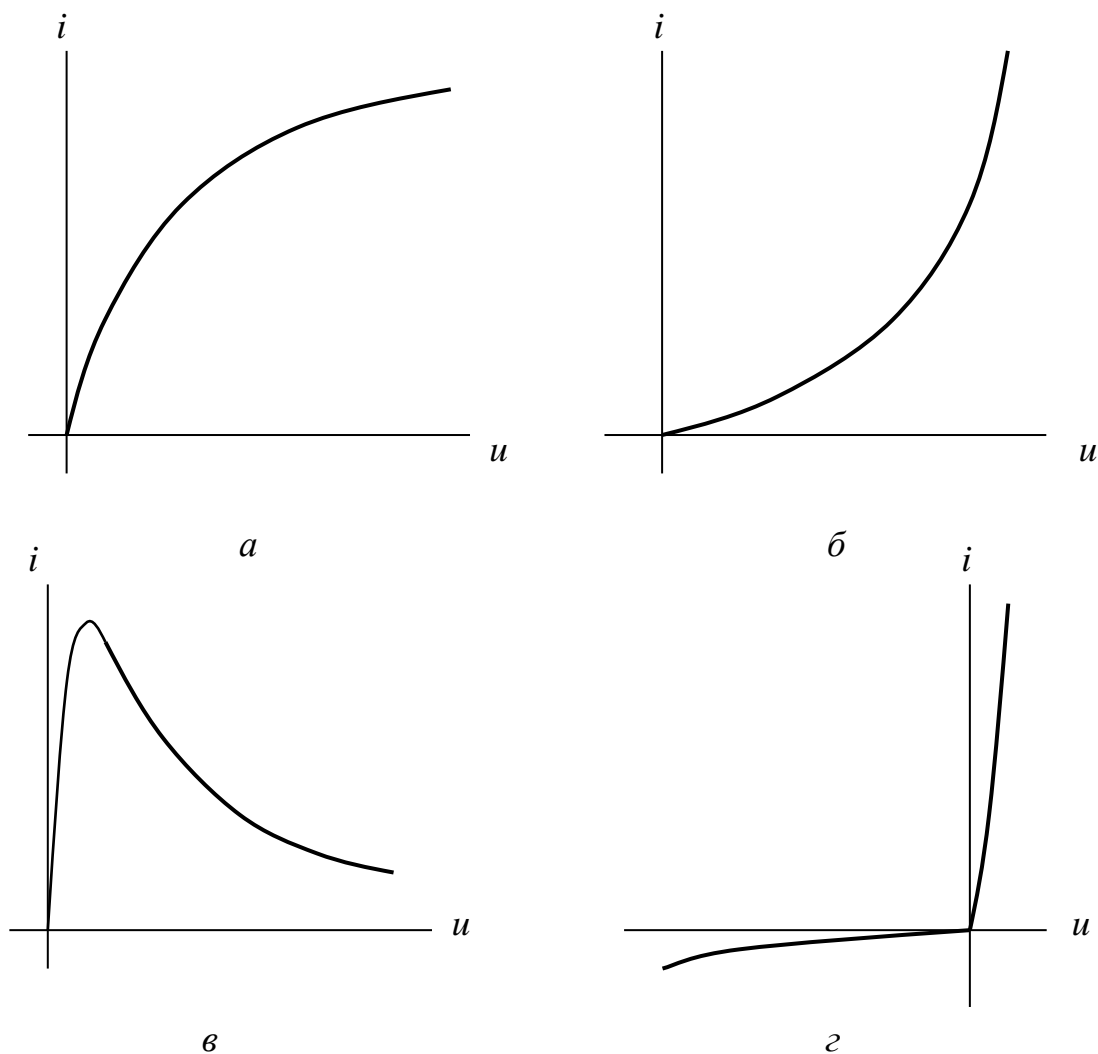


Рис. 38

На рис. 38, б представлена графическая диаграмма ВАХ $i = f(u)$ тиристового (вилитового) элемента разрядника. Характерная особенность ВАХ: уменьшение $R_{ст}$ с ростом тока. Элементы такого типа используются в разрядниках для гашения дуги.

На рис. 38, в представлена графическая диаграмма ВАХ $i = f(u)$ электрической дуги. Характерная особенность этой ВАХ – наличие участка с отрицательным значением дифференциального сопротивления ($R_d < 0$).

На рис. 38, з представлена графическая диаграмма ВАХ $i = f(u)$ полупроводникового диода. ВАХ имеет ярко выраженную несимметричную форму в положительной и отрицательной областях, при этом $R_{п} \ll R_o$. Элементы такого типа применяются для преобразования переменного тока в постоянный.

Как известно, в электрических цепях постоянного тока катушки и конденсаторы не влияют на установившийся режим цепи и в схемах таких цепей не показываются. Далее в настоящей главе будут рассматриваться только нелинейные цепи постоянного тока в установившемся режиме, для которых приняты обозначения $i \rightarrow I$, $u \rightarrow U$.

2. Нелинейные цепи и их свойства

Электрическая цепь называется нелинейной, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент.

Состояние нелинейной цепи постоянного тока в установившемся режиме можно описать системой нелинейных алгебраических уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. В математике не существует стандартных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений, и, как следствие, на практике не существует общих методов расчета нелинейных цепей постоянного тока, таких, как метод контурных токов и метод узловых потенциалов для линейных цепей.

Одна из главных особенностей нелинейных цепей состоит в том, что к ним неприменим принцип наложения. Докажем это положение на примере расчета схемы рис. 39, в которой включены последовательно два источника ЭДС (E_1, E_2) и нелинейный резистор с заданной ВАХ $I = kU^2$.

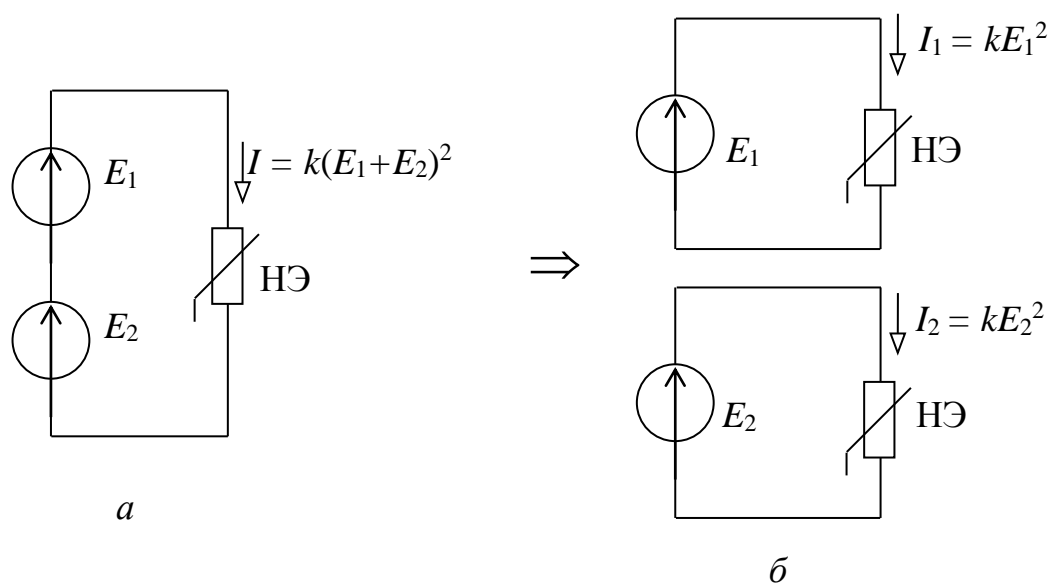


Рис. 39

Действительный ток в исходной схеме рис. 39, а определится по заданному уравнению ВАХ:

$$I = kU^2 = k(E_1 + E_2)^2 = k(E_1^2 + 2E_1E_2 + E_2^2).$$

Ток, рассчитанный по методу наложения (рис. 39, б):

$$I_p = I_1 + I_2 = kE_1^2 + kE_2^2 = k(E_1^2 + E_2^2).$$

Сравнение правых частей равенств показывает, что $I \neq I_p$.

Метод расчета для каждой нелинейной цепи постоянного тока устанавливается индивидуально. Выбор того или другого метода зависит от конкретных условий задачи: структуры схемы цепи, характера нелинейности ВАХ нелинейных элементов, требований к результату расчета и др. Возможно применение не одного, а нескольких методов, каждый из которых позволяет более четко определить одну из сторон процесса в цепи.

В нелинейных цепях могут возникать особые процессы, которые в принципе невозможны в линейных цепях. Многообразием таких процессов объясняется широкое применение устройств на нелинейных элементах в различных областях современной техники. Современные средства связи, радиоэлектроника, компьютерная техника основаны на использовании нелинейных свойств элементов электрических цепей.

Перечислим некоторые явления, имеющие место в нелинейных цепях, которые находят практическое применение в электроэнергетике:

- 1) преобразование переменного тока в постоянный или выпрямление;
- 2) преобразование постоянного тока в переменный произвольной частоты или инвертирование;
- 3) преобразование переменного тока одной частоты в переменный ток другой частоты;
- 4) стабилизация режимных параметров (напряжения или тока) на некоторых участках цепи при изменении этих параметров на других участках;
- 5) трансформация постоянного тока и напряжения;
- 6) усиление сигналов по напряжению, по току или по мощности;
- 7) возможность существования нескольких установившихся режимов цепи при одних и тех же параметрах источников энергии;
- 8) скачкообразные изменения режима цепи; и т.д.

3. Графический метод расчета простых нелинейных цепей

Сущность графического метода расчета состоит в том, что решение нелинейных уравнений, составленных для схемы по законам Кирхгофа, выполняется графически путем графического сложения соответствующих ВАХ элементов.

Пусть нелинейная цепь состоит из двух нелинейных элементов НЭ1 и НЭ2, включенных последовательно с источником ЭДС (рис. 40, а). ВАХ нелинейных элементов заданы графически (рис. 40, б).

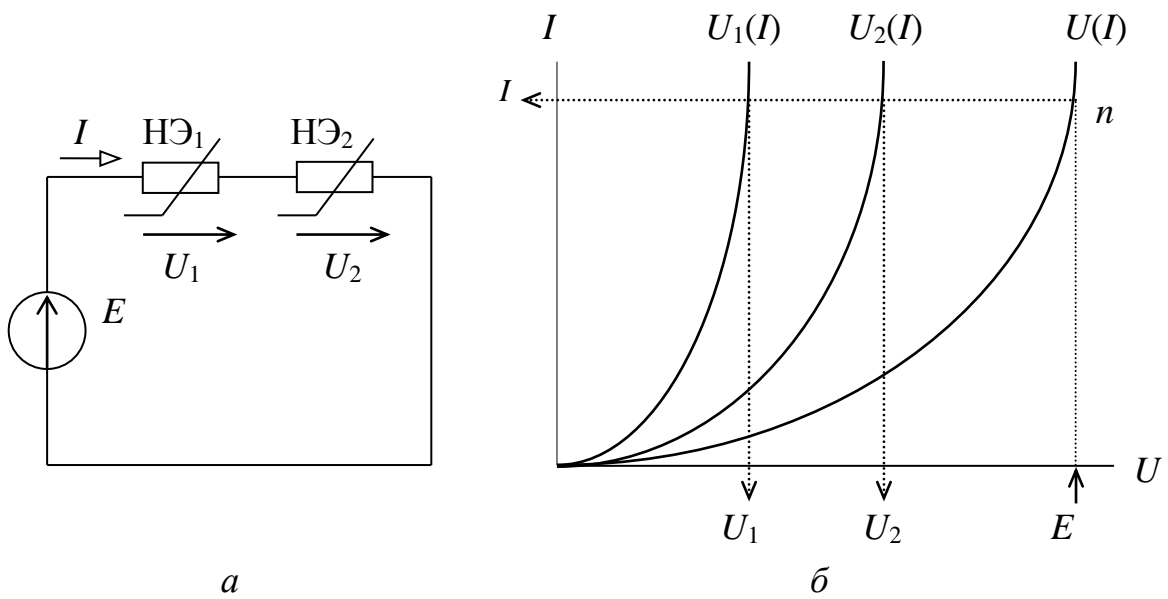


Рис. 40

Уравнения Кирхгофа для схемы: $U_1 + U_2 = E$; $I_1 = I_2 = I$.

В соответствии с уравнениями производится сложение ВАХ отдельных элементов $U_1(I)$ и $U_2(I)$ по оси напряжений (последовательно), в результате чего получается ВАХ для всей схемы $U(I)$. На этой характеристике для значения $U = E$ определяется положение рабочей точки n . Последовательность графического решения показана на рис. 40, б стрелками.

Пусть нелинейная цепь состоит из двух нелинейных элементов $HЭ_1$ и $HЭ_2$, включенных параллельно с источником ЭДС E (рис. 41, а). ВАХ нелинейных элементов заданы графически (рис. 41, б).

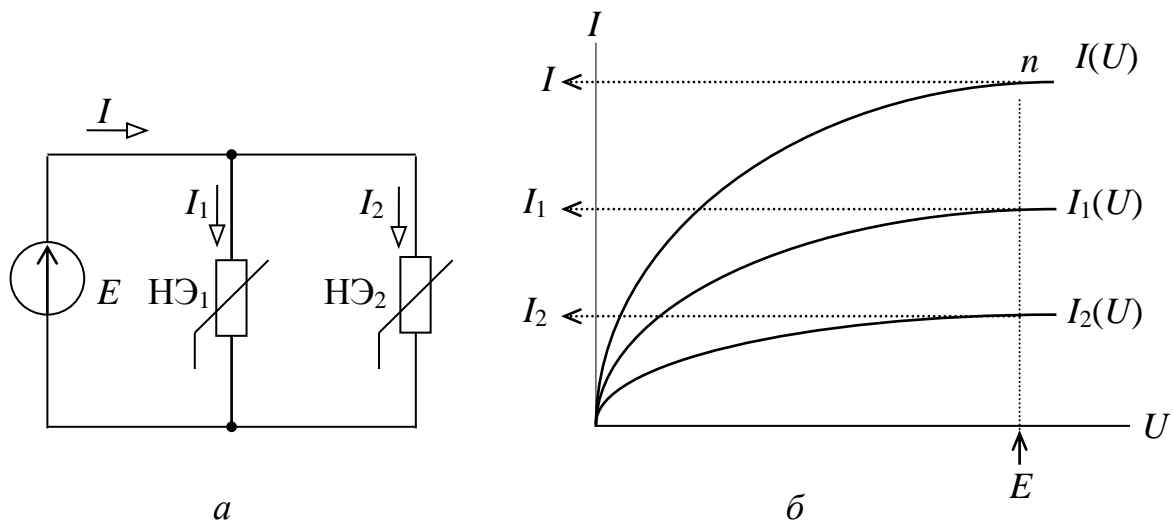


Рис. 41

Уравнения Кирхгофа для схемы: $I_1 + I_2 = I$; $U_1 = U_2 = E$.

В соответствии с уравнениями производится сложение ВАХ отдельных элементов $I_1(U)$ и $I_2(U)$ по оси токов (параллельно), в результате чего

получается ВАХ для всей схемы $I(U)$. На этой характеристике для заданного значения $U = E$ определяется положение рабочей точки n . Последовательность графического решения показано на рис. 41, б стрелками.

Пусть нелинейная цепь состоит из двух нелинейных элементов НЭ1 и НЭ2 и линейного резистора R_3 , включенных по смешанной схеме (рис. 42, а). ВАХ нелинейных элементов заданы графически (рис. 42, б), а резистор – своим сопротивлением R_3 . Диаграмма ВАХ для линейного резистора строится в той же системе координат согласно уравнению закона Ома $U_3 = I_3 \cdot R_3$

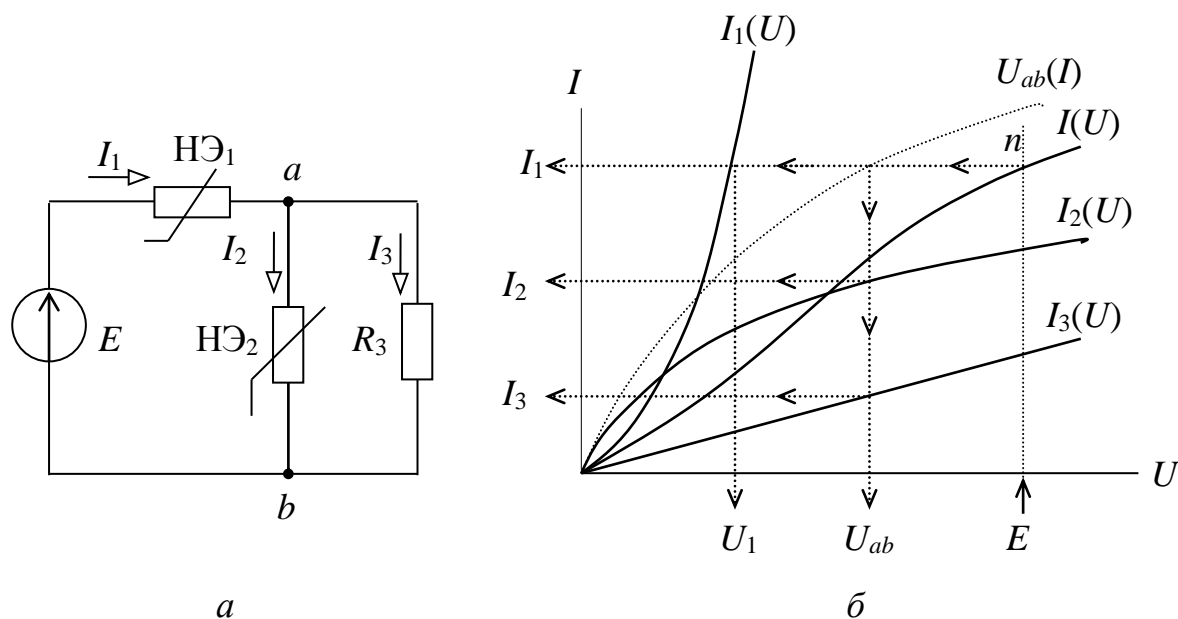


Рис. 42

Уравнения Кирхгофа для схемы:

$$I_2 + I_3 = I_1 \quad (1)$$

$$U_1 + U_{23} = E \quad (2)$$

$$U_2 = U_3 = U_{23} \quad (3)$$

Графическое решение задачи выполняется в два этапа. На 1-ом первом этапе проводится сложение ВАХ $I_2(U_2)$ и $I_3(U_3)$ по оси токов (параллельно), в результате этого сложения получается ВАХ для параллельного участка схемы $U_{23}(I_1)$. На 2-ом этапе проводится сложение ВАХ $U_1(I_1)$ и $U_{23}(I_1)$ по оси напряжений (последовательно), в результате чего получается ВАХ для всей схемы $I(U)$. На этой характеристике для $U = E$ определяется положение рабочей точки n . Дальнейшая последовательность графического решения показана на рис. 42, б стрелками.

4. Графический метод расчета нелинейной цепи с несколькими источниками ЭДС

Графический метод расчета можно применять также и для более сложных схем с несколькими источниками ЭДС. Последовательность графических операций при решении одной и той же задачи может быть различной и зависит от выбора алгоритма решения.

Выделим из схемы цепи ветвь, содержащую источник ЭДС E и нелинейный элемент с заданной ВАХ $U(I)$ (рис. 43, а).

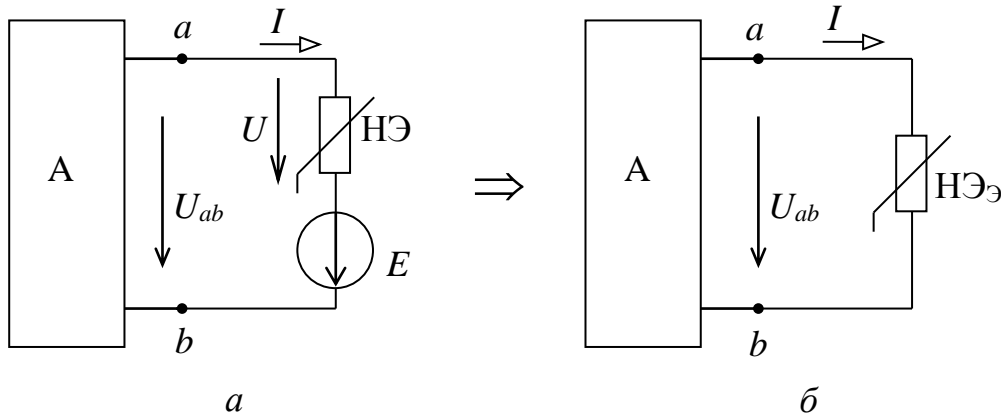


Рис. 43

Из уравнения 2-го закона Кирхгофа следует: $U_{ab}(I) = U(I) - E$.

В той же системе координат $U-I$ построим новую диаграмму ВАХ $U_{ab}(I)$ путем смещения заданной ВАХ $U(I)$ по оси U на величину $(-E)$ согласно уравнению 2-го закона Кирхгофа (рис. 43). Можно утверждать, что новая ВАХ $U_{ab}(I)$ соответствует некоторому новому нелинейному элементу НЭэ, не содержащему ЭДС (рис. 43, б). Таким образом, ветвь схемы, содержащую источник ЭДС E и резистивный (линейный или нелинейный) элемент, можно заменить путем параллельного переноса ВАХ $U(I)$ заданного элемента на величину ЭДС $\pm E$ некоторой новой ветвью без источника ЭДС с ВАХ $U_{ab}(I)$ (рис. 44, б).

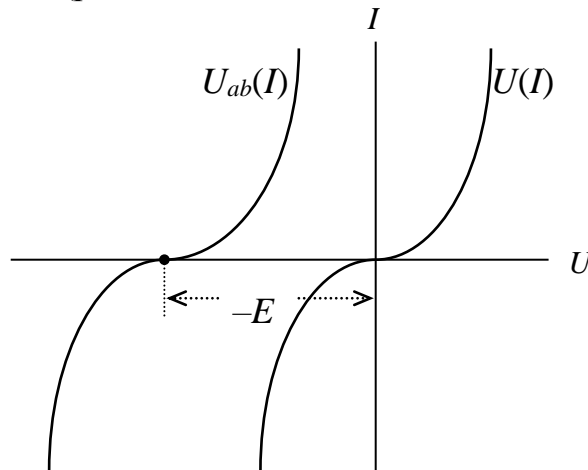


Рис. 44

Если в схеме содержится ветвь с источником тока J , то такая ветвь может быть объединена с резистивной ветвью и заменена некоторой эквивалентной, при этом смещение ВАХ элемента производится по оси I на величину $\pm J$ согласно 1-му закону Кирхгофа для узла.

Пусть требуется выполнить расчет схемы (рис. 45, а), в которой нелинейные элементы НЭ₁ и НЭ₂ заданы своими ВАХ, а линейный резистор – сопротивлением R_3 (рис. 45, а).

Рассмотрим 2 варианта решения данной задачи.

1-ый вариант – метод свертки схемы к одному из источников ЭДС, например E_1 . Для этого заменим ветвь 2, содержащую нелинейный элемент НЭ₂ и ЭДС E_2 , новой эквивалентной ветвью с элементом НЭ₃, но без источника ЭДС. После такой замены сложная схема превращается в простую со смешанным соединением элементов (рис. 45, б). Графический метод расчета такой схемы был рассмотрен в предыдущем параграфе.

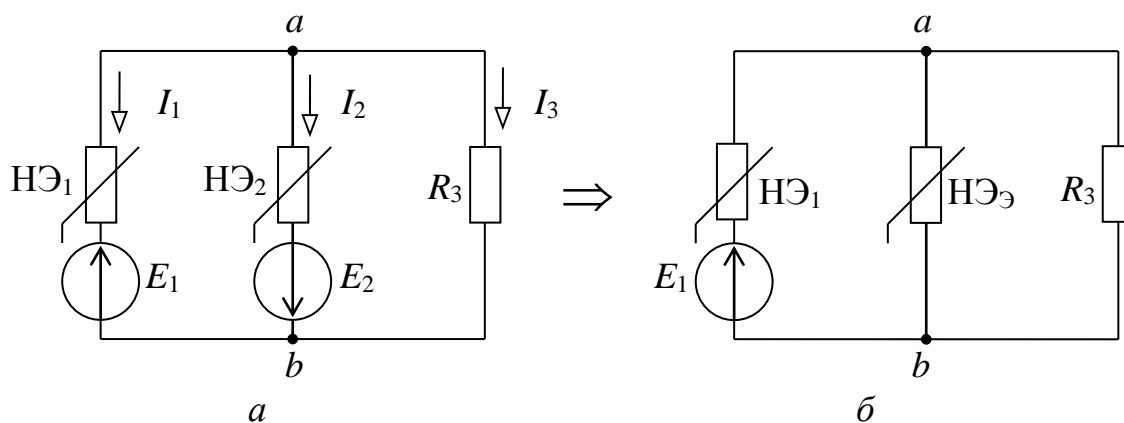


Рис. 45

2-й вариант решения – метод двух узлов. Зададимся положительными направлениями токов во всех ветвях схемы от узла a к узлу b (рис. 45, а). Для каждой ветви по 2-му закону Кирхгофа запишем выражения для узлового напряжения:

$$\begin{cases} U_{ab}(I_1) = U_1(I_1) + E_1 & (1) \\ U_{ab}(I_2) = U_2(I_2) - E_2 & (2) \\ U_{ab}(I_3) = U_3(I_3) & (3) \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Графическое решение задачи производится в соответствии с полученными уравнениями в следующей последовательности:

1) строится диаграмма ВАХ $U_{ab}(I_1)$ путем смещения заданной ВАХ $U_1(I_1)$ по оси U на величину $+E_1$ согласно уравнению (1) (рис. 46);

2) строится диаграмма ВАХ $U_{ab}(I_2)$ путем смещения заданной ВАХ $U_2(I_2)$ по оси U на величину $-E_2$ согласно уравнению (2) (рис. 46);

3) диаграмма ВАХ $U_{ab}(I_3)$ совпадает с заданной $U_3(I_3)$ согласно уравнению (3) (рис. 46);

4) производится графическое сложение диаграмм ВАХ отдельных ветвей $U_{ab}(I_1)$, $U_{ab}(I_2)$, $U_{ab}(I_3)$ по оси I согласно уравнению (4), в результате чего получается диаграмма результирующей ВАХ $U_{ab}(\Sigma I)$ (жирная линия на рис. 46).

Рабочая точка n удовлетворяет уравнению (4) $\sum I = 0$, что соответствует точке пересечения диаграммы результирующей ВАХ $U_{ab}(\Sigma I)$ с осью U . Последовательность дальнейшего графического решения показана на рис. 46 стрелками.

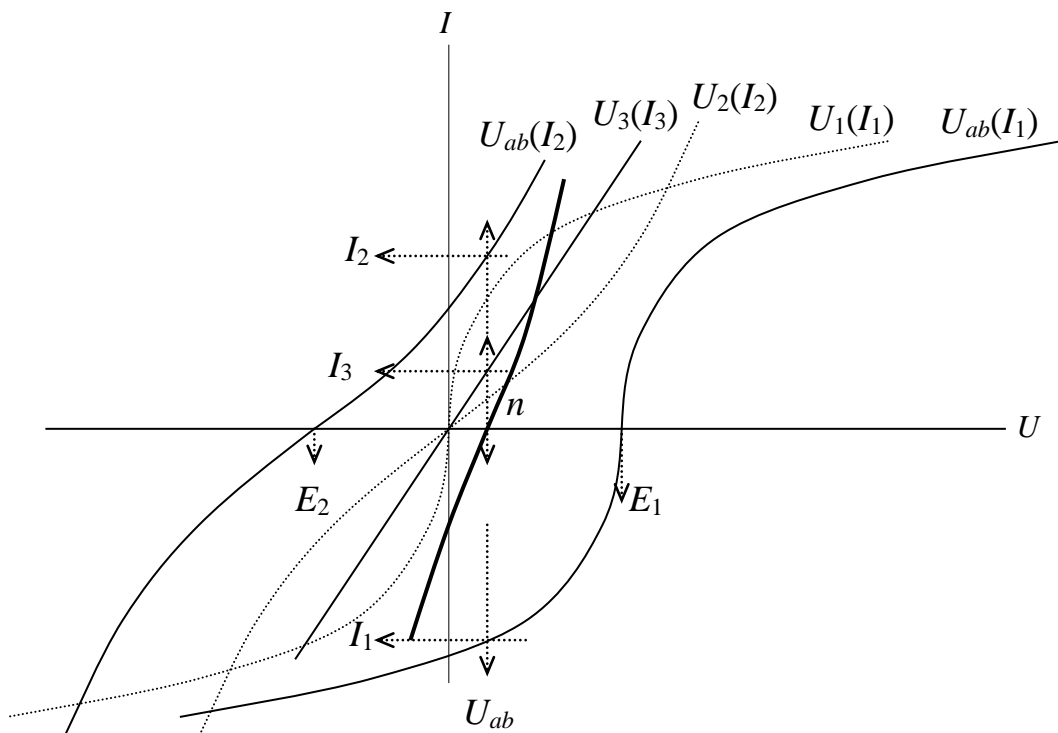


Рис. 46

5. Комбинированный графоаналитический метод расчета нелинейной цепи с одним или двумя нелинейными элементами

Если схема нелинейной цепи содержит только один нелинейный элемент НЭ с заданной ВАХ, то расчет токов и напряжений в такой схеме может быть выполнен комбинированным методом в три этапа.

1-й этап. Выделяется ветвь с нелинейным элементом НЭ, а оставшаяся часть схемы заменяется эквивалентным генератором (рис. 47, а). Параметры эквивалентного генератора $E_э$ и R_0 могут быть определены аналитически любым из методов расчета линейных цепей, так как в оставшейся части схемы не содержатся более нелинейные элементы.

На 2-м этапе выполняется графический расчет эквивалентной схемы рис. 47, *a*, как правило, методом встречного построения диаграмм.

Из уравнения 2-го закона Кирхгофа для схемы рис. 47, *a*, следует, что $U(I) = E - IR_0$. Для графического решения данного уравнения проводится прямая линия по уравнению $U = E - IR_0$ в той же системе координат, где задана диаграмма ВАХ $U(I)$ нелинейного элемента. Положение рабочей точки n соответствует точке пересечения прямой с заданной диаграммой ВАХ $U(I)$. Достоинство данного метода состоит в том, что не требуется графическое сложение диаграмм ВАХ отдельных элементов. В результате графического расчета определяется напряжение U и ток I нелинейного элемента.

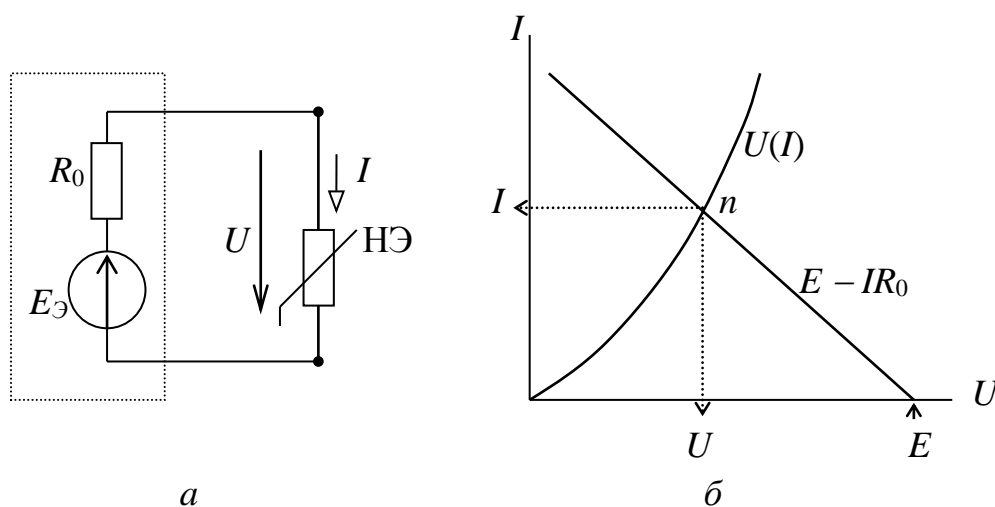


Рис. 47

На заключительном 3-м этапе нелинейный элемент НЭ в исходной схеме в соответствии с теоремой о компенсации заменяется идеальным источником ЭДС с $E = U$, направленной навстречу току I . Такая замена позволяет превратить исходную схему из нелинейной в линейную. Расчет схемы после такой замены выполняется одним из методов расчета сложных линейных цепей, в результате чего определяются все токи и напряжения в исходной схеме.

Комбинированный метод расчета может быть применен к сложной схеме с двумя и более нелинейными элементами.

Пусть сложная схема содержит два нелинейных элемента НЭ_1 и НЭ_2 (рис. 48, *a*).

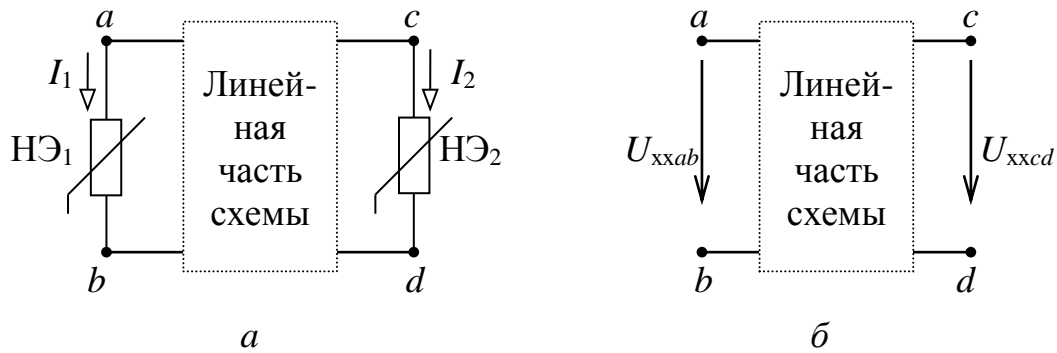


Рис. 48

На 1-м этапе из сложной схемы выделяются одновременно оба нелинейных элемента (рис. 48, *a*). Выполняется режим холостого хода одновременно для обеих ветвей (рис. 49, *б*) и аналитическим путем определяются напряжения холостого хода $U_{xxab} = V_a - V_b$ и $U_{xxcd} = V_c - V_d$. В соответствии с теоремой об эквивалентном генераторе линейная часть схемы заменяется эквивалентным генератором (активным четырехполюсником) по схеме рис. 49.

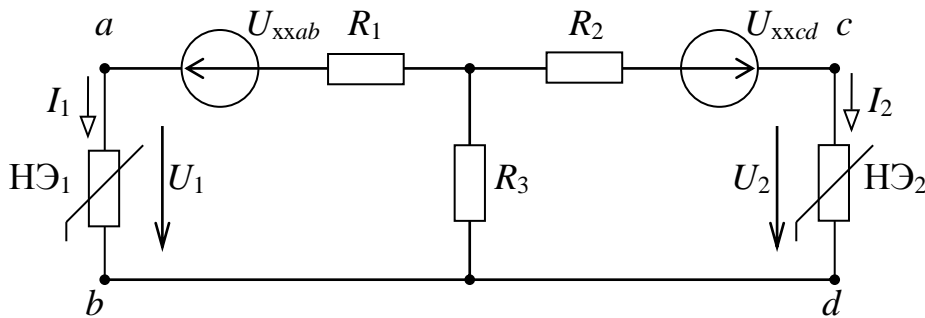


Рис. 49

Внутренние сопротивления генератора (R_1, R_2, R_3) рассчитываются путем свертки линейной части схемы (без источников) к эквивалентной схеме звезды.

На 2-м этапе выполняется графический расчет эквивалентной схемы (рис. 49) одним из графических методов, рассмотренных ранее, в результате графического расчета определяются токи и напряжения нелинейных элементов (U_1, U_2, I_1, I_2). На заключительном этапе определяются токи и напряжения на элементах линейной части схемы.

Если исходная схема цепи содержит три или более нелинейных элементов, то к ней так же может быть применен метод эквивалентного генератора, при этом линейная часть схемы заменяется активным шести- и более полюсником, что при большом числе нелинейных элементов не дает положительного эффекта.

6. Аппроксимация ВАХ нелинейных элементов

Вольтамперные характеристики нелинейных элементов на практике чаще всего получают экспериментальным путем и представляют их или в графической форме [в виде графической диаграммы функции $I = f(U)$], или в табличной форме [в виде таблицы координат точек функции $I = f(U)$]. При аналитических методах расчета нелинейных цепей к ВАХ предъявляются требования, чтобы они были представлены в аналитической форме, т.е. в виде аналитического выражения.

Под аппроксимацией ВАХ понимают замену ее графической или табличной формы на аналитическую. К уравнению аппроксимации предъявляются два противоречивых требования. Во-первых, уравнение аппроксимации должно по возможности точно описывать заданную ВАХ. Для более полного выполнения этого требования необходимо усложнять структуру этого уравнения. Во-вторых, уравнение аппроксимации, будучи введенным в систему уравнений Кирхгофа, должно позволять решение этой системы доступными методами. Для выполнения этого требования структура этого уравнения должна быть по возможности более простой. Таким образом, при выборе уравнения аппроксимации всегда приходится принимать компромиссное решение между этими двумя требованиями.

Различают два способа аппроксимации нелинейных ВАХ – полная и кусочная (по частям).

В простейших случаях при монотонном характере изменения функции $I(U)$ ВАХ может быть аппроксимирована полностью одним нелинейным уравнением (рис. 50, а).

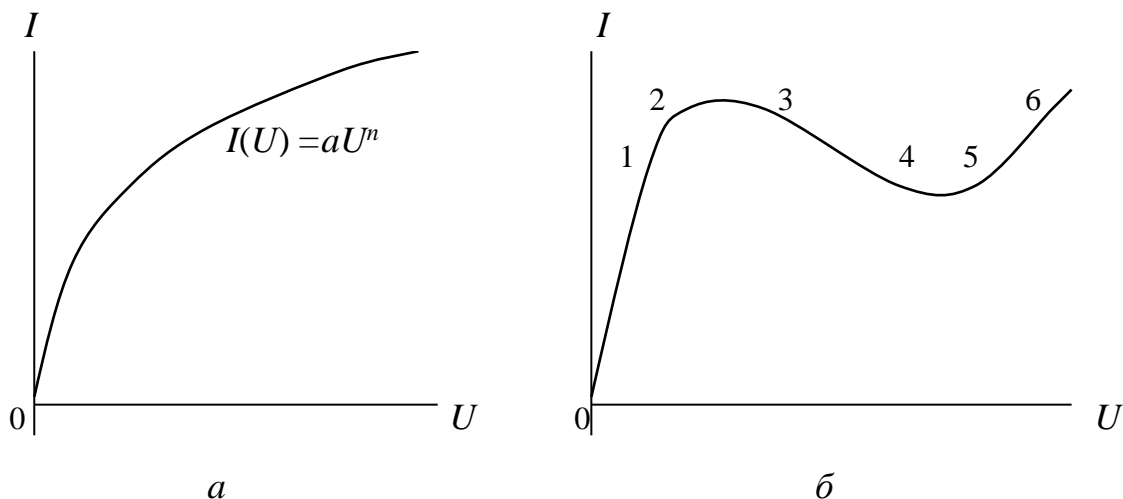


Рис. 50

В более сложных случаях, когда функция $I(U)$ имеет несколько максимумов и минимумов, полная аппроксимация ВАХ одним уравнением становится проблематичной и нерациональной. В таких случаях применяют кусочную аппроксимацию. Суть ее состоит в том, что вся ВАХ разби-

вается по тому или другому принципу на отдельные участки (кусочки) (рис. 50, б). Отдельные участки аппроксимируются однотипными, но простыми по структуре, уравнениями, коэффициенты в которых изменяются при переходе от одного участка к другому. На практике применяются следующие виды кусочной аппроксимации: 1) кусочно-линейная аппроксимация – отдельные участки ВАХ аппроксимируются отрезками прямой $y = a + bx$, 2) аппроксимация параболическими сплайнами – отдельные участки ВАХ аппроксимируются квадратичной параболой ($y = a + bx + cx^2$), 3) аппроксимация кубическими сплайнами – отдельные участки ВАХ аппроксимируются кубической параболой ($y = a + bx + cx^2 + dx^3$). Коэффициенты аппроксимации (a, b, c, \dots) определяются для каждого участка функции через координаты его конечных точек. Кусочная аппроксимация позволяет получить высокую степень приближения к заданной ВАХ, однако требует большого числа однотипных расчетов при определении коэффициентов в уравнениях аппроксимации.

Кусочная аппроксимация широко применяется при расчете нелинейных цепей на ЭВМ.

7. Аналитические методы расчета нелинейных цепей

Установившейся режим нелинейной цепи постоянного тока можно описать системой нелинейных алгебраических уравнений Кирхгофа, в которых связь между напряжением и током на нелинейных элементах выражена в виде нелинейного уравнения аппроксимации.

Как известно, в математике не существует общих методов решения систем нелинейных уравнений. В каждом конкретном случае метод решения определяется конкретными условиями задачи: структурой системы уравнений, типом аппроксимации ВАХ нелинейных элементов и другими факторами.

В самых простых случаях возможно выполнить непосредственное решение нелинейного уравнения. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника ЭДС E , линейного резистора R_1 и нелинейного резистора $НЭ_2$ (рис. 51), ВАХ которого аппроксимирована уравнением:

а) $U_2(I) = aI + bI^2$; б) $I(U_2) = cU_2 + dU_2^2$; в) $U_2(I) = aI + bI^5$.

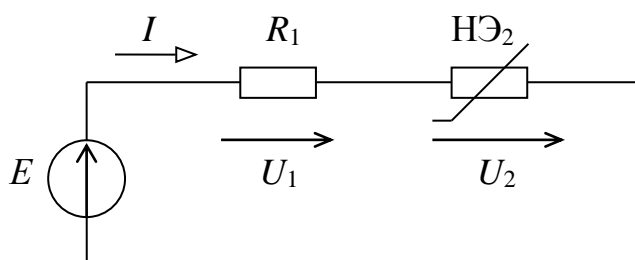


Рис. 51

По второму закону Кирхгофа получим уравнение: $E = U_1 + U_2$.

Вид решения этого уравнения зависит от структуры уравнения аппроксимации ВАХ.

а) $E = U_1 + U_2 = IR_1 + aI + bI^2 = (R_1 + a)I + bI^2$ – решение задачи сводится к решению квадратного уравнения с неизвестным током I ;

б) $E = U_1 + U_2 = IR_1 + U_2 = (cU_2 + dU_2^2)R_1 + U_2 = (1 + cR_1)U_2 + dR_1U_2^2$ – решение задачи сводится к решению квадратного уравнения с неизвестным напряжением U_2 ;

в) $E = U_1 + U_2 = IR_1 + aI + bI^5 = (R_1 + a)I + bI^5$ – требуется решение алгебраического уравнения 5-й степени, что выполнить обычным методом невозможно.

В общем случае для решения системы нелинейных алгебраических уравнений используют так называемый метод последовательных приближений или метод итераций. Сущность данного метода состоит в следующем: задаются в первом приближении значением искомой величины x' . Решают задачу по выбранному алгоритму в направлении к источнику, в результате чего определяют расчетное значение ЭДС источника E' . Сравнивают расчетное значение ЭДС источника E' с заданным значением E и с учетом неравенства $E' > < E$ задаются значением искомой величины во втором приближении и повторяют расчет по тому же алгоритму. Циклы расчета (итерации) повторяют до достижения желаемой точности искомой величины.

Метод последовательных приближений широко используется при расчете нелинейных цепей с помощью ЭВМ. При составлении алгоритма расчета для ЭВМ следует особое внимание обращать на то, чтобы итерационный процесс сходился, в противном случае ЭВМ выдаст ошибку. Рассмотрим несколько примеров.

Пример. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника ЭДС E , линейного резистора R_1 и нелинейного элемента НЭ₂ (рис. 51). На рис. 52, а, б показаны два варианта ВАХ нелинейного элемента.

По 2-му закону Кирхгофу получим: $E = U_1 + U_2 = IR_1 + U_2(I)$ или $U_2(I) = E - IR_1$. На рис. 52, а, б показано графическое решение этого уравнения, где точка n соответствует значению искомой величины (U_2, I).

Составим алгоритм (схему) вычислений для ЭВМ методом последовательных приближений. Произвольно задаем первое приближение для напряжения на нелинейном элементе U_2' . Первое приближение для тока находим по ВАХ нелинейного элемента $I' = f(U_2')$. Последующие приближения для напряжения на нелинейном элементе находим из уравнения 2-го закона Кирхгофа: $U_2''(I) = E - I'R_1$, $I'' = f(U_2'')$; и т. д.

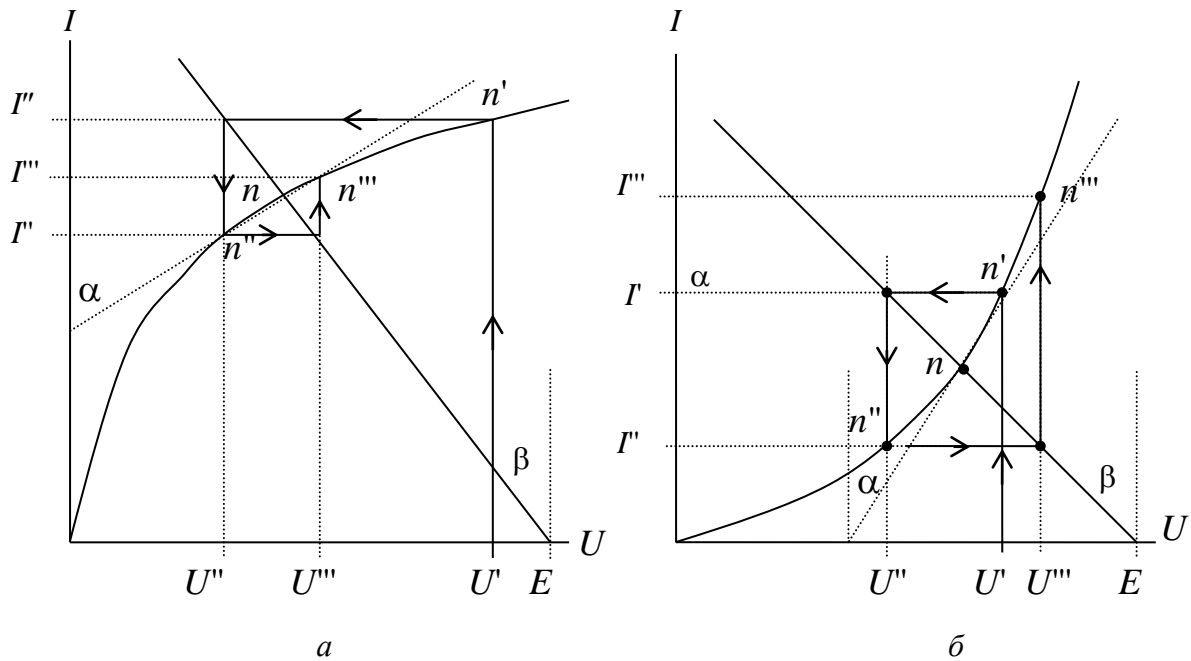


Рис. 52

Процесс расчета по этому алгоритму на рис. 52, а, б выглядит в виде спирали, которая на рис. 52, а закручивается вокруг точки n , а на рис. 52, б раскручивается. Это означает, что в первом случае итерационный процесс сходится и ЭВМ выдаст результаты решения, а во втором случае итерационный процесс расходится и ЭВМ укажет на ошибку программы.

В курсе математики доказывается, что итерационный процесс сходится при условии, если абсолютное значение производной от искомой величины в окрестностях искомого корня (точки n) меньше 1:

$$\left| \frac{dU_2(I)}{dU_2} \right| = \left| \frac{d(E - IR_1)}{dU_2} \right| = \left| -R_1 \cdot \frac{dI}{dU_2} \right| = \frac{R_1}{R_0} < 1 \quad \text{или} \quad \frac{R_1}{R_0} = \frac{tg\beta}{tg\alpha} < 1 \quad \text{или} \quad \beta < \alpha.$$

Для решения данной задачи можно составить другую схему вычислений:

$$I'; \rightarrow U'_2 = f(I'); \rightarrow I'' = \frac{E - U'_2}{R_1}; \rightarrow U''_2 = f(I''); \text{ и т. д.}$$

Тогда условие сходимости примет следующий вид:

$$\left| \frac{dI(U_2)}{dI} \right| = \left| \frac{d(E - U_2)}{dI} \right| = \left| -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{dU_2}{dI} \right| = \frac{R_0}{R_1} < 1 \quad \text{или} \quad \beta > \alpha.$$

Очевидно, если по первой схеме вычислений итерационный процесс сходится, то по второй он расходится, и наоборот.

Схему вычислений на ЭВМ можно организовать по известному из математики методу половинного деления. По этому методу приближение для

искомой величины устанавливается на середине предполагаемой области его значений. В рассматриваемом примере для напряжения U_2 прилагаемая область значений $O_1 = 0$; $O_2 = E$. Схема вычислений будет иметь вид:

$$U'_2 = \frac{O_1 + O_2}{2} \rightarrow I' = f(U'_2) \rightarrow E' = I'R_1 + U'_2 \rightarrow \begin{cases} \text{если } E' > E, \text{ то } O_2 = E' \\ \text{если } E' < E, \text{ то } O_1 = E' \end{cases} \rightarrow U''_2 = \frac{O_1 + O_2}{2}$$

Сходимость итерационного процесса по этой схеме вычислений показана на рис. 53.

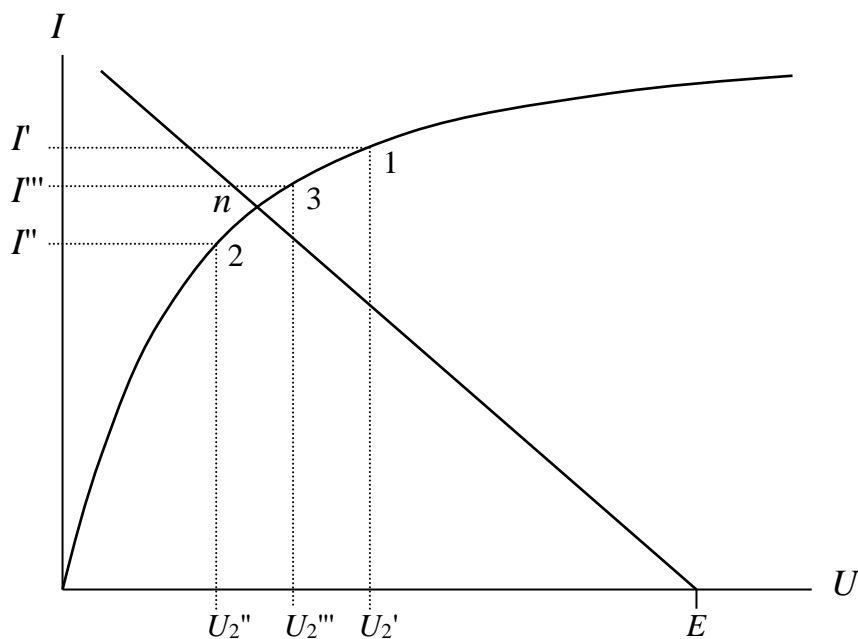


Рис. 53

В общем случае для сложной цепи быстрота сходимости итерационного процесса зависит от вида ВАХ НЭ, параметров линейных элементов, выбора начальных приближений. Однако основным фактором, определяющим решение нелинейных уравнений итерационным методом, является выбор схемы (алгоритма) вычислений.

В нелинейной цепи может существовать несколько установившихся режимов цепи при одних и тех же параметрах источников энергии. Пусть в нелинейной цепи рис. 54 вольтамперная характеристика нелинейного элемента имеет специфическую N -образную форму. Графическое решение задачи показывает наличие трех точек пересечения ВАХ и, соответственно, наличие трех различных вариантов решения задачи, два из которых соответствуют устойчивым режимам в цепи и один (средний) неустойчивому режиму (рис. 55).

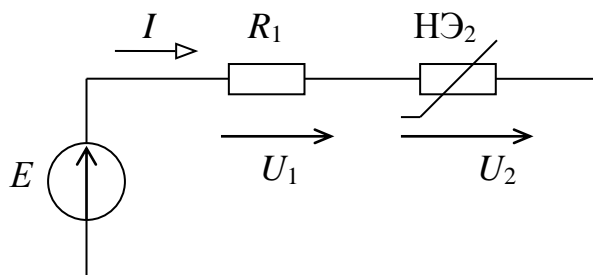


Рис. 54

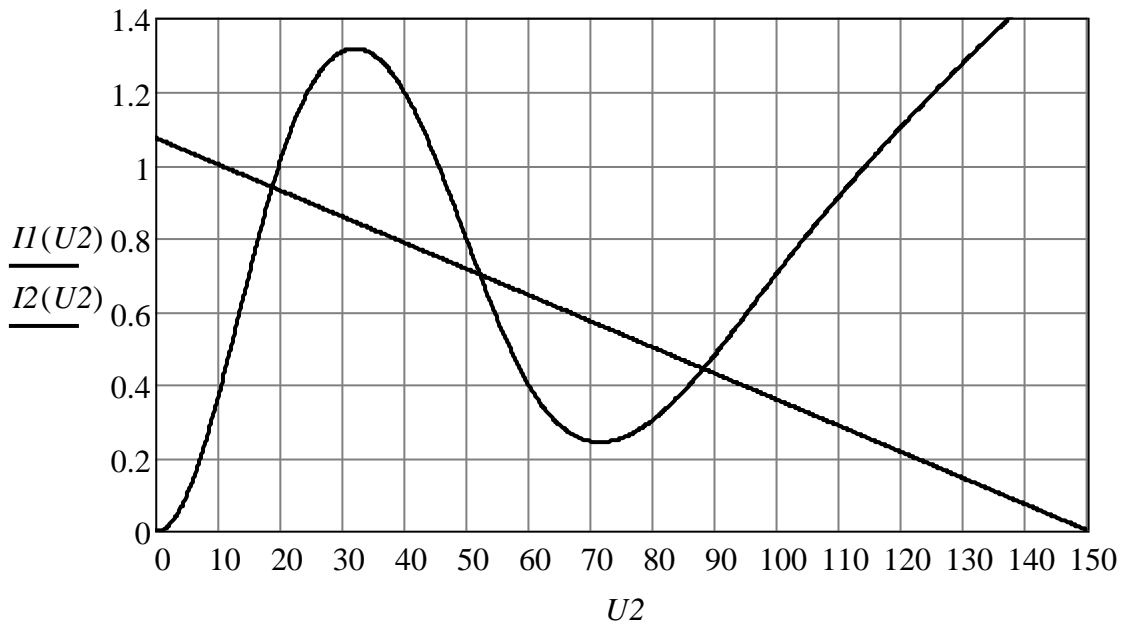


Рис. 55

При решении нелинейного уравнения Кирхгофа на ЭВМ по программе *Given..Find*. в зависимости от выбора начального приближения можно получить численное решение для всех трех точек (см. ниже).

$U2 := 10$	<i>Given</i>	$I1(U2) \cdot R1 + U2 = E$
$U2 := Find(U2) = 10$	$I1(U2) = 1$	$U1 := I1(U2) \cdot R1 = 140$
$U2 := 50$	<i>Given</i>	$I1(U2) \cdot R1 + U2 = E$
$U2 := Find(U2) = 50$	$I1(U2) = 0.714$	$U1 := I1(U2) \cdot R1 = 100$
$U2 := 100$	<i>Given</i>	$I1(U2) \cdot R1 + U2 = E$
$U2 := Find(U2) = 100$	$I1(U2) = 0.357$	$U1 := I1(U2) \cdot R1 = 50$

Итерационный метод сегодня является основным методом расчета нелинейных цепей

8. Расчет нелинейных цепей на ЭВМ по стандартной программе

Система нелинейных алгебраических уравнений, составленная для схемы цепи по законам Кирхгофа и дополненная уравнениями аппроксимации вольтамперных характеристик нелинейных элементов, может быть решена на ЭВМ по стандартной программе. Применение данного метода показано ниже на конкретном примере.

Задана схема цепи (рис. 56) и параметры отдельных элементов в единицах измерения *SI*. Вольтамперные характеристики нелинейных элементов заданы в виде координат точек.

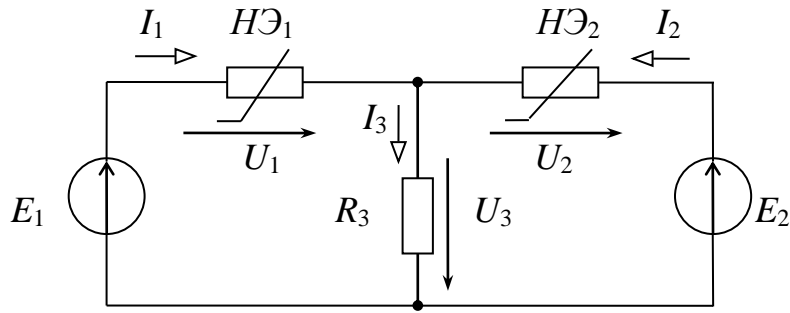


Рис. 56

$$E1 := 180 \quad E2 := 150 \quad R3 := 40$$

$$U1k := (0 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50 \ 70 \ 90 \ 100 \ 140)^T$$

$$Ik := (0 \ .38 \ .58 \ .70 \ .78 \ .84 \ .92 \ .98 \ 1.01 \ 1.10)^T$$

$$U2k := (0 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50 \ 70 \ 90 \ 100 \ 120)^T$$

$$I2k := (0 \ .2 \ .35 \ .45 \ .52 \ .57 \ .63 \ .80 \ 1.00 \ 1.90)^T$$

Решение задачи выполняется поэтапно в следующей последовательности.

1) Выполняется аппроксимация ВАХ нелинейного элемента НЭ₁. Эта ВАХ носит монотонный характер, поэтому для ее аппроксимации применяется уравнение степенного полинома вида $U = a \cdot I + b \cdot I^n$. Коэффициенты аппроксимации a , b , n определяются по методу выбранных точек. Для визуальной проверки качества аппроксимации строится графическая диаграмма ВАХ по расчетному уравнению и на нее наносятся точки заданной ВАХ (рис. 57).

$$\text{Given} \quad U1k_3 = a \cdot Ik_3 + b \cdot (Ik_3)^n \quad U1k_6 = a \cdot Ik_6 + b \cdot (Ik_6)^n$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix} := \text{Find}(a, b, n) = \begin{pmatrix} 25.475 \\ 70.123 \\ 4.911 \end{pmatrix}$$

$$U1k_9 = a \cdot Ik_9 + b \cdot (Ik_9)^n$$

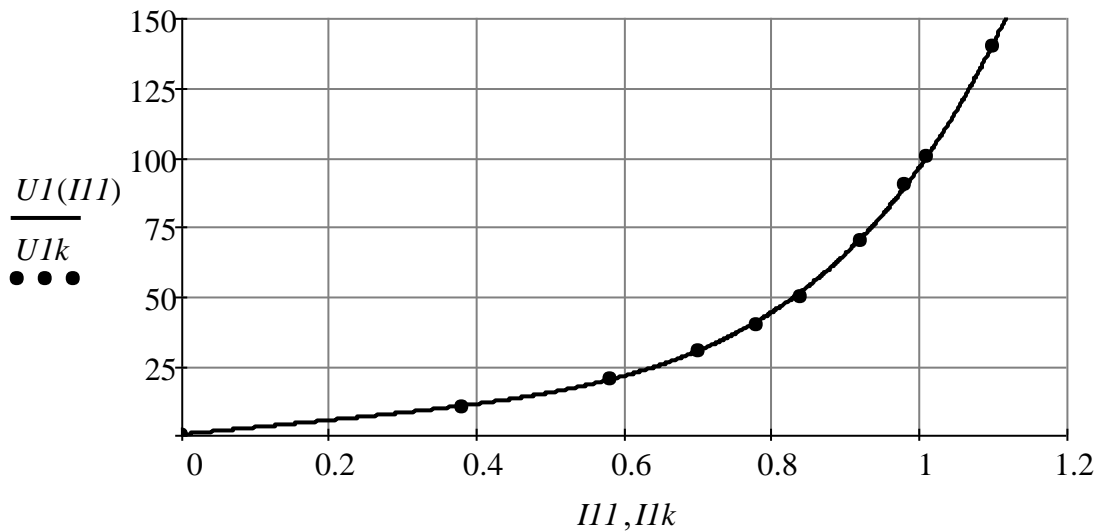


Рис. 57

2). ВАХ нелинейного элемента H_2 имеет сложный характер изменения, поэтому ее аппроксимация выполняется кубическими сплайнами (рис. 58):

$$cs := cspline(U2k, I2k) \quad I2(U2) := interp(cs, U2k, I2k, U2)$$

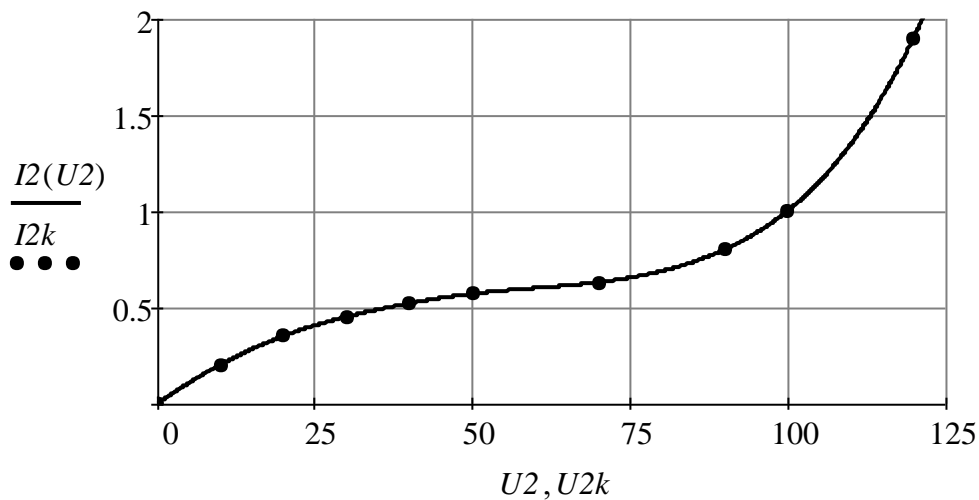


Рис. 58

3). Для расчетной схемы составляется система уравнений по законам Кирхгофа, которая дополняется уравнениями аппроксимации ВАХ нелинейных элементов. Система нелинейных уравнений решается по стандартной программе *Given..Find..*

$$\begin{array}{l}
 \underline{I1} := 1 \quad \underline{I3} := 1 \quad \underline{U1} := 1 \quad \underline{U2} := 1 \quad \underline{U3} := 1 \\
 \text{Given} \quad \quad \quad I1 + I2(U2) - I3 = 0 \quad \quad \quad U1 + U3 = E1 \\
 U2 + U3 = E2 \quad \quad \quad U1 = a \cdot I1 + b \cdot I1^n \quad \quad \quad U3 = I3 \cdot R3 \\
 \underline{A} := \text{Find}(I1, I3, U1, U2, U3)
 \end{array}$$

4) Обрабатываются результаты вычислений:

$$\begin{array}{lll} \underline{I1} := A_0 = 1.038 & \underline{I3} := A_1 = 1.732 & \underline{U1} := A_2 = 110.725 \\ \underline{U2} := A_3 = 80.725 & \underline{U3} := A_4 = 69.275 & I2(U2) = 0.694 \end{array}$$

По аналогичной схеме может быть выполнен расчет нелинейной цепи любой сложности, содержащей любое количество нелинейных элементов с произвольными вольтамперными характеристиками.

Т2. Нелинейные магнитные цепи постоянного потока

1. Основные понятия и законы магнитной цепи

Электромагнитное поле, которое лежит в основе всех многообразных явлений и процессов, исследуемых в электротехнике, имеет две равнозначные стороны – электрическую и магнитную. Как известно, в электрической цепи под воздействием источников энергии возникают электрические токи, которые протекают по электрическим проводам. Подобно электрическим цепям существуют также магнитные цепи, состоящие из магнитных проводов или кратко магнитопроводов, в которых под воздействием магнитодвижущих сил (МДС) возникают и замыкаются магнитные потоки Φ . Формальную схожесть или аналогию между электрическими и магнитными цепями в дальнейшем будем именовать принципом двойственности. Следует помнить, что при формальной схожести электрические и магнитные явления физически различны.

Магнитные цепи применяются в электрических машинах, трансформаторах, электромагнитных аппаратах, реле, приборах и т.д. Их назначением является создание заданной величины и формы магнитного потока $\Phi(t)$ и проведение его по заданному пути.

Как известно, магнитное поле характеризуется векторными величинами \vec{B} и \vec{H} , между которыми существует связь $\vec{B} = \mu\mu_0 \cdot \vec{H}$, где \vec{B} – вектор индукции (или плотности) магнитного поля [Тл], \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля [А/м], который создается электрическим током и является первопричиной магнитного поля, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6}$ [Гн/м] – магнитная проницаемость пустоты, μ – относительная магнитная проницаемость, характеризующая способность материала к намагничиванию.

Все материалы по способности их к намагничиванию условно разделяют на две группы: ферромагнитные и неферромагнитные. Для ферромагнитных материалов $\mu \gg 1$. К ним относятся железо (Fe), никель (Ni), кобальт (Co) и их сплавы. Ферромагнитные материалы способны к намагничиванию и создают малое магнитное сопротивление для магнитного потока, поэтому применяются в технике для изготовления магнитопроводов. Для неферромагнитных материалов $\mu = 1$, они создают большое сопротив-

ление магнитному потоку и в магнитной цепи выполняют роль магнитных изоляторов.

Следует отметить, что если в электрической цепи соотношение между удельной проводимостью металла (провода) и диэлектрика (изоляция) составляет $10^{12} - 10^{15}$, то для магнитной цепи это соотношение составляет всего около 10^3 . Это означает, что изоляция в магнитных цепях очень несовершенна, что в таких цепях существенная часть магнитного потока рассеивается, т.е. замыкается через участки с несовершенной магнитной изоляцией.

Зависимость между векторами \vec{B} и \vec{H} для ферромагнитных материалов не имеет точного аналитического выражения, на графической диаграмме эта зависимость $B = f(H)$, имеет форму петли и называется петлей гистерезиса (рис. 59).

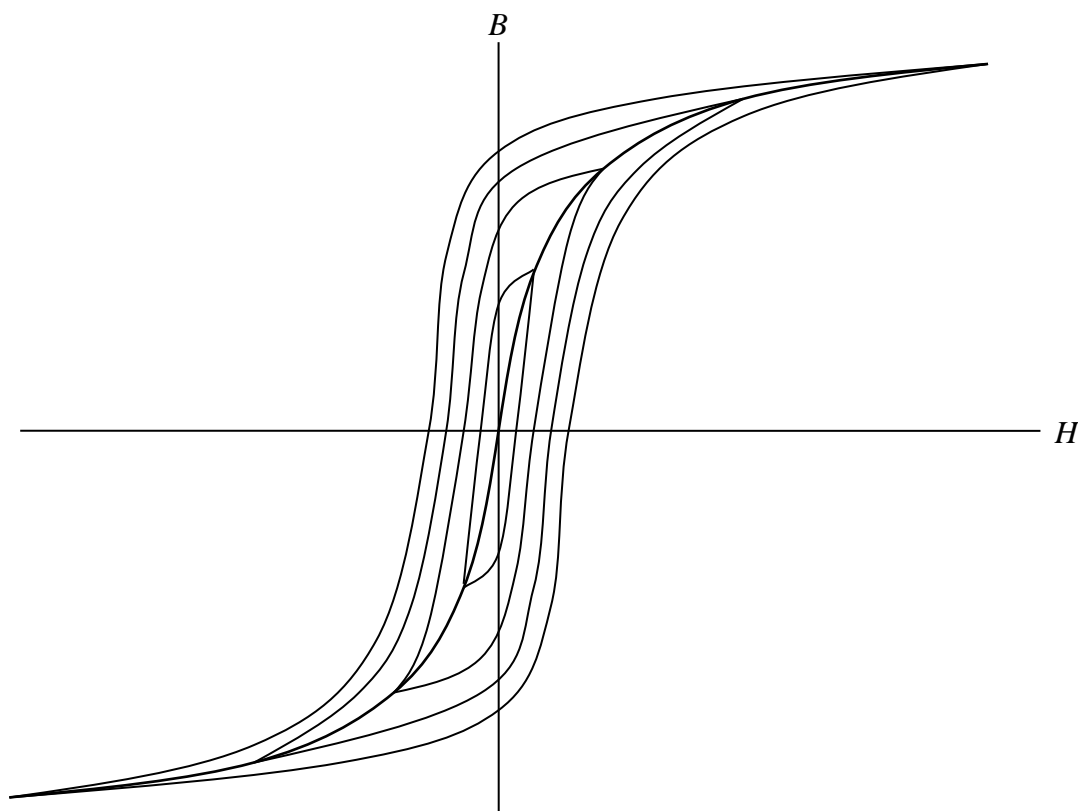


Рис. 59

При периодическом перемагничивании материала с увеличением амплитуды индукции B_m площадь петли гистерезиса увеличивается, а ее вершина все больше смещается в область насыщения материала. Кривая, проходящая через вершины симметричных петель гистерезиса, называется основной кривой намагничивания $B = f(H)$ для данного материала. Сведения об основных кривых намагничивания $B = f(H)$ для ферромагнитных материалов, которые применяются в технике для изготовления магнитопроводов, приводятся в справочной литературе в виде таблиц или графических

диаграмм и используются в инженерной практике для расчета магнитных цепей.

Пусть требуется выполнить расчет магнитной цепи электромагнитного реле, состоящей из катушки с w витками, ярма (неподвижная часть магнитопровода), якоря (подвижная часть магнитопровода) и воздушного зазора между ярмом и якорем (рис. 60, а). Геометрические размеры магнитной цепи заданы.

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum Hl = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 \delta = Iw$$

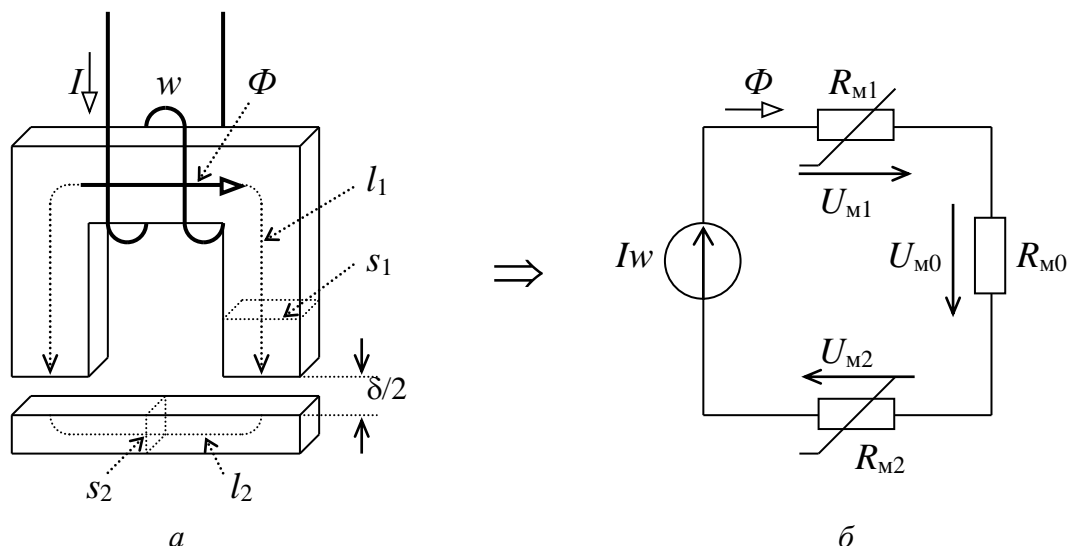


Рис. 60

В основе расчета магнитных цепей лежит известный из физики закон полного тока:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i$$

При применении закона полного тока к магнитной цепи ее разбивают на отдельные однородные участки, для которых $H = \text{const}$, а контур интегрирования выбирают вдоль магнитных линий. При выполнении этих условий интеграл по замкнутому контуру заменяется суммой простых произведений $H_k l_k$, а $\sum i = i \cdot w$. Для рассматриваемого примера получим:

Здесь произведение $Iw = F$ называется магнитодвижущей силой (МДС) или намагничивающей силой (НС), является источником магнитного потока Φ .

Слагаемые типа $H_k \cdot l_k$ называются магнитным напряжением: $U_{Mk} = H_k l_k$ [A], а полученное выше уравнение представляет собой второй закон Кирхгофа для магнитной цепи:

$$\sum Hl = Iw \text{ или } \sum U_M = F$$

Из курса физики известно, что магнитные линии поля непрерывны. Из этого следует, что магнитный поток Φ на всех участках неразветвленной

магнитной цепи имеем одно и то же значение $\Phi = \text{const}$. Индукция поля \bar{B} и напряженность поля \bar{H} на отдельных участках будут различны:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; \quad B_0 = \frac{\Phi}{S_0};$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1 \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_1 \mu_0 S_1}; \quad H_2 = \frac{\Phi}{\mu_1 \mu_0 S_2}; \quad H_0 = \frac{\Phi}{\mu_0 S_0}.$$

Сделаем подстановку в уравнение 2-го закона Кирхгофа:

$$I \cdot w = \frac{\Phi \cdot l_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{\Phi \cdot l_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} + \frac{\Phi \cdot l_0}{\mu_0 \cdot S_0} = \Phi \left(\frac{l_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} + \frac{l_0}{\mu_0 \cdot S_0} \right).$$

Здесь $R_{mk} = \frac{l_k}{\mu_k \mu_0 S_k}$ – магнитное сопротивление k -го участка магнитной цепи. Для сравнения: формула электрического сопротивления проводника имеет аналогичную структуру: $R = \frac{l}{\gamma \cdot S}$, т.е. в магнитной цепи электрической проводимости γ соответствует магнитная проницаемость материала μ_0 . Магнитные сопротивления для участков магнитопровода зависят от магнитной проницаемости μ_0 , которая является функцией магнитного состояния (\bar{B}, \bar{H}). Следовательно, магнитные сопротивления отдельных участков магнитопровода являются нелинейными и на схеме представляются нелинейными элементами. Магнитное сопротивление зазора $R_{m0} = \frac{l_0}{\mu_0 \cdot S_0} = \frac{l_0}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot S_0} \approx 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{l_0}{S_0} = \text{const}$ и, следовательно, является линейным элементом. С учетом сказанного выше, рассматриваемая магнитная цепь может быть представлена эквивалентной схемой с нелинейными элементами (рис. 60, б).

Для сложных магнитных цепей, имеющих разветвления и содержащих несколько источников МДС, в полной мере соблюдаются оба закона Кирхгофа:

1) 1-й закон Кирхгофа: $\sum \Phi = 0$ – алгебраическая сумма магнитных потоков в узле магнитной цепи равна нулю;

2) 2-й закон Кирхгофа: $\sum Hl = \sum Iw$ – алгебраическая сумма падений магнитных напряжений в замкнутом контуре магнитной цепи равна алгебраическая сумма МДС.

Магнитные цепи постоянного потока относятся к классу нелинейных цепей. В силу принципа двойственности к их расчету применимы все методы расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока.

Следует отметить, что магнитные цепи обладают своими характерными особенностями, которые вносят некоторые отличия в методы их расчета.

2. Аппроксимация вебер-амперных характеристик $U_m = f(\Phi)$ нелинейных элементов магнитных цепей

Как было уже сказано, в справочной литературе для каждого типа ферромагнитного материала, применяемого для изготовления магнитопроводов, приводятся сведения об основной кривой намагничивания $B = f(H)$ в виде таблицы координат точек или в виде графической диаграммы этой функции (рис. 61).

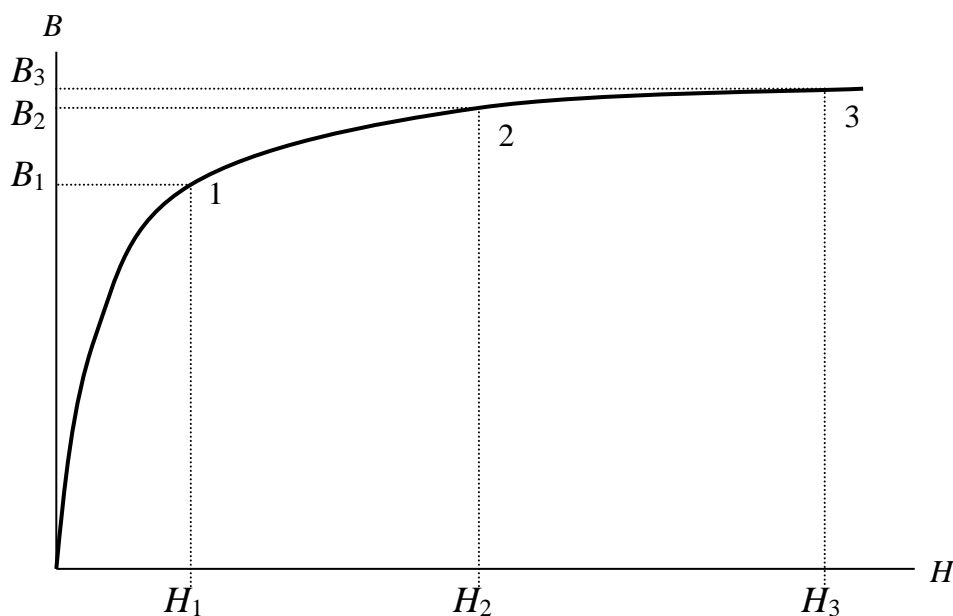


Рис. 61

Вебер-амперные характеристики (ВАХ) $U_m = f(\Phi)$ отдельных однородных участков магнитной цепи рассчитывается через их геометрические размеры по основной кривой намагничивания: $U_m = H \cdot l$, $\Phi = B \cdot S$. Вследствие пропорциональной зависимости $U_m \equiv H$ и $\Phi \equiv B$ графические диаграммы ВАХ отдельных участков магнитной цепи будут в некотором линейном масштабе подобны диаграмме основной кривой намагничивания $B = f(H)$ (рис. 61).

В аналитических методах расчета магнитных цепей применяется аппроксимация $U_m = f(\Phi)$ для отдельных участков. Рассмотрим эту процедуру на примере аппроксимации основной кривой намагничивания $B = f(H)$ (рис. 61).

Для аппроксимации ВАХ, симметричных относительно начала координат, используют нечетные математические функции, например, степенной полином с нечетными степенями или уравнение гиперболического синуса:

$$1) x = a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + \dots; \quad 2) x = a \cdot sh(by).$$

Выберем для аппроксимации основной кривой намагничивания степенной полином усеченного вида: $H = a \cdot B + b \cdot B^n$. Коэффициенты аппроксимации a , b , n можно определить по методу выбранных точек. Для этой цели на графической диаграмме (или в таблице координат) функции $B = f(H)$ выбираются три точки 1, 2, 3 (по числу определяемых коэффициентов), как показано на рис. 3. и определяются их координаты, например: 1(1,0 Тл, 100 А/м), 2(1,4 Тл, 500А/м), 3(1,5 Тл, 800 А/м). Так как функция $B = f(H)$ в области насыщения описывается в основном вторым слагаемым bB^n , то для точек 2 и 3 можно приближенно принять:

$$\begin{cases} H_2 \approx b \cdot B_2^n \\ H_3 \approx b \cdot B_3^n \end{cases} \Rightarrow n = \frac{\ln(H_3/H_2)}{\ln(B_3/B_2)} = \frac{\ln(800/500)}{\ln(1,5/1,4)} = 6,81.$$

Так как показатель степени n должен быть целым нечетным числом, то принимаем $n = 7$.

Коэффициенты a и b определяются из совместного решения системы уравнений для точек 1 и 2:

$$\begin{cases} H_1 = a \cdot B_1 + b \cdot B_1^7 \\ H_2 = a \cdot B_2 + b \cdot B_2^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100 = a \cdot 1,0 + b \cdot 1,0^7 \\ 500 = a \cdot 1,4 + b \cdot 1,4^7 \end{cases} \Rightarrow a = 60,6; b = 39,4$$

Уравнение аппроксимации примет окончательный вид:

$$H = 60,6 \cdot B + 39,4 \cdot B^7.$$

При аппроксимации основной кривой намагничивания уравнением гиперболического синуса $H = a \cdot sh(b \cdot B)$ коэффициенты аппроксимации определяются также по методу выбранных точек. Используем для этой цели координаты точек 1 и 2:

$$\begin{cases} H_2 = a \cdot sh(b \cdot B_2) \\ H_1 = a \cdot sh(b \cdot B_1) \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить коэффициенты a и b :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{a \cdot \text{sh}(b \cdot B_2)}{a \cdot \text{sh}(b \cdot B_1)} \approx \frac{e^{b \cdot B_2}}{e^{b \cdot B_1}} = e^{b(B_2 - B_1)}, \text{ откуда следует}$$

$$b = \frac{\ln(H_2/H_1)}{B_2 - B_1} = \frac{\ln(500/100)}{1,4 - 1,0} = 4,02;$$

$$a = \frac{H_1}{\text{sh}b \cdot B_1} = \frac{H_2}{\text{sh}b \cdot B_2} = \frac{100}{\text{sh}4,02 \cdot 1,0} = 3,59.$$

Уравнение аппроксимации примет окончательный вид:

$$H = 3,59 \cdot \text{sh}(4,02 \cdot B).$$

Уравнения аппроксимации используются в аналитических методах расчета магнитных цепей.

3. Расчет неразветвленной магнитной цепи

Пусть требуется выполнить расчет магнитной цепи электромагнитного реле, эскизный вид которого и схема магнитной цепи показана на рис. 2, а, б. Будем считать, что геометрические размеры участков и основная кривая намагничивания материала $B = f(H)$ заданы. Возможны два варианта постановки задачи:

а) по заданному магнитному потоку Φ (или индукции B в заданном сечении) требуется определить ток I в обмотке – прямая задача;

б) по заданному току в обмотке I требуется определить магнитный поток Φ или индукцию B в заданном сечении – обратная задача.

Прямая задача сравнительно просто решается аналитическим путем.

Пусть магнитный поток Φ известен. Тогда $B_1 = \frac{\Phi}{S_1}$; $B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$; $B_0 = \frac{\Phi}{S_0}$. Зна-

чения координат H_1 и H_2 находим по заданной кривой намагничивания $B = f(H)$ для расчетных точек B_1 и B_2 . Значение напряженности поля в зазоре определяем из уравнения $H_0 = B_0/\mu_0 = 8 \cdot 10^5 \cdot B_0$.

По 2-ому закону Кирхгофа для схемы замещения находим значение

МДС: $I \cdot w = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_0 \cdot \delta$. Искомый ток в обмотке равен: $I = \frac{l_1 \cdot H_1 + l_2 \cdot H_2 + \delta \cdot H_0}{w}$.

Обратная задача решается методом последовательных приближений. Пусть задан ток в обмотке реле I и требуется определить магнитный поток Φ .

Задаются в первом приближении значением магнитного потока Φ' и, решая прямую задачу, определяют значение тока I' в первом приближении. С учетом неравенства $I' > < I$ задаются значением магнитного потока Φ'' во втором приближении и определяют значение тока I'' во втором приближении. Циклы расчета или итерации выполняются до достижения требуемой точности определения искомой величины. Учитывая, что решение прямой задачи является сравнительно простым и нетрудоемким, то и решение обратной задачи, требующее выполнения нескольких циклов расчета, является относительно нетрудоемким и может выполняться вручную, без помощи ЭВМ.

Как прямая, так и обратная задача могут быть решены графически методом сложения ВАХ отдельных участков. Для этой цели на основе заданных кривой намагничивания $B = f(H)$ и геометрических размеров отдельных участков магнитной цепи (l, s) производится расчет веберамперных характеристик (ВАХ) для отдельных участков $U_M = Hl = f(\Phi = BS)$.

Как правило, расчетные точки ВАХ для всех участков сводят в общую таблицу:

Φ	Вб	Задают
B_1	Тл	Φ/S_1							
B_2	Тл	Φ/S_2							
B_0	Тл	Φ/S_0							
H_1	А/м	$H_1 = f(B_1)$							
H_2	А/м	$H_2 = f(B_2)$							
H_0	А/м	$H_0 = 8 \cdot 10^5 B_0$							
U_1	А	$H_1 l_1$							
U_2	А	$H_2 l_2$							
U_0	А	$H_0 \delta_0$							
I_w	А	$\sum Hl$							

По результатам расчета в одной системе координат строятся графические диаграммы ВАХ всех участков (рис. 62):

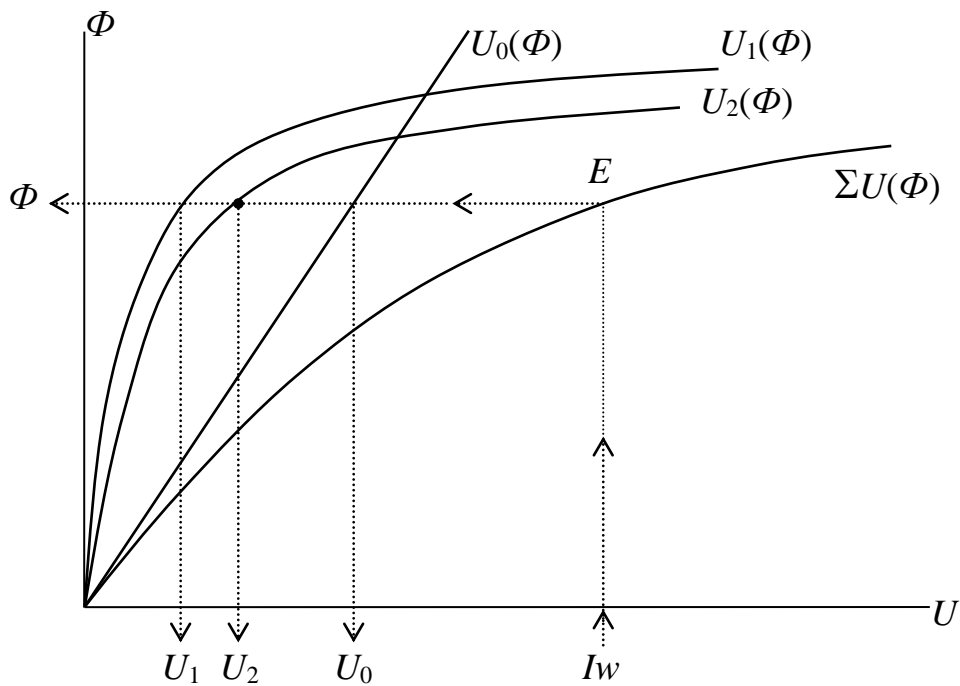


Рис. 62

Производится графическое сложение ВАХ отдельных участков согласно схеме цепи. В рассматриваемом примере производится последовательное (по оси U) сложение ВАХ $U_1(\Phi)$, $U_2(\Phi)$, и $U_0(\Phi)$, в результате сложения получается входная ВАХ $\sum U = f(\Phi)$. На входной ВАХ определяется положение рабочей точки n для $\sum U = Iw$ и выполняется графическое решение для всех величин (на рис. 62 показано стрелками).

4. Расчет разветвленной магнитной цепи

Расчет разветвленных магнитных цепей может выполняться графическим или аналитическим методами точно так же, как и нелинейных электрических цепей.

Пример 1. Заданы геометрические размеры разветвленной магнитной цепи (рис. 63, *a*) и основная кривая намагничивания $B = f(H)$ для материала магнитопровода.

Графическое решение задачи выполняется в следующей последовательности.

1. Магнитная цепь разбивается на однородные участки и согласно этой разбивке составляется эквивалентная схема (рис. 63, *б*).

2. На основе заданных геометрических размеров (l , S) и основной кривой намагничивания $B = f(H)$ выполняется расчет ВАХ для каждого выделенного участка цепи по форме $U_M = Hl = f(\Phi = BS)$. Результаты расчета ВАХ сводятся для удобства пользования в общую таблицу.

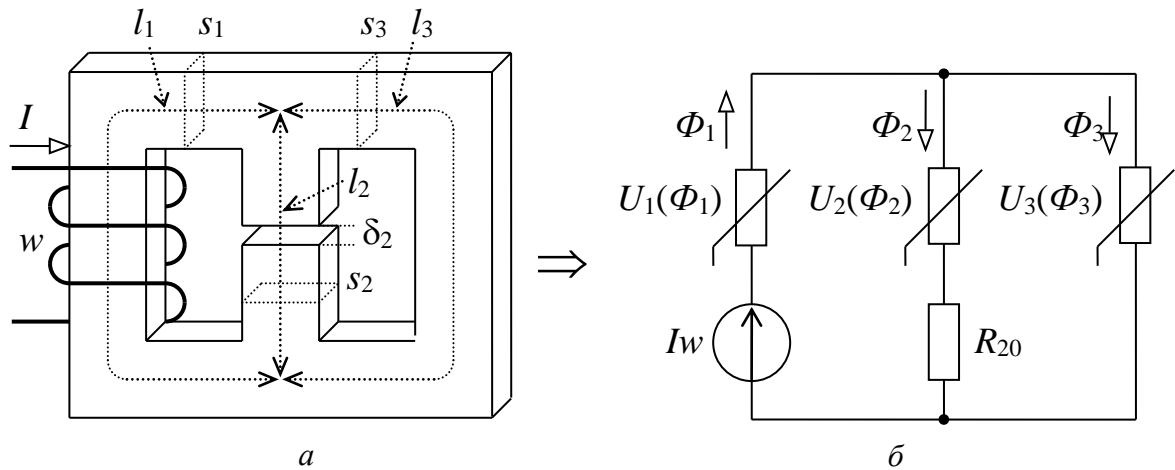


Рис. 63

3. В одной системе координат в выбранных масштабах для Φ и U строятся графические диаграммы ВАХ для отдельных участков цепи (рис. 64).

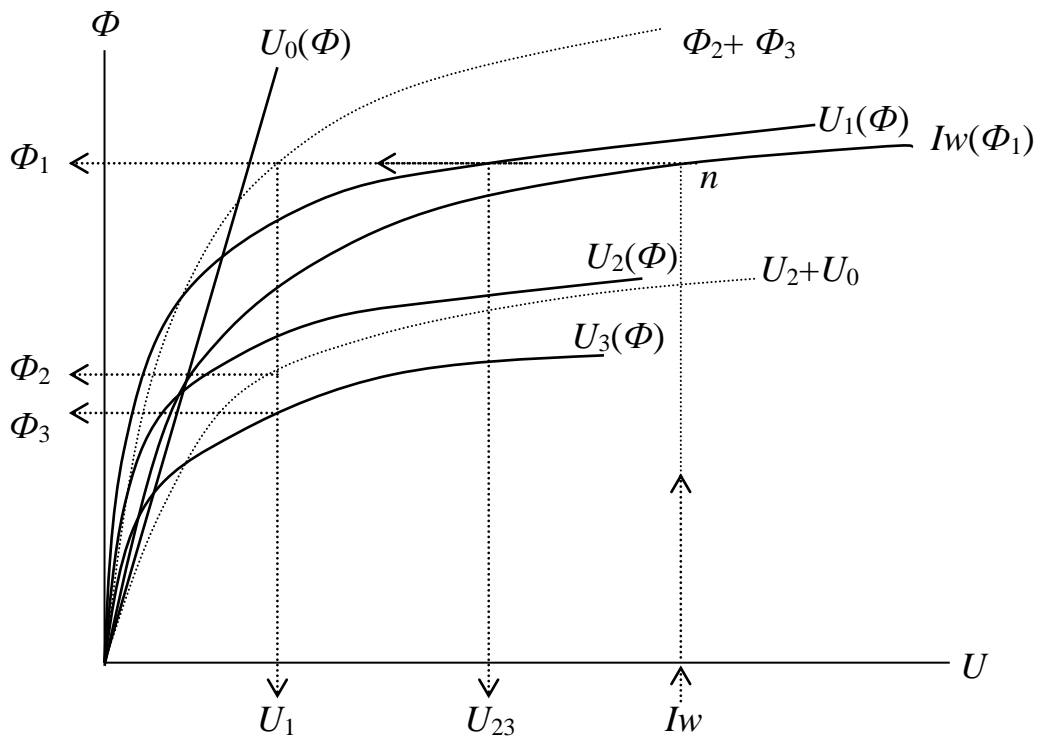


Рис. 64

4. Выполняется графическое сложение ВАХ отдельных участков в соответствии с порядком свертки эквивалентной схемы:

а) ВАХ $U_2(\Phi_2)$ и $U_0(\Phi_2)$ складываются последовательно (по оси U), в результате их сложения получается ВАХ $(U_2 + U_0)$;

б) ВАХ $(U_2 + U_0)$ и $U_3(\Phi_3)$ складываются параллельно (по оси Φ), в результате их сложения получается ВАХ $(\Phi_2 + \Phi_3)$;

в). ВАХ $U_1(\Phi_1)$ и $(\Phi_2 + \Phi_3)$ складываются последовательно (по оси U), в результате их сложения получается входная ВАХ $Iw(\Phi_1)$;

5. На входной ВАХ $Iw(\Phi_1)$ для заданного значения Iw определяется положение рабочей точки n , после чего проводится графическое определение остальных величин (решение показано стрелками на рис. 64).

Пример 2. Заданы геометрические размеры разветвленной магнитной цепи (рис. 65а) и основная кривая намагничивания $B = f(H)$ для материала магнитопровода.

Аналитическое решение задачи выполняется в следующей последовательности.

1. Магнитная цепь разбивается на однородные участки и согласно этой разбивке составляется эквивалентная схема (рис. 65, б). Направления МДС на схеме определяются по правилу правоугового винта.

2. На основе заданных геометрических размеров (l , S) и основной кривой намагничивания $B = f(H)$ выполняется расчет ВАХ для отдельных участков цепи. Результаты расчета ВАХ сводятся для удобства пользования в общую таблицу.

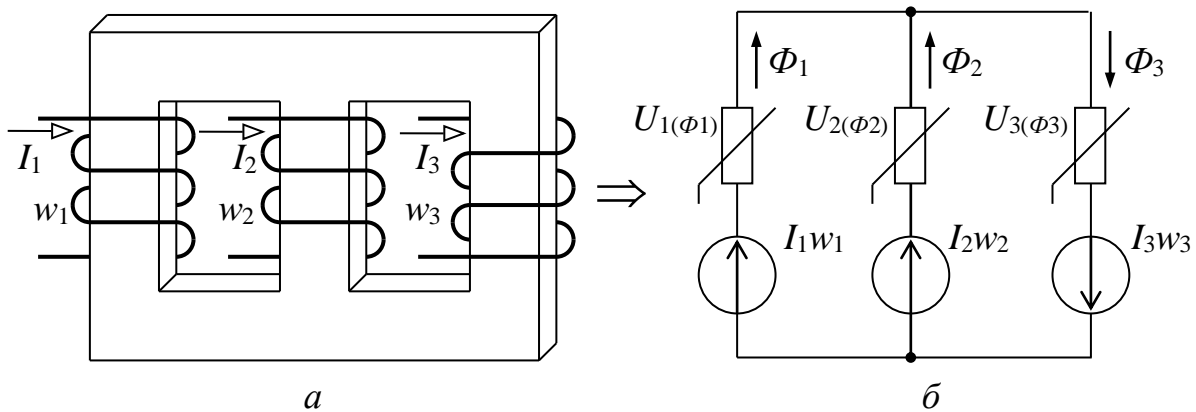


Рис. 65

3. ВАХ отдельных участков $[U_1(\Phi_1), U_2(\Phi_2), U_3(\Phi_3)]$ аппроксимируются выбранным уравнением, например, уравнением гиперболического синуса: $U_1 = a_1 \cdot sh(b_1\Phi_1)$, $U_2 = a_2 \cdot sh(b_2\Phi_2)$, $U_3 = a_3 \cdot sh(b_3\Phi_3)$, определяются коэффициенты аппроксимации $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$.

4. Составляется система нелинейных уравнений (по законам Кирхгофа или по методу двух узлов) для эквивалентной схемы цепи:

$$U_{ab} = -U_1(\Phi_1) + I_1w_1 = -a_1 \cdot sh(b_1\Phi_1) + I_1w_1 \quad (1)$$

$$U_{ab} = -U_1(\Phi_1) + I_1w_1 = -a_1 \cdot sh(b_1\Phi_1) + I_1w_1 \quad (2)$$

$$U_{ab} = -U_1(\Phi_1) + I_1w_1 = -a_1 \cdot sh(b_1\Phi_1) + I_1w_1 \quad (3)$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \quad (4)$$

5. Система нелинейных алгебраических уравнений решается методом последовательных приближений на ЭВМ. Составляется алгоритм (блок-схема) решения, в соответствии с которым составляется программа. Один из возможных вариантов алгоритма вычислений для рассматриваемого примера приведен ниже.

1) Задаются в первом приближении магнитным напряжением между узлами схемы U_{ab1} (начало главного цикла).

2) Для решения нелинейного уравнения (1) создается 1-й частный цикл вычислений: задаются Φ'_1 (первое приближение); из (1) $\Rightarrow U'_{ab1}$; $U'_{ab1} > < U_{ab1}$; задаются Φ''_{ab1} и т.д., в итоге находят Φ_{11} .

3) Для решения нелинейного уравнения (2) создается 2-й частный цикл вычислений: задаются Φ'_2 (первое приближение); из (2) $\Rightarrow U'_{ab1}$; $U'_{ab1} > < U_{ab1}$; задаются Φ''_{ab1} и т.д., в итоге находят Φ_{21} .

4) Для решения нелинейного уравнения (3) создается 3-й частный цикл вычислений: задаются Φ'_3 (первое приближение); из (3) $\Rightarrow U'_{ab1}$; $U'_{ab1} > < U_{ab1}$; задаются Φ''_{ab1} и т.д., в итоге находят Φ_{31} .

5) Решается уравнение (4): $\Phi_{11} + \Phi_{21} - \Phi_{31} > < 0$ (конец главного цикла).

Задаются U_{ab2} (второе приближение) и повторяют вычисления до достижения требуемой точности.

В соответствии с алгоритмом составляется программа вычислений на любом алгоритмическом языке для ЭВМ.

Решение рассматриваемой задачи может быть выполнено графически подобно примеру 1.

Недостатками графического метода расчета являются его низкая точность и большая трудоемкость. С другой стороны, решение той же задачи на ЭВМ методом последовательных приближений требует дополнительных затрат на составление и отладку программы для ЭВМ.

5. Расчет магнитной цепи с постоянным магнитом

Постоянные магниты находят применение в автоматике, измерительной технике и других отраслях для получения постоянных магнитных полей. В основе их принципа действия лежит физическое явление остаточного намагничивания. Известно, что любой ферромагнитный материал, будучи намагниченным от внешнего источника, способен сохранять некоторые остатки магнитного поля после снятия внешней намагничивающей силы. Ферромагнитные материалы, способные длительное время сохранять остаточное поле, получили название магнитотвердых. К таким материалам относятся сплавы из ферромагнитных металлов магнито (Mn, Ni, Co) и альнико (Al, Ni, Co). Из магнитотвердых материалов изготавливаются постоянные магниты различных конструктивных форм.

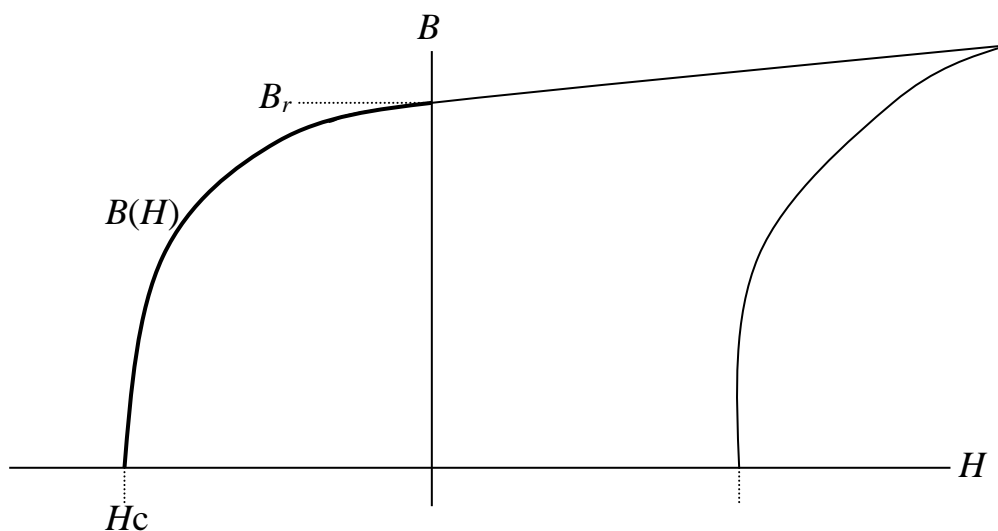


Рис. 66

Ферромагнитные материалы, имеют широкую петлю гистерезиса (рис. 66), стенка которой и является кривой размагничивания $B(H)$ и приводится в справочной литературе.

Пусть требуется рассчитать магнитную цепь, состоящую из постоянного магнита (l_1, S_1), магнитопровода (l_2, S_2) и зазора (S_2, δ) (рис. 67, а). Геометрические размеры, кривая размагничивания для постоянного магнита $B_1(H_1)$ и основная кривая намагничивания $B_2(H_2)$ для магнитопровода заданы. Схема замещения цепи представлена на рис. 67, б.

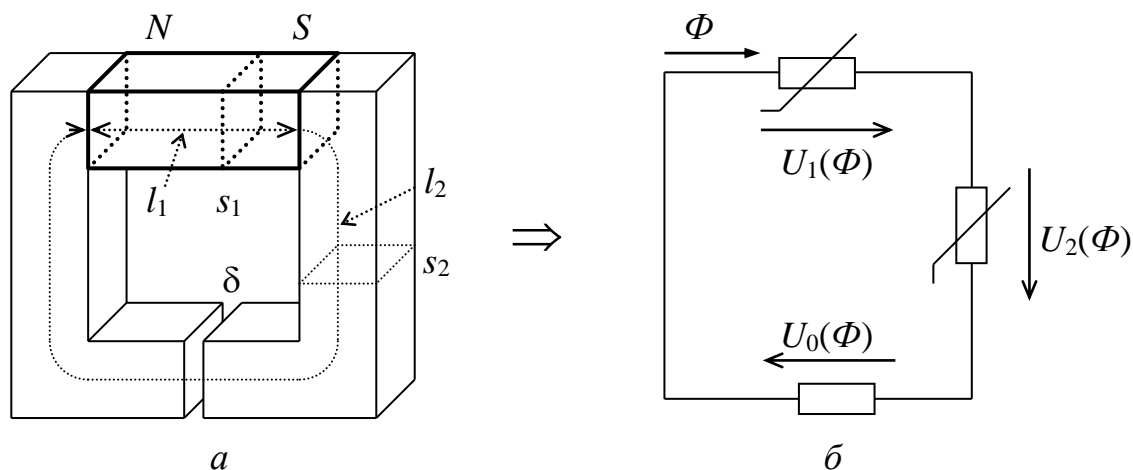


Рис. 67

Ниже приводится графическое решение задачи.

1. На основе заданных геометрических размеров (l, s) и кривых намагничивания $B = f(H)$ производится расчет ВАХ для отдельных участков цепи: $U_1(\Phi)$, $U_2(\Phi)$ и $U_0(\Phi)$.

2. В одной системе координат в выбранных масштабах строятся графические диаграммы ВАХ отдельных участков (рис. 68).

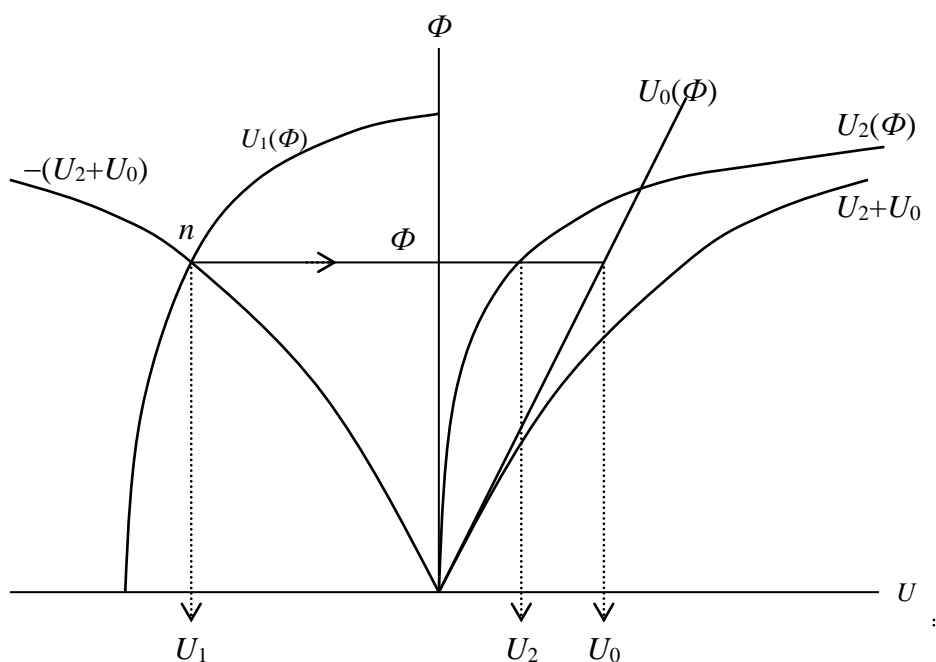


Рис. 68

3. По 2-ому закону Кирхгофа для схемы цепи: $U_1(\Phi) + U_2(\Phi) + U_0(\Phi) = 0$ или $U_1(\Phi) = -(U_2(\Phi) + U_0(\Phi))$. Согласно полученному уравнению складываются последовательно (по оси U) ВАХ $U_2(\Phi)$ и $U_0(\Phi)$, в результате сложения получается ВАХ $(U_2 + U_0)$. Полученная суммарная ВАХ обращается относительно оси Φ (знак – минус) (рис. 68). Точка пересечения обращенной ВАХ с ВАХ $U_1(\Phi)$ определяет положение рабочей точки n . Дальнейшее решение задачи показано стрелками

6. Расчет разветвленной магнитной цепи на ЭВМ в MathCAD

Заданы: а) эскизный рисунок магнитной цепи (рис. 69, а); б) геометрические размеры отдельных участков (в единицах измерения системы SI) числа витков обмоток и токи, протекающие в обмотках; в) графическая диаграмма кривой намагничивания материала сердечника $B = f(H)$ (рис. 70).

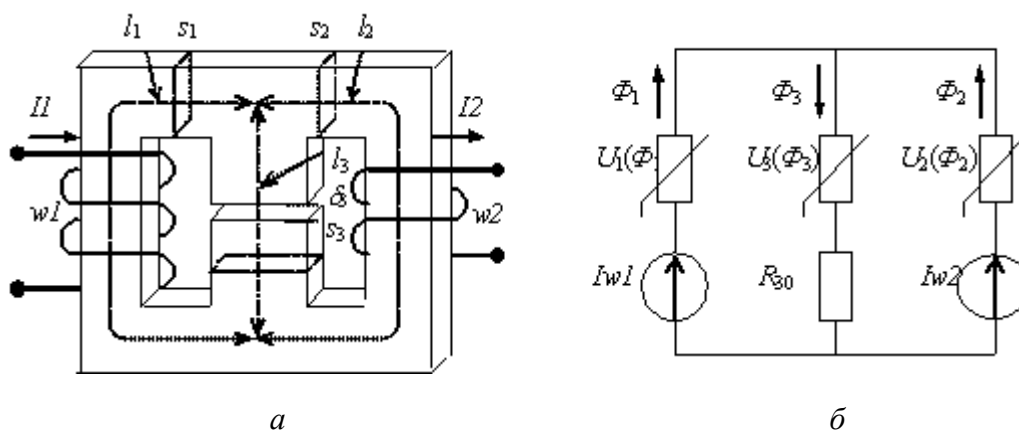


Рис.69. Эскизный рисунок и расчетная схема магнитной цепи.

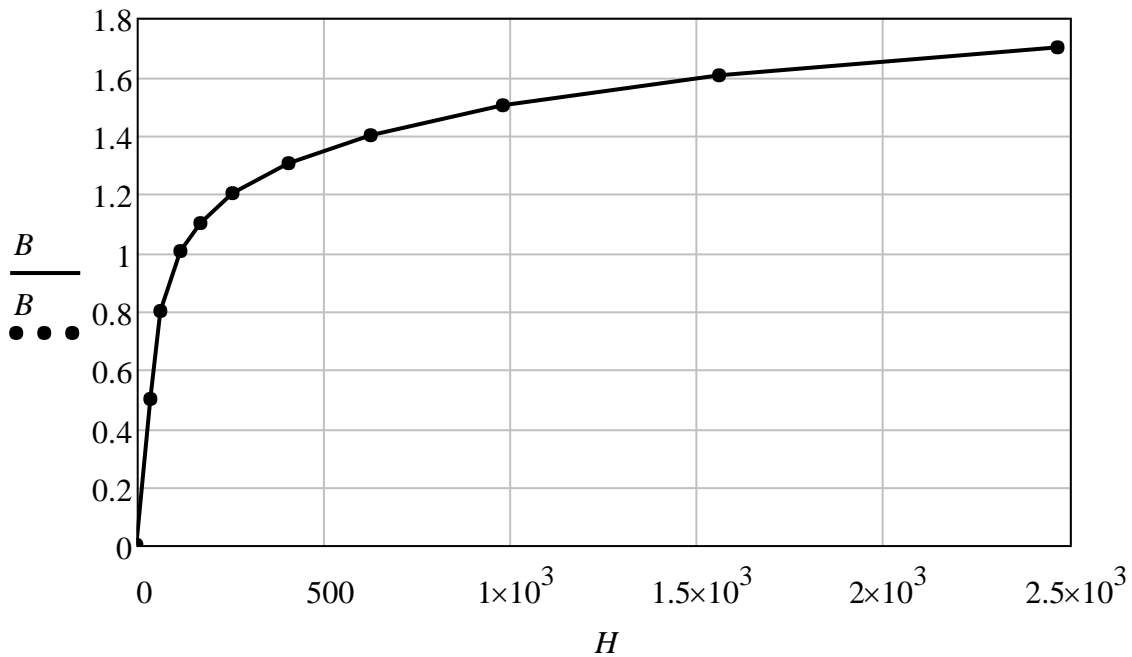


Рис. 70. Графическая диаграмма функции $B = f(H)$:

Требуется: выполнить расчет магнитной цепи и определить индукцию магнитного поля в зазоре B_0 .

1. Расчет вебер-амперных характеристик отдельных участков. На графической диаграмме кривой намагничивания $B = f(H)$ выбирают 10...15 точек, Координаты выбранных точек оформляют в виде матриц. Расчет вебер-амперных характеристик отдельных участков магнитной цепи производится по известным формулам $\Phi = Bs$, $U = Hl$, для удобства магнитные потоки выразим в [мВб]. Расчет вебер-амперных характеристик отдельных участков магнитной цепи производится по известным формулам $\Phi = Bs$, $U = Hl$, для удобства магнитные потоки выразим в [мВб].

$$B := (0 \ .5 \ .8 \ 1 \ 1.1 \ 1.2 \ 1.3 \ 1.4 \ 1.5 \ 1.6 \ 1.7)^T$$

$$H := (0 \ 35 \ 66 \ 120 \ 170 \ 260 \ 410 \ 630 \ 980 \ 1560 \ 2470)^T$$

$$k := 1..10$$

$$\Phi 1_k := 1000B_k \cdot s1 \quad U1_k := H_k \cdot l1 \quad - \text{ для 1-го участка}$$

$$\Phi 2_k := 1000B_k \cdot s2 \quad U2_k := H_k \cdot l2 \quad - \text{ для 2-го участка}$$

$$\Phi 3_k := 1000B_k \cdot s3 \quad U3_k := H_k \cdot l3 \quad - \text{ для 3-го участка:}$$

$$R_o := \frac{\delta}{\mu_o \cdot s3} \quad U_o(\Phi 3) := R_o \cdot \Phi 3 \cdot .001 \quad - \text{ для зазора}$$

2. Аппроксимация вебер-амперных характеристик отдельных участков магнитной цепи выполняется степенным полиномом вида $U = a\Phi + b\Phi^n$, коэффициенты аппроксимации a , b и n определяются по методу выбранных точек(3, 6, 9)

Для 1- го участка:

$$\begin{aligned} \text{Given } U_{13} &= a_1 \cdot \Phi_{13} + b_1 \cdot (\Phi_{13})^{n_1} & U_{16} &= a_1 \cdot \Phi_{16} + b_1 \cdot (\Phi_{16})^{n_1} \\ U_{19} &= a_1 \cdot \Phi_{19} + b_1 \cdot (\Phi_{19})^{n_1} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ n_1 \end{pmatrix} := \text{Find}(a_1, b_1, n_1) = \begin{pmatrix} 19.858 \\ 0.925 \\ 7.35 \end{pmatrix}$$

Для 2- го участка:

$$\begin{aligned} \text{Given } U_{23} &= a_2 \cdot \Phi_{23} + b_2 \cdot (\Phi_{23})^{n_2} & U_{26} &= a_2 \cdot \Phi_{26} + b_2 \cdot (\Phi_{26})^{n_2} \\ U_{29} &= a_2 \cdot \Phi_{29} + b_2 \cdot (\Phi_{29})^{n_2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ n_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(a_2, b_2, n_2) = \begin{pmatrix} 12.383 \\ 0.017 \\ 7.557 \end{pmatrix}$$

Для 3- го участка:

$$\begin{aligned} \text{Given } U_{33} &= a_3 \cdot \Phi_{33} + b_3 \cdot (\Phi_{33})^{n_3} & U_{36} &= a_3 \cdot \Phi_{36} + b_3 \cdot (\Phi_{36})^{n_3} \\ U_{39} &= a_3 \cdot \Phi_{39} + b_3 \cdot (\Phi_{39})^{n_3} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ n_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(a_3, b_3, n_3) = \begin{pmatrix} 3.723 \\ 3.421 \times 10^{-4} \\ 7.35 \end{pmatrix}$$

Уравнения аппроксимации вебер-амперных характеристик отдельных участков:

$$U_1(\Phi_1) := a_1 \cdot \Phi_1 + b_1 \cdot \Phi_1^{n_1}$$

$$U_2(\Phi_2) := a_2 \cdot \Phi_2 + b_2 \cdot \Phi_2^{n_2}$$

$$U_3(\Phi_3) := a_3 \cdot \Phi_3 + b_3 \cdot \Phi_3^{n_3}$$

4. Составляется расчетная схема магнитной цепи (рис.1, б). Для схемы составляется система уравнений по законам Кирхгофа. Решение системы уравнений производится по программе "Given...find":

$$\begin{aligned}
 \text{Given} \quad \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 &= 0 & U_{ab} + U_1(\phi_1) &= I_1 \cdot w_1 \\
 U_{ab} + U_2(\phi_2) &= I_2 \cdot w_2 & U_{ab} &= U_3(\phi_3) + U_o(\phi_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ U_{ab} \end{pmatrix} := \text{Find}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, U_{ab}) = \begin{pmatrix} 1.259 \\ 3.122 \\ 4.382 \\ 469.951 \end{pmatrix}$$

Результаты вычислений:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= 1.259 & \phi_2 &= 3.122 & \phi_3 &= 4.382 & U_{ab} &= 469.951 \\
 U_1(\phi_1) &= 30.049 & U_2(\phi_2) &= 130.049 & U_3(\phi_3) &= 34.106 \\
 U_o(\phi_3) &= 435.845 & B_o &:= \frac{\phi_3}{s^3} \cdot 0.001 & &= 1.095
 \end{aligned}$$

Примечание: алгоритм решения задачи позволяет выполнять анализ влияния отдельных параметров исходных данных на конечные результаты, для этого достаточно внести изменение нужного параметра в исходных данных задачи и повторить вычисления до конца алгоритма.

Т3. Нелинейные цепи переменного тока.

1. Общая характеристика нелинейных цепей переменного тока и методов их исследования

Нелинейные цепи переменного тока могут содержать в своей структуре нелинейные элементы любого рода: нелинейные резисторы $u(i)$, нелинейные катушки $\psi(i)$ и нелинейные конденсаторы $q(u)$. Физические характеристики нелинейных элементов на переменном токе могут существенно отличаться от их аналогичных характеристик на постоянном токе.

Существуют нелинейные элементы, у которых время установления режима соизмеримо с периодом переменного тока, т.е. проявляется инерционность. По этому показателю все нелинейные элементы разделяют на инерционные и безинерционные.

К инерционным относятся те нелинейные элементы, нелинейность характеристик которых обусловлена температурным режимом (лампы накаливания, термисторы). Установление температурного режима в таких элементах требует некоторого времени. Температура и, следовательно, сопротивление такого элемента определяется действующим значением тока в нем. Таким образом, для действующих значений тока и напряжения инерционный элемент является нелинейным, а для мгновенных значений в интервале периода – линейным.

Физические характеристики безинерционных нелинейных элементов остаются практически неизменными в широком диапазоне частот. Нелинейность таких элементов проявляется как для действующих, так и для мгновенных значений величин. Нелинейность физических характеристик приводит к искажению форм кривых физических величин на зажимах таких элементов. Так, например, при синусоидальном напряжении на зажимах безинерционного нелинейного резистора ток в нем будет несинусоидальным и, наоборот, при синусоидальном токе напряжение на его зажимах будет несинусоидальным. К безинерционным нелинейным элементам относят полупроводниковые приборы: диоды, туннельные диоды, транзисторы, стабилитроны, тиристоры и др.

Статическими характеристиками нелинейных элементов называются соответствующие зависимости $u(i)$ – для резистора, $\psi(i)$ – для катушки, $q(u)$ – для конденсатора, полученные при медленном изменении переменных.

Динамическими характеристиками нелинейных элементов называются те же зависимости $u(i)$, $\psi(i)$, $q(u)$, но полученные при быстрых изменениях переменных.

При сравнительно невысоких частотах динамические характеристики практически совпадают со статическими. Существенные различия этих характеристик начинают проявляться в области высоких частот (радиочастот).

Электромагнитные процессы в нелинейной цепи переменного тока могут быть описаны системой нелинейных дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по уравнениям Кирхгофа. В математике не существует общих методов решения таких систем уравнений и, следовательно, не существует общих методов расчета нелинейных цепей переменного тока.

Все задачи по расчету нелинейных цепей переменного тока в установившемся режиме можно разделить на две группы.

К первой группе задач относятся такие, в которых целью расчета является определение действующих значений токов и напряжений. Такие задачи встречаются в электроэнергетике, где искажение форм кривых токов и напряжений незначительны и не играют существенную роль, а определяются действующие значения этих величин.

Ко второй группе задач относятся такие, в которых целью расчета является определение мгновенных значений токов и напряжений, а также форм кривых и гармонических спектров функций. Такие задачи встречаются в электронике, где принцип действия устройств основан на преобразовании форм кривых переменных с помощью нелинейных характеристик элементов.

Методы решения задач первой и второй групп могут существенно отличаться.

2. Замена несинусоидальных функций $u(t)$ и $i(t)$ эквивалентными синусоидальными

В электрических цепях электроэнергетики, содержащих нелинейные элементы, искажение форм кривых токов и напряжений незначительны, играют второстепенную роль и ими можно пренебречь. Для исследования таких цепей можно применять так называемый метод эквивалентных синусоид. Сущность метода состоит в том, что несинусоидальные функции токов и напряжений $i(t)$ и $u(t)$ заменяются эквивалентными по действующему значению синусоидальными функциями (рис. 71, а, б).

При малых искажениях форм кривых высшие гармоники практически не влияют на величину действующего значения функции, поэтому действующее значение несинусоидальной функции практически равно действующему значению ее первой гармоники.

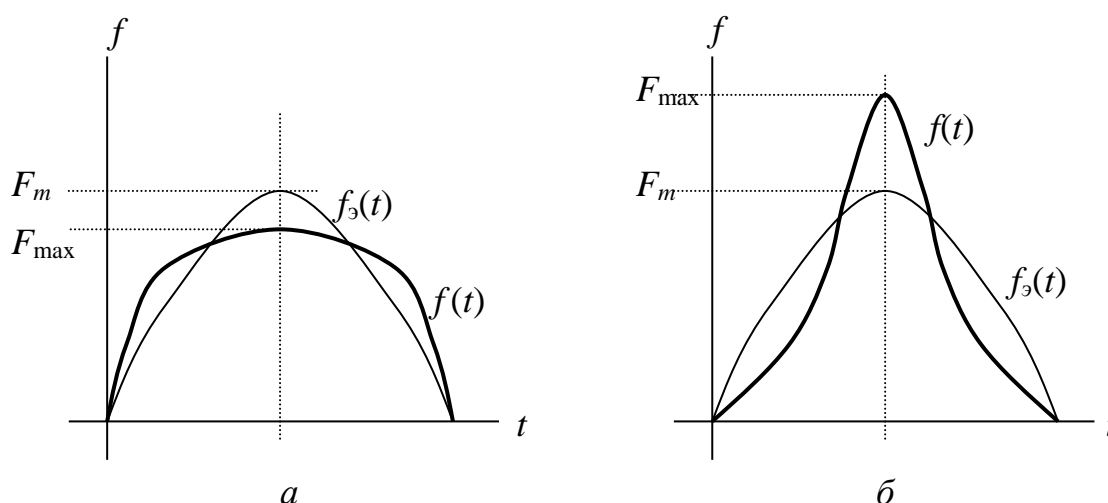


Рис. 71

При переходе к эквивалентным синусоидам происходит полная потеря информации о формах кривых функций, их гармонических составах, максимумах и минимумах и т. д.

При расчете нелинейных цепей методом эквивалентных синусоид физические характеристики нелинейных элементов $u(t)$ – для резистора, $\psi(i)$ – для катушки и $q(u)$ – для конденсатора заменяются расчетными вольтамперными характеристиками $U(I)$ или $I(U)$ для действующих значений эквивалентных синусоидальных величин. Расчетные ВАХ для конкретных линейных элементов могут быть получены экспериментально путем проведения измерений действующих значений U и I в произвольном режиме. Если заданы физические характеристики для мгновенных значений величин, то соответствующие ВАХ могут быть получены расчетным путем для заданного режима по напряжению или по току. Например, пусть веберамперная характеристика нелинейной катушки выражается уравнением $i(\psi) = a\psi + b\psi^5$. При синусоидальном напряжении на зажимах катуш-

ки $u(t) = U_m \sin(\omega t - 90^\circ)$, $U = U_m / \sqrt{2}$ ее потокосцепление также будет изменяться по синусоидальному закону :

$$\psi(t) = \int u \cdot dt = \frac{U_m}{\omega} \cdot \sin \omega t = \Psi_m \cdot \sin \omega t, \text{ где } \Psi_m = \frac{U_m}{\omega}.$$

Закон изменения тока в катушке получим из уравнения аппроксимации путем разложения его в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} i(t) &= a\psi + b\psi^5 = a\Psi_m \cdot \sin \omega t + b\Psi_m^5 \sin^5 \omega t = \dots = \\ &= I_{1m} \sin \omega t - I_{3m} \sin 3\omega t + I_{5m} \sin 5\omega t \end{aligned}$$

Действующее значение тока выражается через амплитуды отдельных гармоник: $I = \sqrt{\frac{1}{2}(I_{1m}^2 + I_{3m}^2 + I_{5m}^2)}$.

Следует отметить, что разложение функции $i(t)$ в ряд Фурье может вызвать значительные трудности, поэтому возможности данного метода ограничены.

Гораздо проще поставленная выше задача может быть решена на ЭВМ в MathCAD:

$$\begin{aligned} u(t) &:= 200 \cdot \sin(314 \cdot t) & \psi(t) &:= \int u(t) dt \rightarrow -\frac{100 \cdot \cos(314 \cdot t)}{157} \\ i(t) &:= a \cdot \psi(t) + b \cdot \psi(t)^7 \\ I &:= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t)^2 dt} = 3.329 & U &:= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)^2 dt} = 141.457 \end{aligned}$$

В приведенном примере кривая функции $u(t)$ может иметь любую форму, в том числе и несинусоидальную.

Следует иметь в виду тот факт, что ВАХ $U(I)$ нелинейных элементов, снятые экспериментально или полученные расчетным путем, соответствуют определенному режиму, при котором они были получены, например, синусоидальному напряжению. В условиях конкретной цепи напряжения на этих элементах могут существенно отличаться от синусоидальной формы, поэтому реальные ВАХ могут также существенно отличаться от экспериментальных или расчетных.

3. Методы расчета нелинейных цепей переменного тока на основе ВАХ для эквивалентных синусоид

Замена несинусоидальных функций $i(t)$ и $u(t)$ эквивалентными синусоидальными позволяет выполнять расчет нелинейных цепей переменного тока в комплексной форме. При этом выбор расчетного метода определяется конкретными условиями задачи: структурой схемы цепи, характером нелинейности ВАХ элементов, требованиями к точности решения и т. д. Возможно применение следующих методов расчета.

1) Графический метод. В простейших случаях, когда схема цепи состоит только из последовательно или только из параллельно включенных элементов, решение задачи может быть выполнено графически методом сложения ВАХ. Отличительной особенностью данного метода является то обстоятельство, что отдельные ВАХ складываются не арифметически, как это имело место в цепях постоянного тока, а векторно, в соответствии с уравнениями Кирхгофа в комплексной (векторной) форме.

Пусть требуется рассчитать режим нелинейной цепи с последовательным соединением источника ЭДС E , линейного резистора R и нелинейной катушки с ВАХ $U_L(I)$ (рис. 72, а).

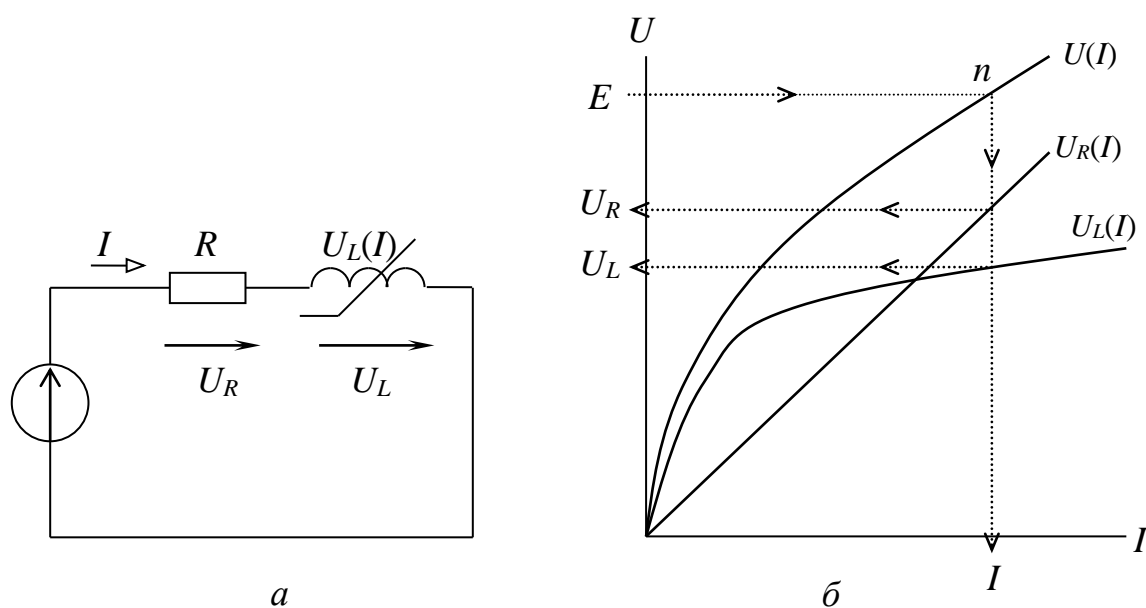


Рис. 72

Построим в одной системе координат $U-I$ графические диаграммы ВАХ отдельных элементов: резистора $U_R = IR$ и катушки $U_L(I)$. Векторное сложение ВАХ отдельных элементов по оси U следует выполнить в соответствии со вторым законом Кирхгофа $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$, в результате сложения получим результирующую ВАХ $U(I)$ (рис. 72, б). Положение рабочей точки n на результирующей ВАХ определяется условием $U = E$. Последовательность графического решения показана на рис. 72, б стрелками.

2) Метод последовательных приближений. Рассмотренная выше задача может быть решена аналитически методом последовательных приближений. В решении задачи может быть использована как графическая, так и аналитическая форма задания ВАХ нелинейной катушки, например, $I = aU + bU^5$. Решение задачи выполняется в следующей последовательности:

а) Задаются напряжением на нелинейном элементе в первом приближении U'_L ;

б) Ток в цепи определяется из уравнения аппроксимации $I' = aU'_L + bU'^5_L$ или графически по диаграмме ВАХ $U(I)$;

в) Далее следуют вычисления: $U'_R = RI' \rightarrow E' = \sqrt{U'^2_R + U'^2_L}$;

г) Выполняется сравнение $E' \gg E$, по результатам которого задаются напряжением U''_L во втором приближении и повторяют расчет до

достижения требуемой точности, например, $\delta = \frac{|E - E'|}{E} < 0,01$.

Метод последовательных приближений применим к расчету схем любой сложности. Для сложной схемы составляется система уравнений Кирхгофа в комплексной форме, которая решается методом последовательных приближений, при этом все вычисления в отдельном цикле выполняются в комплексной форме. В качестве примера приведем расчет схемы рис. 73.

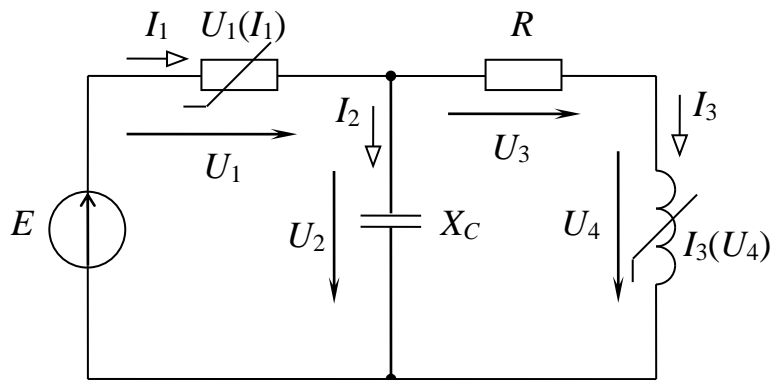


Рис. 73

Заданы параметры линейных элементов E , R , X_C . ВАХ нелинейных элементов заданы аналитически в виде уравнений аппроксимации: $U_R = aI + bI^3$; $I_L = cU + dU^5$.

Для исследуемой схемы система комплексных уравнений Кирхгофа совместно с уравнениями аппроксимации имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \quad (1) \\ \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{E} \quad (2) \\ -\underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4 = 0 \quad (3) \\ U_2 = aI_1 + bI_1^3 \quad (4) \\ I_3 = cU_4 + dU_4^5 \quad (5) \end{array} \right.$$

Один из вариантов решения полученной системы уравнений методом последовательных приближений представлен ниже.

а) Задаются в первом приближении комплексным напряжением на нелинейной катушке, например: $\underline{U}'_4 = 50e^{j0}$.

б) Определяется модуль тока I'_3 аналитически из уравнения (5) или графически по диаграмме функции $I_L(U_L)$. Аргумент этого комплекса принимается равным -90° (в катушке ток отстает от напряжения на угол $\varphi = 90^\circ$). В комплексной форме $\underline{I}'_3 = I'_3 \cdot e^{-j90}$.

в) Определяется напряжение на линейном резисторе по закону Ома: $\underline{U}'_3 = \underline{I}'_3 \cdot R$.

г) Из уравнения (3) находится напряжение на конденсаторе: $\underline{U}'_2 = \underline{U}'_3 + \underline{U}'_4$.

д) По закону Ома определяется ток конденсатора: $\underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}'_2}{-jX_C}$.

е) Из уравнения (1) находится ток источника $\underline{I}'_1 = \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 = I'_1 \cdot e^{j\alpha}$.

ж) Определяется модуль напряжения U'_1 аналитически из уравнения (4) или графически по диаграмме функции $U_R(I_R)$. Аргумент этого комплекса принимается равным аргументу комплекса тока \underline{I}'_1 (в резисторе ток совпадает с напряжением). В комплексной форме $\underline{U}'_1 = U'_1 \cdot e^{j\alpha}$.

з) Из уравнения (2) находится расчетное значение ЭДС: $\underline{E}' = \underline{U}'_1 + \underline{U}'_2 = E' \cdot e^{j\beta}$.

и) Сравнивают найденное в первом приближении значение модуля ЭДС E' с заданным значением ЭДС E и с учетом вида полученного неравенства $E' > < E$ задаются новым значением напряжения \underline{U}''_4 во втором приближении и повторяют расчет по тому же алгоритму. Циклы расчета (итерации) повторяют до достижения желаемой точности. В результатах последнего цикла корректируют аргументы комплексных токов и напряжений путем добавления к ним значения $-\beta$.

3) Расчет нелинейных цепей на ЭВМ. Система нелинейных уравнений, составленная для исследуемой схемы по законам Кирхгофа, может быть решена на ЭВМ методом последовательных приближений как по ин-

двигательной программе, так и по стандартной программе из пакета MathCAD или MATLAB. При этом система уравнений Кирхгофа дополняется нелинейными уравнениями аппроксимации в комплексной форме. В комплексной форме аппроксимации учитывается как нелинейная связь между модулями величин U и I , так и угол сдвига между ними. Ниже приведены примеры аппроксимации ВАХ $U(I)$ или $I(U)$ для нелинейных элементов разного рода:

$$\begin{aligned} U_r &= b \cdot (|I_r|)^3 \cdot e^{j \cdot \arg(I_r)} && \text{– для резистора,} \\ I_l &= d \cdot (|U_l|)^5 \cdot e^{j \cdot (\arg(U_l) - 90 \cdot \text{deg})} && \text{– для катушки,} \\ I_c &= d \cdot (|U_c|)^5 \cdot e^{j \cdot (\arg(U_c) + 90 \cdot \text{deg})} && \text{– для конденсатора.} \end{aligned}$$

Последовательность расчета нелинейной цепи на ЭВМ по стандартной программе из пакета MathCAD приведен ниже.

а) Задана схема нелинейной цепи (рис. 73) и параметры линейных элементов E , R , X_c . ВАХ нелинейных элементов заданы аналитически в виде уравнений аппроксимации в комплексной форме:

$$E := 70 \quad R := 25 \quad X_c := 30 \quad b := 26 \quad d := 1.8 \cdot 10^{-3}$$

$$U1 = b \cdot (|I1|)^2 \cdot e^{j \cdot \arg(I1)} \quad I3 = d \cdot (|U4|)^4 \cdot e^{j \cdot (\arg(U4) - 90 \text{deg})}$$

б) Составляется система уравнений по законам Кирхгофа, которая дополняется уравнениями аппроксимации в комплексной форме для нелинейных элементов. Полученная таким образом система уравнений решается по стандартной программе:

$$\begin{aligned} \text{Given} \quad I1 - I2 - I3 &= 0 & U1 - j \cdot I2 \cdot X_c &= E & U1 + I3 \cdot R + U4 &= E \\ I3 &= d \cdot (|U4|)^4 \cdot e^{j \cdot (\arg(U4) - 90 \text{deg})} & U1 &= b \cdot (|I1|)^2 \cdot e^{j \cdot \arg(I1)} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ U1 \\ U4 \end{pmatrix} := \text{Find}(I1, I2, I3, U1, U4)$$

$$U2 := I2 \cdot (-j \cdot X_c) \quad U3 := I3 \cdot R$$

в) Результаты расчета приводятся к стандартной форме:

$$\begin{aligned} |I1| &= 1.315 & \arg(I1) &= 13.036 \cdot \text{deg} \\ |I2| &= 0.936 & \arg(I2) &= 68.812 \cdot \text{deg} \\ |I3| &= 1.105 & \arg(I3) &= -31.402 \cdot \text{deg} \\ |U1| &= 44.984 & \arg(U1) &= 13.036 \cdot \text{deg} \\ |U2| &= 28.073 & \arg(U2) &= -21.188 \cdot \text{deg} \\ |U3| &= 27.628 & \arg(U3) &= -31.402 \cdot \text{deg} \\ |U4| &= 4.978 & \arg(U4) &= 58.598 \cdot \text{deg} \end{aligned}$$

4. Резонансные явления в нелинейных цепях

Резонанс в цепи, содержащей нелинейную катушку с ферромагнитным сердечником и линейный конденсатор, получил название феррорезонанса. Для качественного исследования явления феррорезонанса воспользуемся методом эквивалентных синусоид.

Феррорезонанс напряжений будет иметь место в схеме с последовательным соединением элементов (рис. 74, а) при выполнении условия $U_L = U_C$.

Графический расчет схемы представлен на рис. 74, б. Векторное сложение ВАХ отдельных элементов $U_R(I)$, $U_L(I)$ и $U_C(I)$ производится в соответствии с уравнением 2-го закона Кирхгофа $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$.

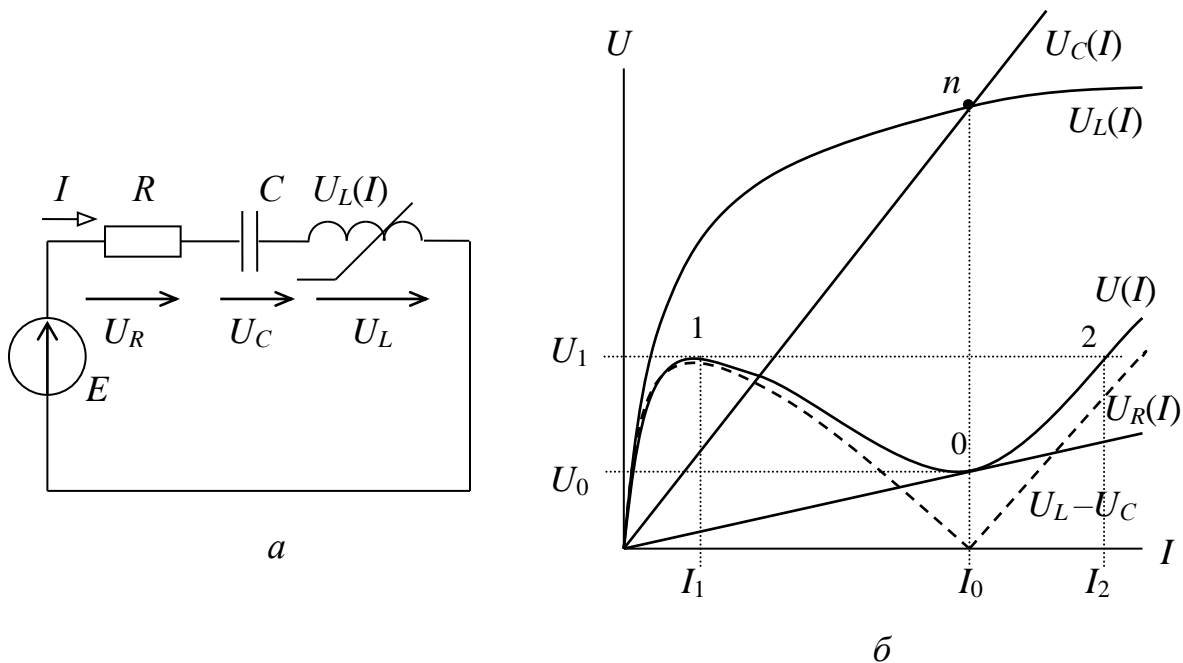


Рис. 74

При плавном повышении напряжения от 0 до U_1 ток будет также плавно изменяться от 0 до I_1 . При $U = U_1$ произойдет скачкообразное изменение тока от I_1 до I_2 . При последующем повышении напряжения будет наблюдаться опять плавное изменение тока. При плавном уменьшении напряжения обратный скачок тока от I_0 до I_3 произойдет при напряжении $U = U_0$. Участок ВАХ 1–0 с отрицательным дифференциальным сопротивлением является участком с неустойчивым режимом работы и при питании цепи от источника ЭДС экспериментально не может быть зафиксирован. Если питать цепь от источника тока J , то можно получить все точки ВАХ, включая и неустойчивый участок 1–0. Резонансу напряжений на результирующей ВАХ соответствует точка 0, для которой выполняется условие

$U_L = U_C$. Таким образом, исследуемая нелинейная цепь обладает следующими свойствами, нехарактерными для линейной цепи: 1) резонансный режим в цепи достигается изменением приложенного к ней напряжения; 2) в цепи могут иметь место скачкообразные изменения тока или триггерный эффект; 3) при одном и том же напряжении источника в цепи могут наблюдаться три различных режима, один из которых – неустойчивый.

При параллельном соединении тех же элементов в цепи будет наблюдаться феррорезонанс токов. На рис. 75, а представлена схема цепи, а на рис. 75, б – ее графический расчет.

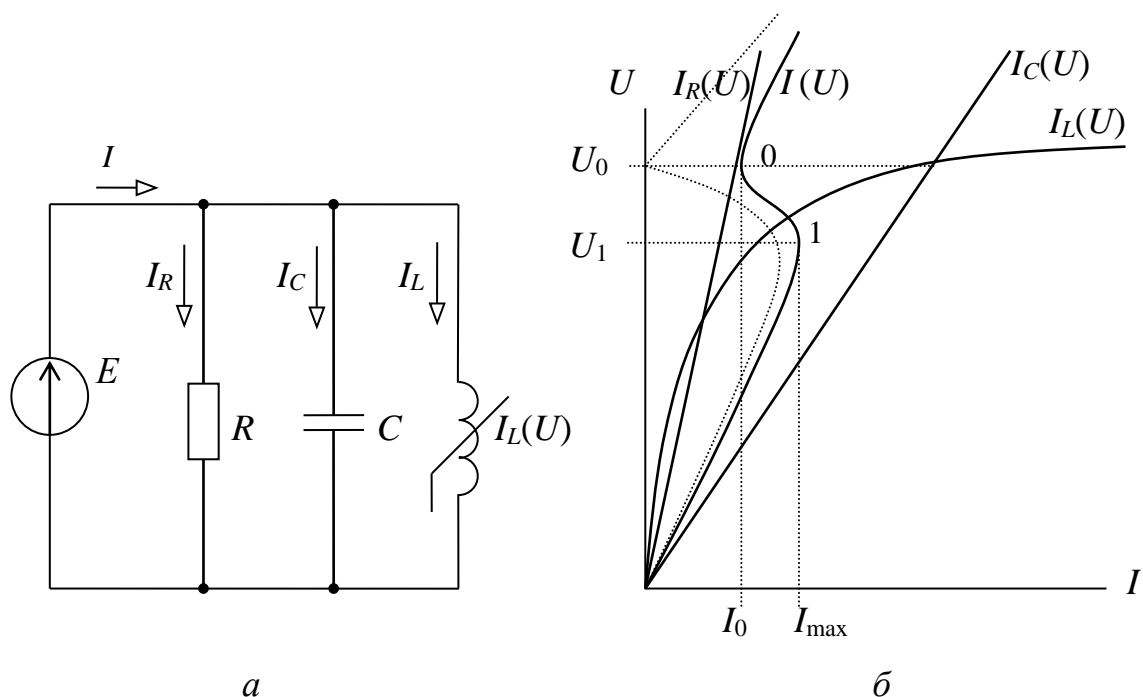


Рис. 75

Векторное сложение ВАХ отдельных элементов $I_R(U)$, $I_C(U)$, $I_L(U)$ производится в соответствии с уравнением 1-го закона Кирхгофа:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}.$$

При плавном увеличении напряжения ток вначале плавно увеличивается до значения I_1 , затем уменьшается до значения I_0 , после чего наблюдается его быстрый рост. Резонансному режиму соответствует точка 0 на результирующей ВАХ, для которой соблюдается условие $I_L = I_C$.

При питании цепи от источника тока J будут наблюдаться скачкообразные изменения напряжения на ее входе.

5. Нелинейная катушка с сердечником на переменном токе

Рассмотрим физические процессы, протекающие в катушке с сердечником на переменном токе (рис. 76, а).

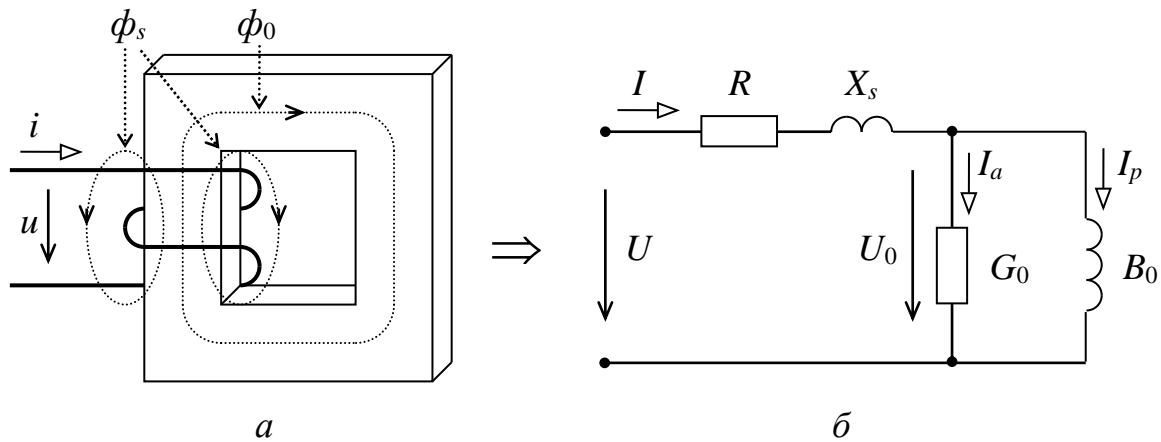


Рис. 76

Протекающий по обмотке w ток i создает магнитный поток ϕ , большая часть которого (основной поток) ϕ_0 замыкается по сердечнику, и незначительная часть (поток рассеяния) ϕ_s – по воздуху. Основной поток ϕ_0 нелинейно зависит от тока i , а поток рассеяния пропорционален току, следовательно: $L_S = \frac{\phi_s \cdot w}{i} = \frac{\Psi_S}{i} = \text{const}$ – индуктивность рассеяния.

Протекающий по обмотке w ток i создает магнитный поток ϕ , большая часть которого (основной поток) ϕ_0 замыкается по сердечнику, и незначительная часть (поток рассеяния) ϕ_s – по воздуху. Основной поток ϕ_0 нелинейно зависит от тока i , а поток рассеяния пропорционален току, следовательно: $L_S = \frac{\phi_s \cdot w}{i} = \frac{\Psi_S}{i} = \text{const}$ – индуктивность рассеяния.

Электрическое состояние цепи можно описать нелинейным дифференциальным уравнением:

$$u = Ri + \frac{d\psi}{dt} = Ri + \frac{d\psi_S}{dt} + \frac{d\psi_0}{dt} = Ri + L_S \frac{di}{dt} + w \frac{d\phi_0}{dt} = Ri + L_S \frac{di}{dt} + u_0.$$

При синусоидальном напряжении на зажимах искажения форм кривых других переменных (i , ϕ_0) будут незначительны, поэтому для исследования режима катушки можно применить метод эквивалентных синусоид.

Уравнение цепи в комплексной форме получит вид:

$\underline{U}_m = R\underline{I}_m + j\omega L_S \underline{I}_m + j\omega w \Phi_{0m} = \underline{I}_m (R + jX_S) + \underline{U}_{0m}$ – для комплексных амплитуд;

$\underline{U} = \underline{I}(R + jX_S) + \underline{U}_0$ – для комплексных действующих значений.

Данному уравнению соответствует эквивалентная схема замещения катушки с сердечником (рис. 76, б), в которой приняты следующие обо-

значения: R, X_S – активное и реактивное (рассеяния) сопротивления обмотки катушки; G_0, B_0 – активная и реактивная проводимости, вносимые сердечником, значения которых для конкретной катушки определяются через мощность потерь в сердечнике $\left(G_0 = \frac{P_{ст}}{U_0^2} \right)$ и намагничивающуюся мощность $\left(B_0 = \frac{Q_{ст}}{U_0^2} \right)$.

Векторная диаграмма для схемы замещения показана на рис. 77:

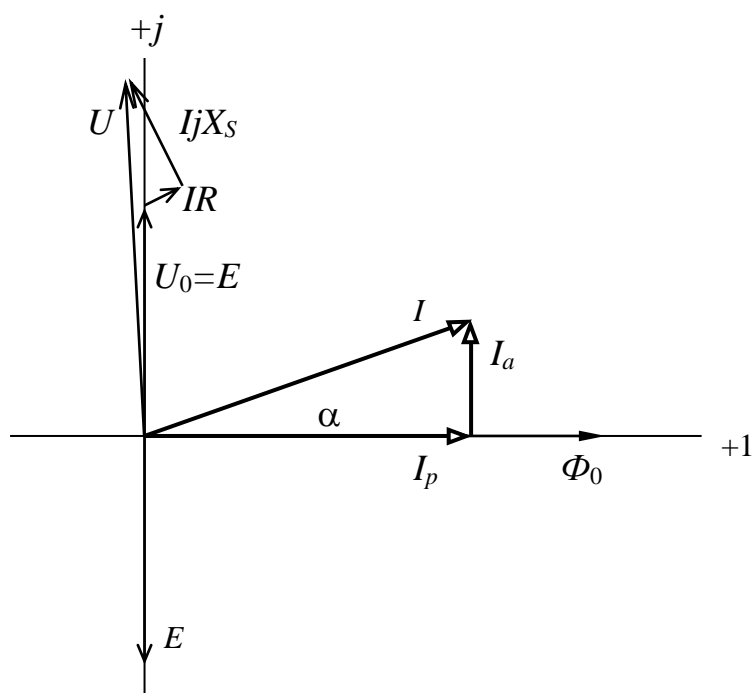


Рис. 77

Вследствие наличия потерь в сердечнике, магнитный поток $\underline{\Phi}_0$ будет отставать от тока \underline{I} на угол α , который принято называть углом потерь.

6. Трансформатор с сердечником и его схема замещения

Картина распределения магнитных потоков в трансформаторе с сердечником показана на рис. 78:

$L_{S1} = \frac{w_1 \cdot \phi_{S1}}{i_1}$ – индуктивность рассеяния первичной обмотки,

$$L_{S2} = \frac{w_2 \cdot \phi_{S2}}{i_2} \text{ – индуктивность рассеяния вторичной обмотки.}$$

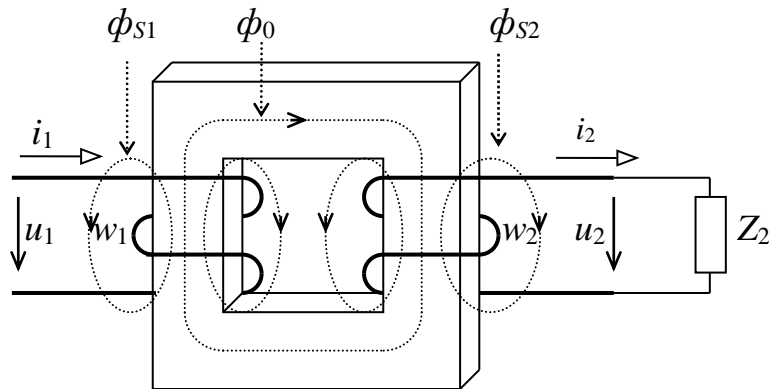


Рис. 78

Основной поток ϕ_0 , замыкающийся по сердечнику, создается с суммарной МДС, с которой он связан нелинейно: $F = i_1 w_1 + i_2 w_2$.

Дифференциальные уравнения для первичной и вторичной цепей:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_{S1} \frac{di_1}{dt} + w_1 \frac{d\phi_0}{dt} \\ R_2 i_2 + L_{S2} \frac{di_2}{dt} + w_2 \frac{d\phi_0}{dt} + u_2 = 0 \end{cases}$$

Введем обозначения: $e_1 = -w_1 \frac{d\phi_0}{dt}$, $e_2 = -w_2 \frac{d\phi_0}{dt}$, тогда уравнения примут вид:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_{S1} \frac{di_1}{dt} - e_1 \\ e_2 = R_2 i_2 + L_{S2} \frac{di_2}{dt} + u_2 \end{cases}$$

Анализ полученных уравнений показывает, что ЭДС в первичной цепи e_1 направлена навстречу приложенному уравнению u_1 и уравнивает большую его часть, т.е. играет роль противодействующей ЭДС, а ЭДС во вторичной цепи e_2 создает ток i_2 , т.е. играет роль генераторной ЭДС.

Применим к уравнениям трансформатора методом эквивалентных синусоид и запишем их в комплексной форме:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_1 jX_{S1} - \underline{E}_1 = (R_1 + jX_{S1})\underline{I}_1 - \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 = \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 jX_{S2} + \underline{U}_2 = (R_2 + jX_{S2})\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \end{cases}$$

Если числа витков обмоток существенно отличаются, т.е. коэффициент трансформации $k_T = \frac{w_1}{w_2} \gg 1$, то все переменные величины вторичной цепи «приводят» к первичной цепи. Приведение заключается в замене реального трансформатора с $k_T = \frac{w_1}{w_2} \gg 1$ эквивалентным расчетным транс-

форматором с коэффициентом трансформации $k_T = \frac{w_1}{w_2} = 1$. Все приведенные величины обозначаются штрихом сверху. Условием эквивалентности приведенной схемы являются:

- 1) сохранение без изменения намагничивающей силы $F_2 = I_2 w_2 = I'_2 w'_2$;
- 2) сохранение без изменения мощности $S_2 = U_2 I_2 = U'_2 I'_2$.

Формулы приведения:

- 1) $w'_2 = w_1$ – согласно условию;
- 2) $I'_2 w'_2 = I_2 w_2 \Rightarrow I'_2 = I_2 \frac{w_2}{w'_2} = \frac{1}{k_T} I_2$;
- 3) $U'_2 I'_2 = U_2 I_2 \Rightarrow U'_2 = U_2 \frac{I_2}{I'_2} = k_T U_2$;
- 4) $Z'_2 = \frac{U'_2}{I'_2} = \frac{k_T U_2}{\frac{1}{k_T} I_2} = k_T^2 Z_2$;
- 5) $Y'_2 = \frac{1}{Z'_2} = \frac{1}{k_T^2} Y_2$.

Уравнения приведенного трансформатора получают вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + jX_{S1})\underline{I}_1 - \underline{E}_1 \\ \underline{E}'_2 = (R'_2 + jX'_{S2})\underline{I}'_2 + \underline{U}'_2 \end{cases}$$

Этим уравнениям соответствует схема замещения (рис. 79):

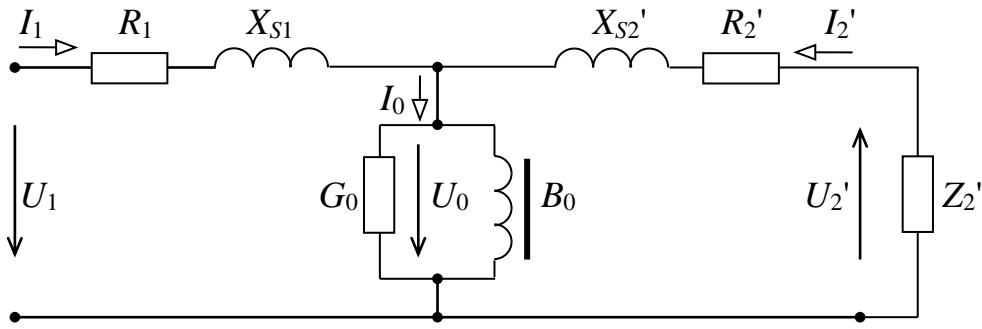


Рис. 79

Основной магнитный поток Φ_0 создается суммой МДС обеих обмоток. По закону Ома для магнитной цепи:

$$\underline{\Phi}_0 = \frac{\underline{I}_1 w_1 + \underline{I}'_2 w'_2}{\underline{Z}_m} = \frac{(\underline{I}_1 + \underline{I}'_2) w_1}{\underline{Z}_m} = \frac{\underline{I}_0 w_1}{\underline{Z}_m},$$

где \underline{Z}_m – комплексное магнитное сопротивление сердечника,

$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2$ – суммарный намагничивающий ток, равный току холостого хода.

Из полученного уравнения следует: $\underline{I}_1 = \underline{I}_0 - \underline{I}'_2$, т.е. ток первичной цепи трансформатора равен сумме тока холостого хода \underline{I}_0 и приведенного вторичного тока с обратным знаком ($-\underline{I}'_2$).

Векторная диаграмма токов и напряжений для приведенного трансформатора показана на рис. 80.

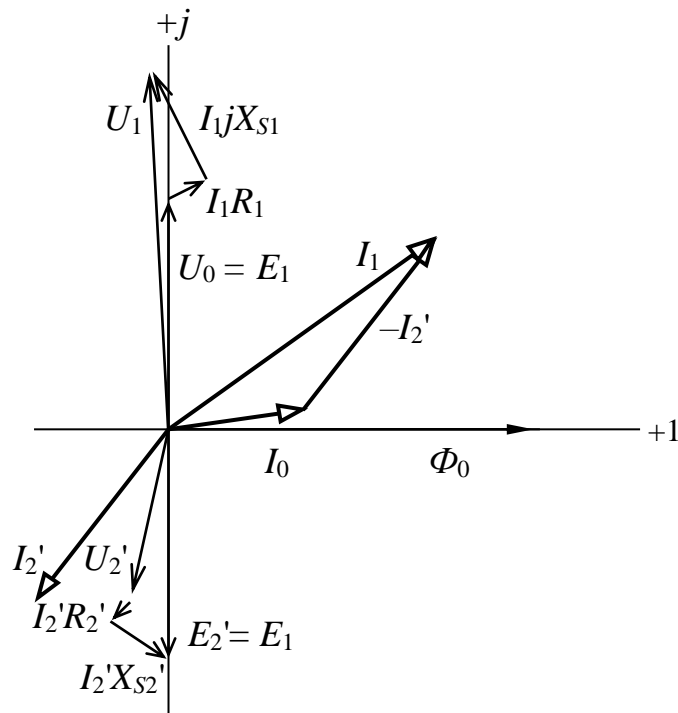


Рис. 80

7. Управляемая катушка индуктивности

Управляемая нелинейная катушка индуктивности содержит на общем магнитопроводе две обмотки, одна из которых рабочая обмотка w_1 включается в цепь переменного тока в качестве управляемого элемента, а вторая – обмотка управления w_0 , которая питается от источника постоянного тока J (рис. 81, а).

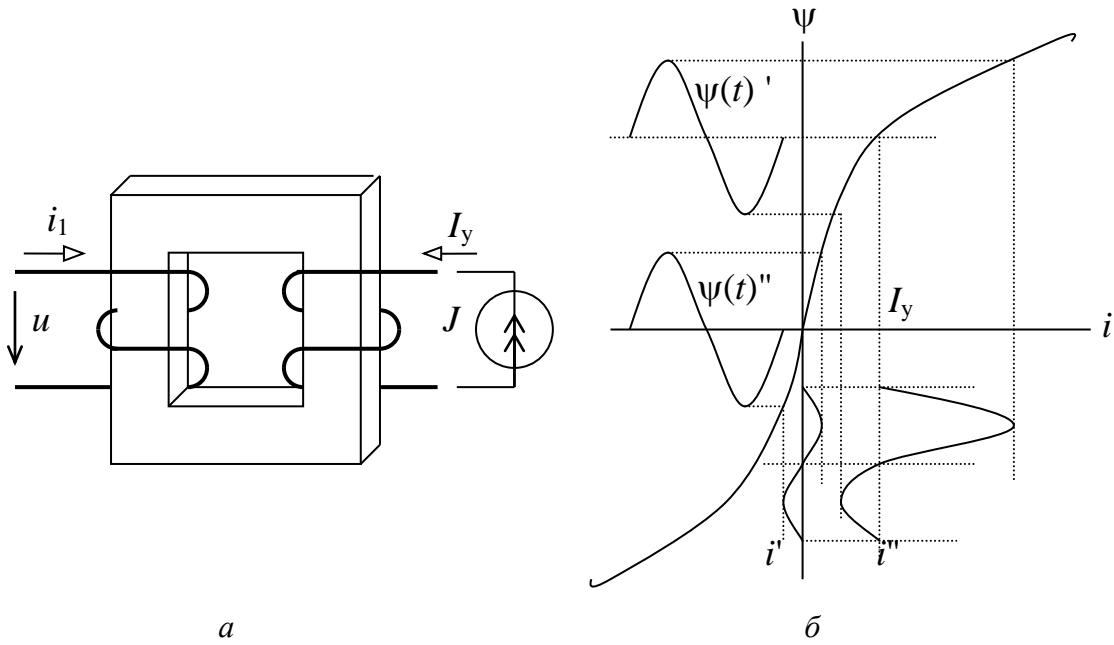


Рис. 81

Принцип управления заключается в том, что при увеличении тока в обмотке управления I_y процесс перемагничивания сердечника смещается в область насыщения, при этом для получения того же значения переменного потока требуется больший переменный намагничивающий поток первичной обмотки (рис. 81, б), что эквивалентно уменьшению ее индуктивного сопротивления $X_L = \omega L$.

Управляемые катушки нашли применение в устройствах автоматики и управления, в магнитных усилителях мощности.

Магнитный усилитель состоит из двух одинаковых управляемых катушек (рис. 82, а).

Рабочие обмотки катушек могут включаться между собой последовательно или параллельно, но обязательно согласно, а обмотки управления – только последовательно и обязательно встречно. При такой схеме включения наводимые в обмотках управления переменные ЭДС будут направлены навстречу друг другу и взаимно компенсироваться. Таким образом исключается влияние рабочей цепи на цепь управления.

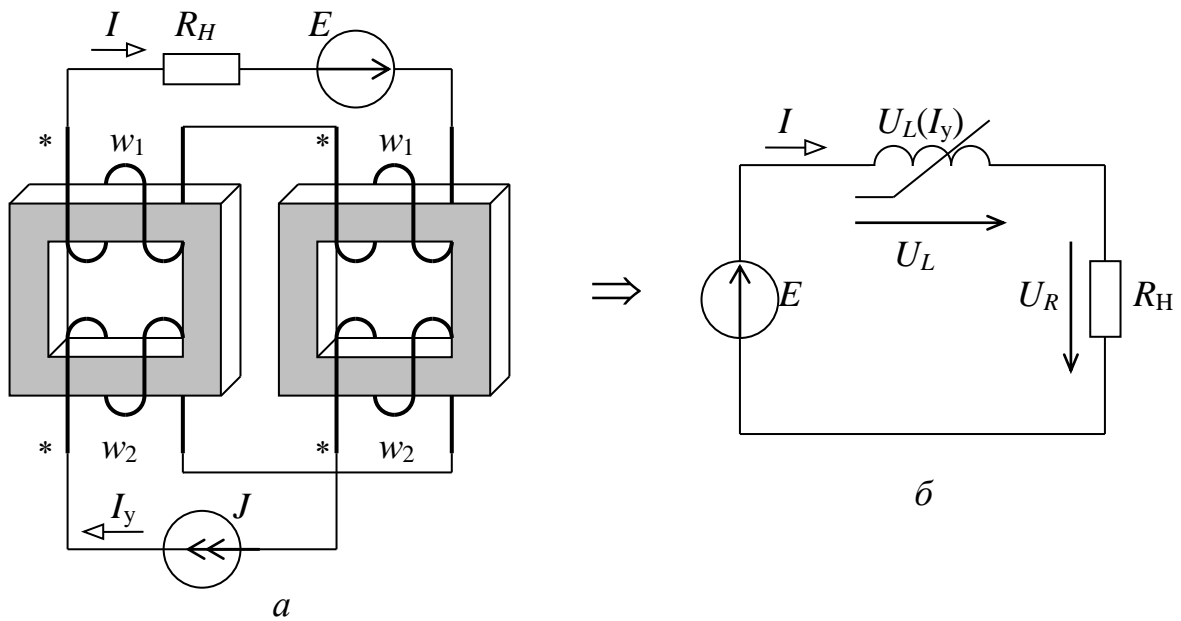


Рис. 82

Исследуем работу магнитного усилителя методом эквивалентных синусоид.

Семейство диаграмм ВАХ $U_L(I)$ магнитного усилителя для различных значений тока I_y имеет вид (рис. 83):

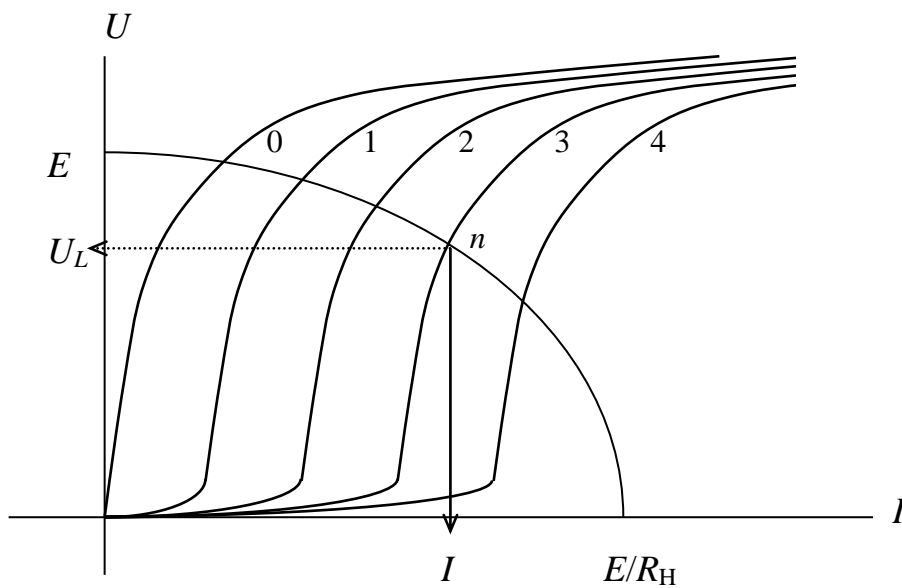


Рис. 83

При активной нагрузке магнитного усилителя $Z_L = R_L + j0$ эквивалентная схема всей цепи получит вид рис. 82, б. По 2-му закону Кирхгофа для эквивалентной схемы:

$$\underline{E} = \underline{I} \cdot R_H + \underline{U}_L(I_y) - \text{в комплексной форме или } E = \sqrt{(I \cdot R_H)^2 + U_L^2}$$

– для модулей, откуда следует $\left(\frac{U_L}{E}\right)^2 + \left(\frac{I}{E/R_H}\right)^2 = 1$ – уравнение эллипса с

полуосями E и $I = \frac{E}{R_H}$.

Таким образом, для определения параметров режима U_L , U_R , I магнитного усилителя при заданной нагрузке R_H и заданном токе управления I_y необходимо на графической диаграмме семейства ВАХ провести эллипс с полуосями E и E/R_H , точка пересечения которого с заданной ВАХ определит положение рабочей точки n . Из диаграммы непосредственно определяются U_L и I , а определение других величин уже не представляет сложности.

Относительно небольшое изменение мощности в цепи управления $\Delta P_y = (I_{y1}^2 - I_{y2}^2)R_y$ вызывает существенное изменение мощности, потребляемой нагрузкой: $\Delta P_H = (I_1^2 - I_2^2)R_H$. Коэффициент усиления магнитного усилителя по мощности определяется как отношение $K_y = \frac{\Delta P_H}{\Delta P_y}$ и составляет несколько десятков единиц.

8. Расчет нелинейных цепей переменного тока на основе физических характеристик нелинейных элементов

1). Графический метод. При расчете мгновенных значений напряжений $u(t)$ и токов $i(t)$ в нелинейной цепи используются физические характеристики нелинейных элементов, а именно: вольтамперная характеристика $u = f(i)$ или $i = f(u)$ для резистора, веберамперная характеристика $i = f(\psi)$ или $\psi = f(i)$ для катушки и кулонвольтная характеристика $q = f(u)$ или $u = f(q)$ для конденсатора.

В простейших случаях, если задан или может быть рассчитан закон изменения во времени одной из спаренных физических величин, то закон изменения во времени другой величины может быть получен графически, методом проекции заданной функции на соответствующую физическую характеристику нелинейного элемента. В качестве примера рассмотрим графический расчет тока нелинейной катушки в режиме синусоидального напряжения (ток холостого хода трансформатора) (рис. 84).

Пусть к зажимам катушки приложено напряжение $u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$. Магнитный поток в сердечнике связан с напряжением уравнением индукции:

$$u = -e = w \frac{d\phi}{dt},$$

откуда

$$\phi(t) = \frac{1}{\omega} \int u \cdot dt = \frac{U_m}{\omega w} (-\cos \omega t) = \Phi_m \sin(\omega t + 90^\circ).$$

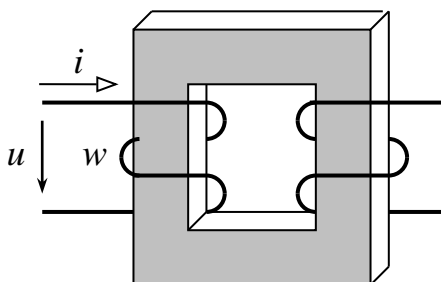


Рис. 84

Графические диаграммы функций $u(t)$ и $\phi(t)$ показаны на рис. 85.

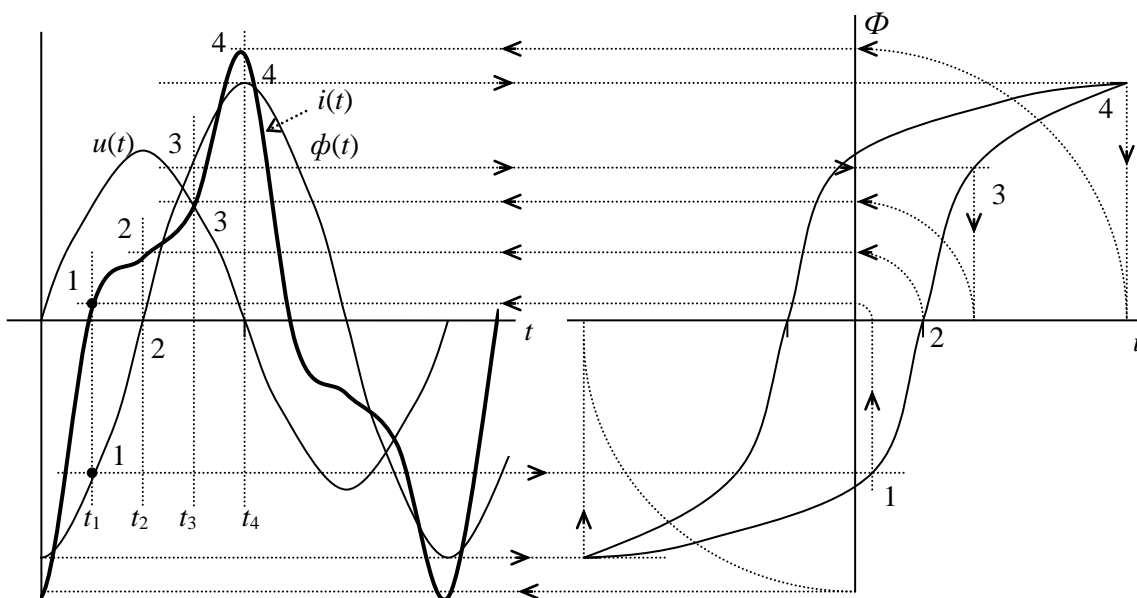


Рис. 85

Справа приведена вебер-амперная характеристика $\phi(i)$ магнитной цепи в виде петли гистерезиса, соответствующая расчетной амплитуде магнитного потока Φ_m . Расчетные точки искомой функции $i(t)$ получаются методом проекции точек заданной функции $\phi(t)$ на вебер-амперную характеристику $\phi(i)$ магнитной цепи.

Для построения графической диаграммы искомой функции $i(t)$ исследуемый интервал времени (период T) разбивается на отдельные отрезки Δt . Для каждого момента времени $t_0, t_1, t_2 \dots$ определяются на диаграмме координаты точек заданной функции $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$, которые проектируются на вебер-амперную характеристику $\phi(i)$ магнитной цепи. Найденные соответствующие значения искомой функции $i_0, i_1, i_2 \dots$ в масштабе откладываются на диаграмме для каждого момента времени $t_0, t_1, t_2 \dots$

Отдельные точки соединяются плавной кривой, в результате чего получается графическая диаграмма искомой функции $i(t)$ (на рис. 85 показана жирной линией). Процедура построения графической диаграммы искомой функции $i(t)$ на рис. 85 показана стрелками для 5 точек (0, 1, 2, 3, 4).

Анализ решения показывает, что намагничивающий ток катушки имеет несинусоидальную форму и содержит в своем составе только нечетные гармоники.

2) Гармонический метод. В нелинейных цепях переменного тока происходят искажения форм кривых токов и напряжений. Несинусоидальные функции токов $i(t)$ и напряжений $u(t)$, как известно, можно представить в виде гармонических рядов Фурье. В гармонических методах расчета решение для искомых величин находят в виде суммы отдельных гармоник.

В простейших случаях решение для искомой функции в виде гармонического ряда Фурье удастся получить в результате разложения в ряд Фурье найденного в общем виде решения. В качестве примера рассмотрим расчет тока в нелинейной катушке (тока холостого хода трансформатора) (рис. 86). Чтобы получить сравнительно простое решение, применим для катушки параллельную схему замещения (рис. 86). Вебер-амперную характеристику катушки аппроксимируем уравнением степенного полинома:

$$i_L(\psi) = a\psi + b\psi^5.$$

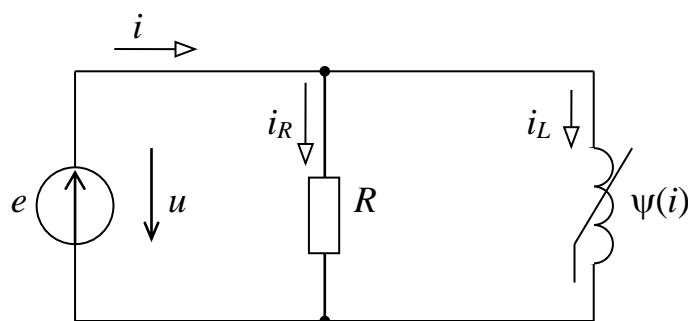


Рис. 86

Пусть к зажимам катушки приложено напряжение $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$. Магнитное потокосцепление катушки связано с напряжением уравнением индукции:

$$u = -e = \frac{d\psi}{dt}, \quad \text{откуда} \quad \psi(t) = \int u \cdot dt = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t = \Psi_m \sin \omega t.$$

Ток в резисторе определяется по закону Ома:

$$i_R = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + 90^\circ) = I_{Rm} \cos \omega t.$$

Ток в катушке найдется в результате подстановки функции $\psi(t)$ в уравнение аппроксимации:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= a\psi + b\psi^5 = a\Psi_m \cdot \sin \omega t + b\Psi_m^5 \cdot \sin^5 \omega t = \\ &= a\Psi_m \sin \omega t + b\Psi_m^5 \left(\frac{10}{16} \sin \omega t - \frac{5}{16} \sin 3\omega t + \frac{1}{16} \sin 5\omega t \right) = \\ &= I_{L1m} \sin \omega t - I_{L3m} \sin 3\omega t + I_{L5m} \sin 5\omega t \end{aligned}$$

Ток источника определяется по первому закону Кирхгофа, при этом сложение гармоник токов одинаковой частоты можно выполнять в комплексной форме:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) - I_{3m} \sin 3\omega t + I_{5m} \sin 5\omega t,$$

где $I_{1m} = I_{L1m} + jI_{R1m} = I_{1m} e^{j\alpha_1}$.

Анализ решения показывает, что намагничивающий ток катушки имеет несинусоидальную форму и содержит в своем составе только нечетные гармоники, при этом основная гармоника тока отстает от приложенного напряжения на угол $\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ - \alpha_1$.

Решение для искомой функции в виде суммы гармоник можно получить также методом гармонического баланса. Суть этого метода состоит в том, что ожидаемое решение для функции $f(t)$ представляется в виде суммы основной и нескольких высших гармоник:

$$f(t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + B_2 \sin 2\omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots,$$

где $B_1, C_1, B_2, C_2, \dots$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Затем амплитуды гармоник всех токов и напряжений выражаются через неизвестные коэффициенты. После этого балансируются коэффициенты для одинаковых гармоник в уравнениях Кирхгофа, составленных для расчетной схемы. В результате получается система алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами искомой функции, в результате решения которой определяются сами коэффициенты.

В качестве примера рассмотрим расчет режима в схеме рис. 87.

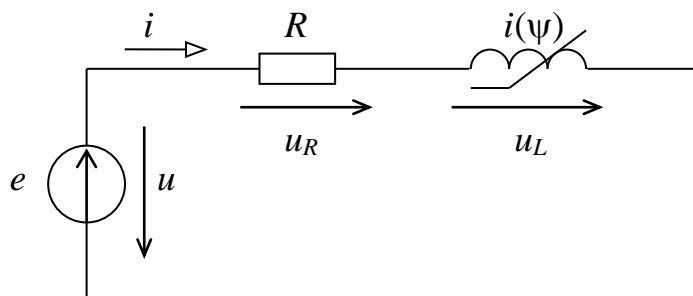


Рис. 87

Пусть к выводам схемы приложено синусоидальное напряжение $u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha) = U'_m \sin \omega t + U''_m \cos \omega t$, а вебер-амперная характеристика нелинейной катушки аппроксимирована уравнением $i(\psi) = a\psi + b\psi^3$.

Дифференциальное уравнение цепи будет иметь вид:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) = R \cdot i(t) + \frac{d\psi}{dt}.$$

В качестве неизвестной функции, подлежащей определению, принимаем потокосцепление $\psi(t)$, решение для которой будем искать в виде суммы 1-й и 3-й гармоник (четные гармоники в решении отсутствуют):

$$\psi(t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + B_3 \sin 3\omega t + C_3 \cos 3\omega t,$$

где B_1, C_1, B_3, C_3 – неизвестные коэффициенты.

Выражаем ток и напряжения на отдельных участках схемы через искомую функцию $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} i(t) &= a\psi(t) + b\psi(t)^3 = a(B_1 \sin \omega t + \dots) + b(B_1 \sin \omega t + \dots)^3 = \dots = \\ &= I'_{1m} \sin \omega t + I''_{1m} \cos \omega t + I'_{3m} \sin 3\omega t + I''_{3m} \cos 3\omega t, \end{aligned}$$

где амплитуды гармоник состоят в некоторой функциональной зависимости от неизвестных коэффициентов B_1, C_1, B_3, C_3 .

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = \dots = U'_{R1m} \sin \omega t + U''_{R1m} \cos \omega t + U'_{R3m} \sin 3\omega t + U''_{R3m} \cos 3\omega t.$$

$$u_L(t) = \frac{d\psi}{dt} = \dots = U'_{L1m} \sin \omega t + U''_{L1m} \cos \omega t + U'_{L3m} \sin 3\omega t + U''_{L3m} \cos 3\omega t.$$

Теперь составляется баланс коэффициентов для отдельных гармоник (уравнения гармонического баланса) в соответствии со 2-м законом Кирхгофа $u(t) = u_R(t) + u_L(t)$:

$$\begin{cases} U'_{R1m} + U'_{L1m} = U'_{1m}, \\ U''_{R1m} + U''_{L1m} = U''_{1m}, \\ U'_{R3m} + U'_{L3m} = 0, \\ U''_{R3m} + U''_{L3m} = 0. \end{cases}$$

В алгебраических уравнениях гармонического баланса отдельные слагаемые в левой части являются некоторыми функциями неизвестных ко-

эффициентов B_1, C_1, B_3, C_3 . Решение этой системы уравнений представляет зачастую большую математическую трудность.

В виду больших математических осложнений, возникающих при определении неизвестных коэффициентов, метод гармонического баланса оказывается мало эффективным и применяется редко.

3) Численный метод. Режим нелинейной цепи любой сложности может быть описан системой нелинейных дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. Как известно из математики, система дифференциальных уравнений (как линейных так и нелинейных) может быть решена методом численного интегрирования (методы Эйлера, Рунге-Кутта). Таким образом, режим любой нелинейной цепи может быть рассчитан методом численного интегрирования дифференциальных уравнений.

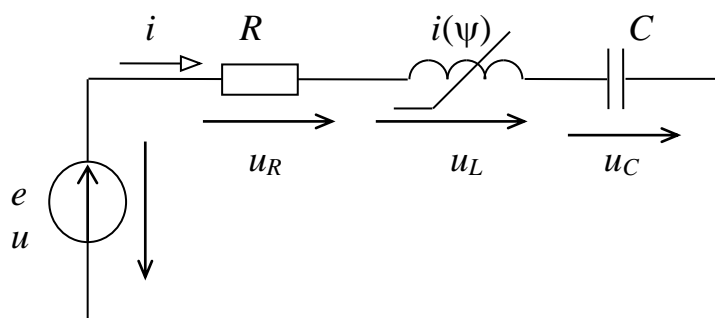


Рис. 88

Рассмотрим применение этого метода на примере расчета схемы рис. 89. Пусть на входе схемы источник синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t)$, а вебер-амперная характеристика нелинейной катушки аппроксимирована уравнением $i = a \cdot \text{sh}(b \cdot \psi)$.

Система дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Ома и Кирхгофа и дополненная нелинейным алгебраическим уравнением аппроксимации характеристики нелинейного элемента будет иметь вид:

$$\begin{cases} e = E_m \cdot \sin(\omega t) = u_R + u_L + u_C & (1) \\ u_R = i \cdot R & (2) \\ u_L = d\psi/dt & (3) \\ i = C \cdot (du_C/dt) & (4) \\ i = a \cdot \text{sh}(b \cdot \psi) & (5) \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений может быть выполнено методами численного интегрирования на ЭВМ (например, методом Эйлера). Суть метода состоит в том, что период переменного тока T разбивается на большое число шагов интегрирования, например $N = 1000$, дифференциалы переменных заменяются конечными приращениями ($d\psi \Rightarrow \Delta\psi$, $du \Rightarrow \Delta u$, $di \Rightarrow \Delta i$, $dt \Rightarrow \Delta t$), а производные переменных – отношением при-

ращений ($d\psi/dt \Rightarrow \Delta\psi/\Delta t$, $du/dt \Rightarrow \Delta u/\Delta t$). На каждом шаге производится решение системы уравнений и определяются значения переменных величин (токов, напряжений) и их производных, причем в качестве исходных данных принимают значения некоторых переменных на предыдущем шаге. В качестве таких функций принимают $u_C(t)$, $i_L(t)$, которые определяют запасы энергии в электрическом и магнитном поле, вследствие чего они не могут изменяться скачкообразно. Непосредственным результатом расчета будут являться массивы значений переменных величин (токов, напряжений) и их производных в заданном интервале времени (например, в течение периода T). В результате последующей обработки массивов данных могут быть определены действующие, средние, максимальные значения переменных, их гармонический состав и другие параметры функций.

Метод численного интегрирования (численный метод) обладает высокой точностью, так как в нем непосредственно используются физические характеристики нелинейных элементов. С появлением ЭВМ и расширением области их применения данный метод является основным при расчете нелинейных цепей как в установившемся, так и в переходном режиме.

Один из вариантов решения полученной системы уравнений методом численного интегрирования представлен ниже.

Исходные данные: параметры элементов схемы (E_m , f , R , C , a , b); начальные условия $u_C(0) = 0$, $\psi(0) = 0$.

Принимаем: N – число шагов интегрирования за период тока, $T = 1/f$ – период тока, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота, $h = \Delta t = T/N$ – шаг интегрирования.

Алгоритм решения системы уравнений для произвольного k -го шага:

$$\begin{aligned}
 & t_k = h \cdot k; \\
 \text{из (5)} & \quad i_k = a \cdot \text{sh}(b \cdot \psi_{(k-1)}); \\
 \text{из (2)} & \quad u_{Rk} = i_k \cdot R; \\
 \text{из (1)} & \quad u_{Lk} = E_m \cdot \sin(\omega t_k) - u_{Rk} - u_{Rok} - u_{C(k-1)}; \\
 \text{из (3)} & \quad (d\psi/dt)_k = u_{Lk}; \\
 \text{из (4)} & \quad (du_C/dt)_k = i_k / C; \\
 & \psi_k = \psi_{(k-1)} + h \cdot (d\psi/dt)_k; \\
 & u_{Ck} = u_{C(k-1)} + h \cdot (du_C/dt)_k.
 \end{aligned}$$

Примечание: при решении системы уравнений на 1-м шаге используются начальные условия $u_C(0) = 0$, $\psi(0) = 0$.

4) Расчет на ЭВМ по стандартной программе. Система нелинейных дифференциальных уравнений, составленная для схемы цепи по законам Кирхгофа и дополненная уравнениями аппроксимации физических характеристик нелинейных элементов, может быть решена численным методом на ЭВМ по стандартной программе. Применение данного метода показано ниже на конкретном примере.

а) Задана схема цепи (рис. 89) и параметры отдельных элементов в единицах измерения SI . Нелинейная вебер-амперная характеристика катушки индуктивности аппроксимирована уравнением $i = a \cdot \sinh(b \cdot \psi)$.

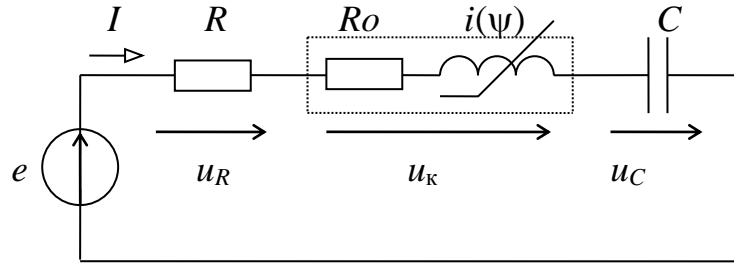


Рис. 89

$$\begin{aligned}
 \underline{R} &:= 40 & \underline{Ro} &:= 4 & \underline{C} &:= 45 \cdot 10^{-6} & j &:= \sqrt{-1} & a &:= .02 & b &:= 20 \\
 \underline{Em} &:= 150 & f &:= 50 & \omega &:= 2\pi f & \underline{T} &:= \frac{1}{f} & \alpha &:= 0deg \\
 \underline{e}(t) &:= Em \cdot \sin(\omega t + \alpha) & i &:= a \cdot \sinh(b \cdot \psi)
 \end{aligned}$$

б) Для схемы составляется система уравнений Кирхгофа в дифференциальной форме и дополняется уравнением аппроксимации ВБАХ. Система дифференциальных уравнений приводится к форме Коши.

$$\begin{aligned}
 i \cdot R + i \cdot Ro + \frac{d}{dt} \psi + uc &= e(t) & i &= \frac{d}{dt} uc & i &= a \cdot \sinh(b \cdot \psi) \\
 \frac{d}{dt} \psi &= -(R + Ro) \cdot (a \cdot \sinh(b \cdot \psi)) - uc + e(t) \\
 \frac{d}{dt} uc &= \frac{1}{C} \cdot (a \cdot \sinh(b \cdot \psi))
 \end{aligned}$$

в) Система дифференциальных уравнений решается численным методом по одной из стандартных программ MathCAD (*rkfixed* или *Rkadapt*). Массивы значений для искомых функций, получаемые в результате решения, методом линейной интерполяции превращают в соответствующие функции времени.

$$\underline{N} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, X) := \begin{bmatrix} -(R + Ro) \cdot (a \cdot \sinh(b \cdot X_0)) - X_1 + e(t) \\ \frac{1}{C} \cdot (a \cdot \sinh(b \cdot X_0)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{F} &:= rkfixed(\underline{N}, 0, 0.1, 5000, D) \\
 \underline{tn} &:= F^{(0)} & \underline{\psi n} &:= F^{(1)} & \underline{ucn} &:= F^{(2)} & \underline{in} &:= a \cdot \sinh(b \cdot \psi n) \\
 \psi(t) &:= linterp(\underline{tn}, \underline{\psi n}, t) & uc(t) &:= linterp(\underline{tn}, \underline{ucn}, t) \\
 i(t) &:= a \cdot \sinh(b \cdot \psi(t)) & ur(t) &:= i(t) \cdot R & uk(t) &:= e(t) - ur(t) - uc(t)
 \end{aligned}$$

г) Графические диаграммы функций напряжений

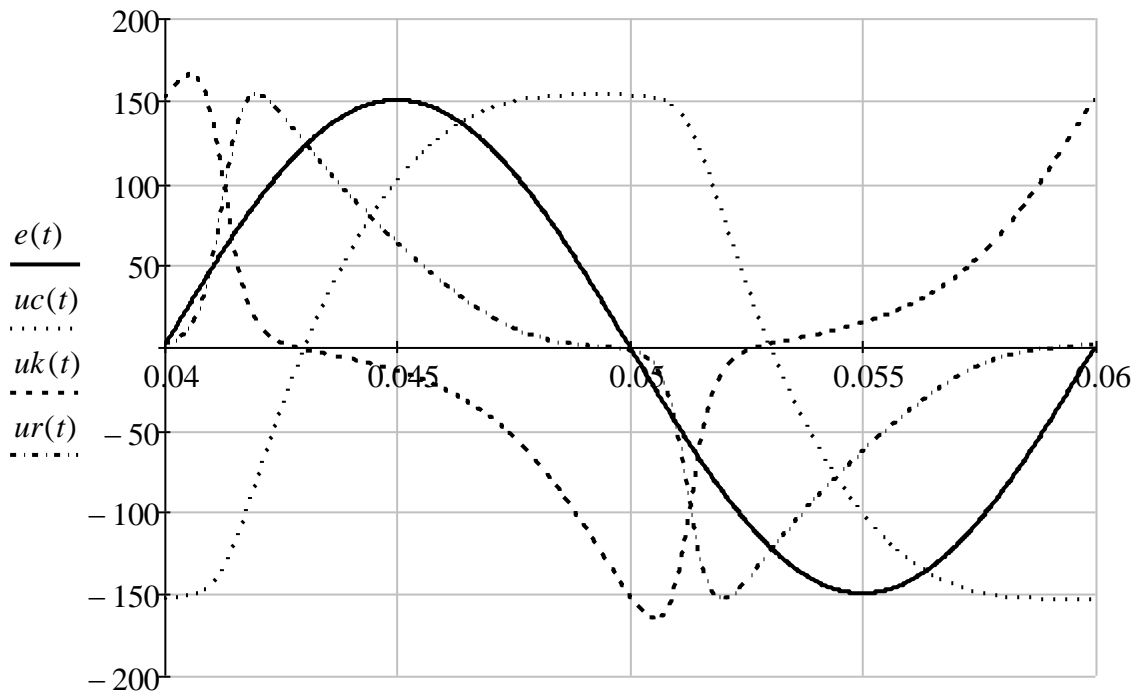


Рис. 90

д) Производится математическая обработка функций времени и определяются их интегральные параметры. Далее на примере функции $i(t)$ определяются:

1. Среднее и действующее значения:

$$I_s := \frac{1}{T} \cdot \int_{2T}^{3T} |i(t)| dt = 1.38 \quad I_d := \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{2T}^{3T} i(t)^2 dt} = 1.879$$

2. Комплексное действующее значение основной гармоники:

$$\underline{I}_1 := \frac{\sqrt{2}}{T} \cdot \left(\int_{2T}^{3T} i(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) dt + j \cdot \int_{2T}^{3T} i(t) \cdot \cos(\omega \cdot t) dt \right)$$

$$I_1 = 1.465 + 0.879j \quad |I_1| = 1.708 \quad \arg(I_1) = 30.964 \cdot \text{deg}$$

3. Действующее значения высших гармоник:

$$I_g := \sqrt{I_d^2 - (|I_1|)^2} = 0.783$$

4. Коэффициенты функции $i(t)$:

$$K_a := \frac{I_{max}}{I_d} = 2.043 \quad K_\phi := \frac{I_d}{I_s} = 1.362 \quad K_u := \frac{I_g}{|II|} = 0.458$$

5. Гармонический состав функции $i(t)$:

$$M := 9 \quad k := 1, 3.. M$$

$$Im_k := \frac{2}{T} \cdot \left(\int_{2T}^{3T} i(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) dt + j \cdot \int_{2T}^{3T} i(t) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) dt \right)$$

$$\overrightarrow{|Im_k|} =$$

2.416
0.933
0.488
0.275
0.163

$$arg(Im_k) =$$

30.964
-57.559
-104.261
-153.748
158.209

·deg

$$ir(t) := \sum_{k=1}^M (|Im_k| \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + arg(Im_k)))$$

10. Преобразователь частоты в 3 раза на нелинейных катушках

В нелинейных цепях переменного тока происходят искажения форм кривых напряжений и токов $u(t)$ и $i(t)$, в составе которых появляются высшие гармоники. Таким образом, нелинейные элементы выступают в роли преобразователей сигналов основной частоты в сигналы других частот. Если с помощью фильтров выделить из несинусоидальной функции определенную k -ую гармонику, то можно говорить о преобразователе сигнала в k раз.

На схеме рис. 91 представлен преобразователь частоты в 3 раза – утроитель частоты Спинелли. Схема утроителя состоит из трех одинаковых нелинейных катушек (трансформаторов). Первичные обмотки трансформаторов включаются в трехфазную сеть по схеме звезды без нулевого провода, а вторичные обмотки соединяются по схеме открытого треугольника, на выход которого подключается нагрузка. Магнитный режим трансформаторов выбирается так, чтобы получить большие искажения

форм кривых токов $i(t)$ и напряжений $u(t)$. Роль фильтра гармоник кратных трем выполняет схема открытого треугольника. Известно, что гармоники, образующие симметричные системы прямой и обратной последовательностей в треугольнике взаимно компенсируются, а гармоники кратные трем складываются арифметически. Следовательно, на выходе открытого треугольника будет иметь место утроенное значение напряжения всех гармоник, кратных трем (3-я, 9-я и т.д.).

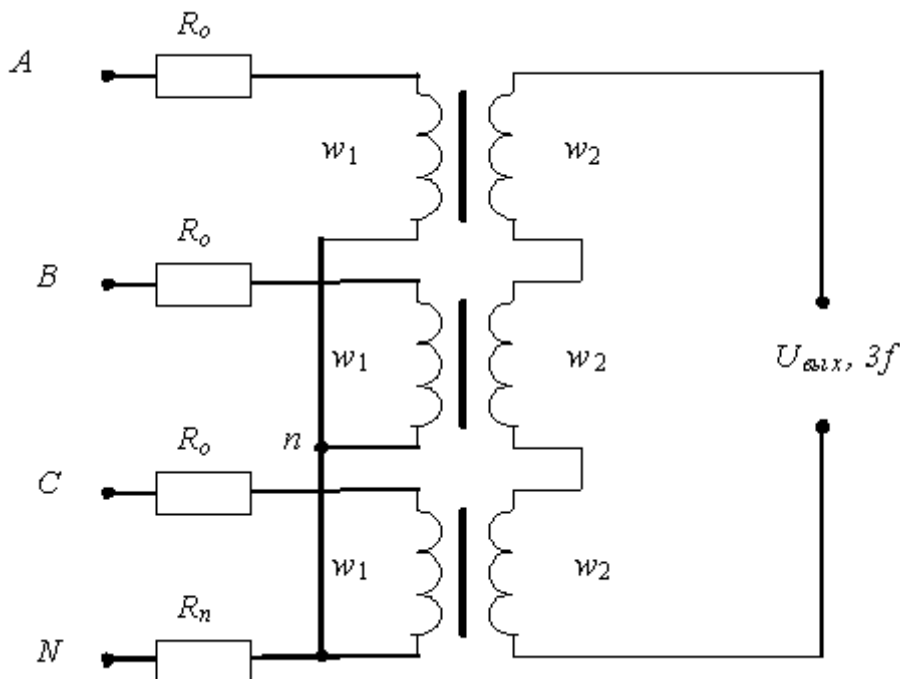


Рис. 91

Выполним расчет режима в схеме методом гармонического баланса.

Фазные токи в первичной цепи будут содержать в своем составе только нечетные гармоники, при этом в них будут отсутствовать высшие гармоники, кратные трем:

$$i_A = I_{1m} \sin \omega t + 0 + I_{5m} \sin 5\omega t + \dots$$

Такой режим перемагничивания приведет к появлению гармоник, кратных трем, в магнитных потоках стержней и, следовательно, в фазных напряжениях трансформаторов:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_A &= \Phi_{1m} \sin \omega t + \Phi_{3m} \sin 3\omega t + \Phi_{9m} \sin 9\omega t + \dots \\ u_A &= U_{1m} \sin \omega t + U_{3m} \sin 3\omega t + U_{9m} \sin 9\omega t + \dots \end{aligned}$$

Амплитуда основной гармоники в магнитных потоках связана с фазным напряжением сети уравнением трансформаторной ЭДС: $U_\phi = 4,44\omega f \Phi_{1m}$. Появление высших гармоник, кратных трем, в магнитных по-

тока и, соответственно, в фазных напряжениях обусловлено нелинейностью вебер-амперных характеристик магнитных цепей. Наличие высших гармоник, кратных трем, в фазных напряжениях не повлияет на форму линейных напряжений, которые равны разности фазных напряжений.

Выходное напряжение утроителя с учетом арифметического сложения в треугольнике гармоник, кратных трем, будет равно: $U_{\text{вых}} = 3\kappa_{ГЗ}U_{\phi} \cong \cong (1,0...1,4) U_{\phi}$.

Приближенный расчет режима утроителя частоты можно выполнить методом гармонического баланса. Однако гораздо проще и точнее эту задачу можно решить численным методом по стандартной программе в MathCAD. Ниже приведен конкретный пример такого решения.

1. Исходные данные

$$\begin{aligned} R_o &:= 5 & R_n &:= 1000 & a &:= 0.8 & b &:= 20 & \underline{m} &:= 5 & I &= a \cdot \Psi + b \cdot \Psi^m \\ U_m &:= 250 & f &:= 50 & \omega &:= 2 \cdot \pi \cdot f & U_a(t) &:= U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + 0) \\ U_b(t) &:= U_m \cdot \sin(\omega \cdot t - 120 \text{ deg}) & U_c(t) &:= U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + 120 \text{ deg}) \end{aligned}$$

2. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} I_a + I_b + I_c &= I_n & I_a \cdot R_o + \frac{d}{dt} \Psi_a + I_n \cdot R_o &= U_a(t) \\ I_a &= a \cdot \Psi_a + b \cdot \Psi_a^m & I_b \cdot R_o + \frac{d}{dt} \Psi_b + I_n \cdot R_o &= U_b(t) \\ I_b &= a \cdot \Psi_b + b \cdot \Psi_b^m & I_c \cdot R_o + \frac{d}{dt} \Psi_c + I_n \cdot R_o &= U_c(t) \\ I_c &= a \cdot \Psi_c + b \cdot \Psi_c^m \end{aligned}$$

3. Решение системы дифференциальных уравнений

$$\underline{F}(t, X) := \begin{bmatrix} -[a \cdot X_0 + b \cdot (X_0)^m] \cdot (R_o + R_n) - [a \cdot X_1 + b \cdot (X_1)^m] \cdot R_n - [a \cdot X_2 + b \cdot (X_2)^m] \cdot R_n + U_a(t) \\ -[a \cdot X_1 + b \cdot (X_1)^m] \cdot (R_o + R_n) - [a \cdot X_0 + b \cdot (X_0)^m] \cdot R_n - [a \cdot X_2 + b \cdot (X_2)^m] \cdot R_n + U_b(t) \\ -[a \cdot X_2 + b \cdot (X_2)^m] \cdot (R_o + R_n) - [a \cdot X_1 + b \cdot (X_1)^m] \cdot R_n - [a \cdot X_0 + b \cdot (X_0)^m] \cdot R_n + U_c(t) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{Rkadapt}(N, 0, 0.2, 10000, F)$$

$$U_n := (R_n) \cdot (I_a + I_b + I_c) \quad U_{an} := U_a(t) - U_n$$

$$U_{\hat{u}} \hat{\delta} := -(U_{an} + U_{bn} + U_{cn})$$

Ниже приведены графические диаграммы функций $u(t)$.

4. Графические диаграммы функций $U_{\text{вых}}(t), U_{an}(t), U_a(t)$

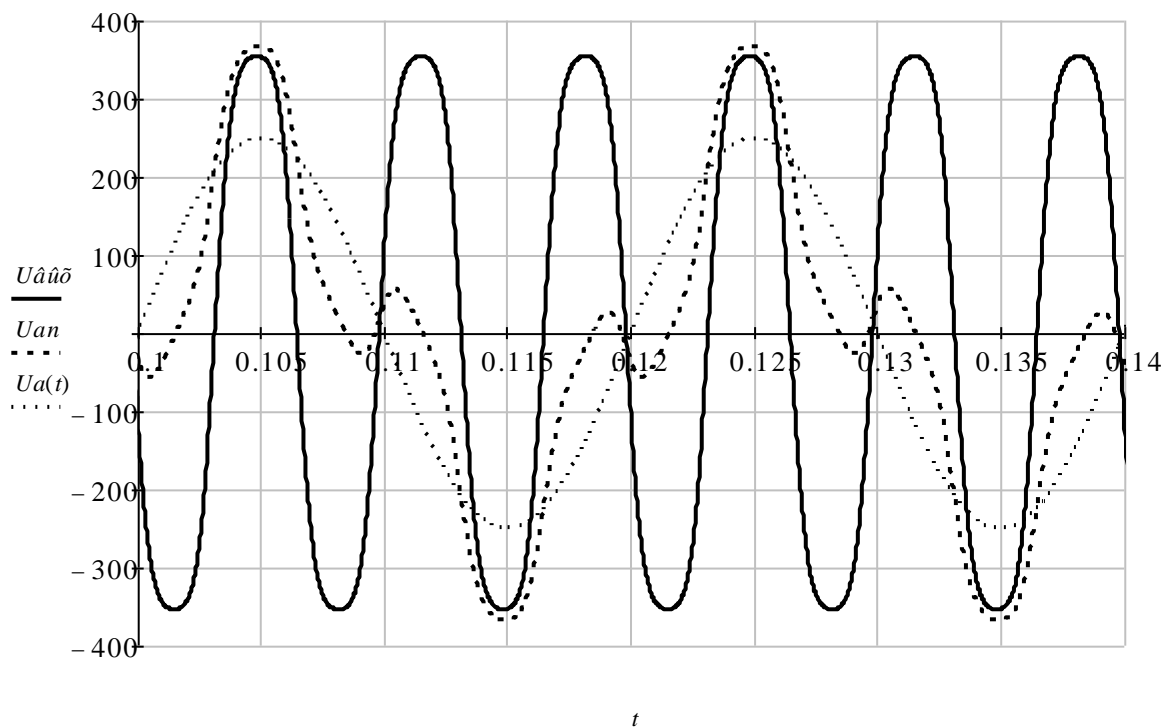


Рис. 92

11. Выпрямители с емкостным фильтром

Выпрямительные схемы различной конфигурации (выпрямители) широко применяются для преобразования переменного тока в постоянный. При работе на нагрузку, потребляющую небольшие токи от выпрямителя, часто используют фильтры, включающие конденсатор; в наиболее простом виде – это C -фильтры. Расчет выпрямителей с C -фильтром производят, как правило методом Терентьева. Этот метод расчета рекомендуется научными и учебными источниками, изучается в качестве отдельной главы в учебниках по электронике. Сущность метода состоит в том, что сглаженное напряжение на конденсаторе находится путем решения системы дифференциальных уравнений Кирхгофа по классической форме в виде суммы установившейся и свободной составляющих. Метод громоздок, требует больших объемов сложных математических вычислений, возможности метода ограничены.

Система нелинейных дифференциальных уравнений, составленная для схемы выпрямителя по законам Кирхгофа и дополненная уравнениями аппроксимации физических характеристик нелинейных элементов, может быть решена численным методом на ЭВМ по стандартной программе. Применение данного метода показано ниже на конкретном примере.

1. Задана схема цепи (рис. 93) и параметры отдельных элементов в единицах измерения SI . Нелинейная вольтамперная характеристика диода задана его сопротивлениями в прямом (R_{dp}) и обратном (R_{do}) направлении-

ях. Аппроксимация нелинейной ВАХ осуществляется посредством функции *if*.

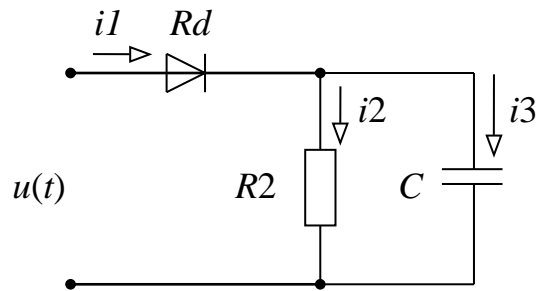


Рис. 93

$$R2 := 200 \quad Rdp := .2 \quad Rdo := 100000 \quad Rd = \text{if}(u(t) > uc, Rdp, Rdo)$$

$$C := 1000 \times 10^{-6} \quad Um := 100 \quad f := 50 \quad \omega := 2\pi f \quad u(t) := Um \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

2. Система дифференциальных уравнений и ее решение

$$i1 - i2 - i3 = 0 \quad i1 \cdot R1 + i1 \cdot Rd + uc = u(t) \quad -i2 \cdot R2 + uc = 0 \quad C \cdot \frac{duc}{dt} = i3$$

$$N := (0) \quad F(t, X) := \left(\frac{u(t) - X_0}{R1 + \text{if}(u(t) > X_0, Rdp, Rdo)} - \frac{X_0}{R2} \right) \cdot \frac{1}{C}$$

$$Z := \text{rkfixed}(N, 0, 0.1, 5000, F)$$

$$tn := Z^{(0)} \quad ucn := Z^{(1)} \quad uc(t) := \text{linterp}(tn, ucn, t)$$

3. Строится графическая диаграмма функции выходного напряжения $uc(t)$ (рис. 94).

4. Определяются интегральные параметры выходного напряжения:

а) среднее значение (постоянная составляющая):

$$Uco := \frac{1}{T} \cdot \int_{2T}^{3T} uc(t) dt = 82.268$$

б) действующее значение:

$$Ucd := \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{2T}^{3T} uc(t)^2 dt} = 82.928$$

в) действующее значение высших гармоник:

$$Ucg := \sqrt{Ucd^2 - Uco^2} = 10.441$$

г) коэффициент пульсаций:

$$Kp := \frac{Ucg}{Uco} = 0.127$$

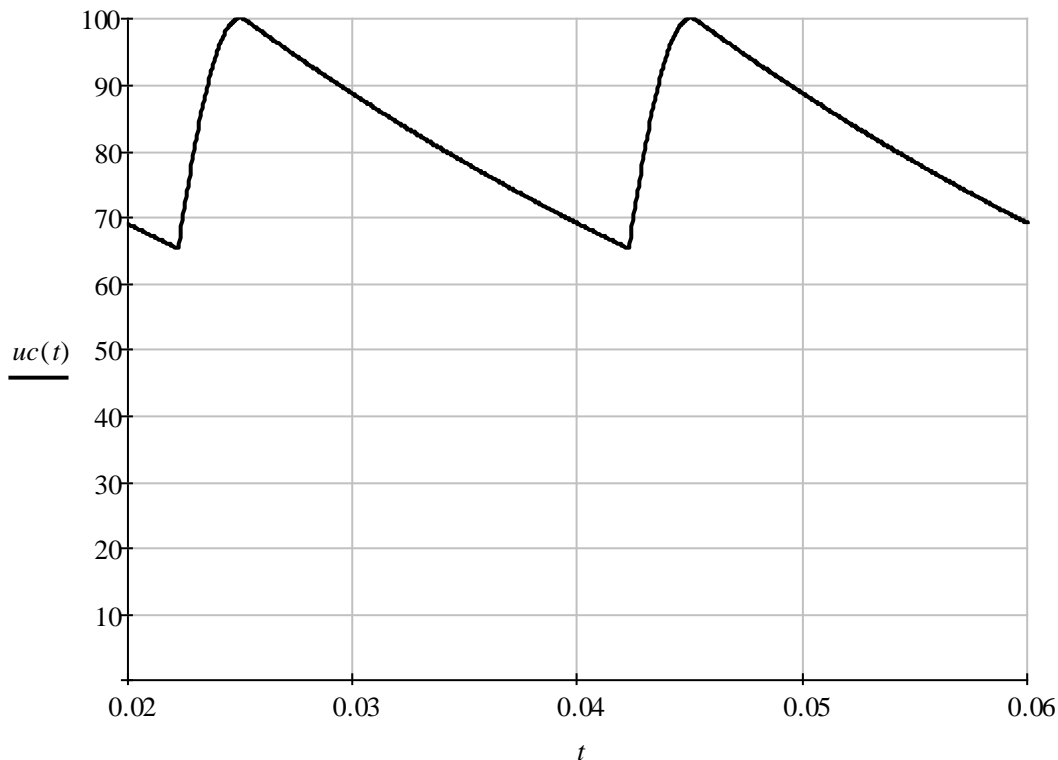


Рис. 94

Сравнение двух методов наглядно показывает преимущество последнего. К достоинствам численного метода следует отнести следующее.

1) Сравнительно невысокая трудоемкость метода, так как все расчеты выполняются ЭВМ по встроенным программам MathCAD.

2) Универсальность метода. Метод пригоден для расчета любых схем выпрямления с разными данными.

3) Высокая точность вычислений, которая обеспечивается методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

4) Метод позволяют проводить анализ работы схемы как в переходном, так и в установившемся режимах при изменении параметров отдельных элементов.

В заключение следует отметить, что применение предлагаемого численного метода расчета выпрямителей стало возможным благодаря современным достижениям в области компьютерных технологий.

Т4. Переходные процессы в нелинейных цепях

1. Общая характеристика переходных процессов в нелинейных цепях

Переходные процессы в нелинейных цепях описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях

сводится, таким образом, к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений. Значительные трудности, возникающие при таких расчетах, обусловлены сложностью решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Для расчета переходных процессов в нелинейных цепях нельзя указать общие методы, применимые для любого класса цепей. Выбор метода расчета всегда индивидуален и определяется конкретными условиями задачи: структурой схемы цепи, видом уравнения аппроксимации нелинейной характеристики, требованиями к форме искомой функции и др. Ниже перечислены наиболее важные методы, которые применяются для расчета переходных процессов в нелинейных цепях:

1) метод интегрируемой аппроксимации характеристики нелинейного элемента;

2) метод кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента;

3) метод условной линеаризации нелинейного дифференциального уравнения;

4) метод численного интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений;

5) метод численного интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений на ЭВМ по стандартной программе.

Переходные процессы в нелинейных цепях могут существенно отличаться от переходных процессов в аналогичных по структуре линейных цепях. Нелинейность характеристики какого-либо элемента цепи может привести или только к чисто количественному изменению переходного процесса или к его качественным изменениям.

В первом случае на некоторых отрезках времени скорость переходного процесса увеличивается, а на других отрезках времени – замедляется. На рис. 95 показаны для сравнения две графические диаграммы тока $i(t)$ в линейной и нелинейной цепи R, L при ее включении на постоянное напряжение, а на рис. 96 – аналогичные графические диаграммы для цепи R, L, C . Видны количественные различия двух функций.

Во втором случае в цепи возникают качественно новые явления, принципиально невозможные в линейных цепях, например, незатухающие автоколебания с произвольной постоянной или плавающей частотой.

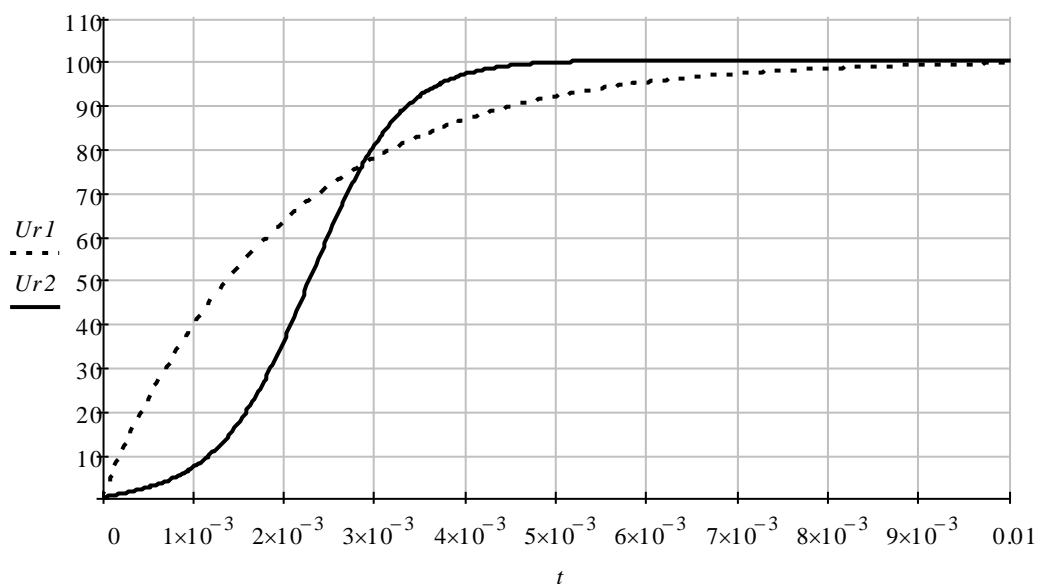


Рис. 95

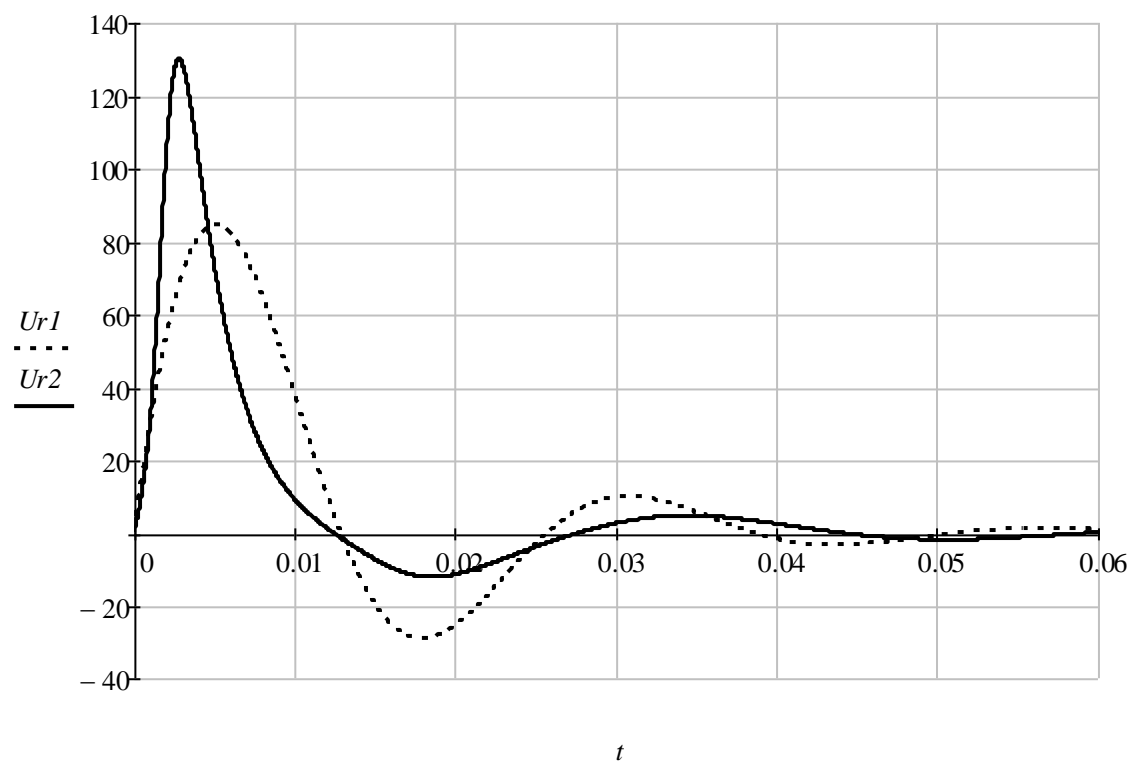


Рис. 96

2. Расчет переходного процесса методом интегрируемой аппроксимации

Метод основан на аппроксимации характеристики нелинейного элемента такой функцией, которая позволяет проинтегрировать дифференциальное уравнение цепи стандартным методом.

Ценность метода заключается в том, что в результате интегрирования, решение для искомой функции получается в общем виде, что позволяет исследовать влияние на искомую функцию различных факторов. Метод

применим главным образом к простым электрическим цепям, процессы в которых описываются дифференциальным уравнением 1-го порядка.

Рассмотрим применение данного метода к расчету переходного процесса при включении нелинейной катушки $i(\psi)$ к источнику постоянной ЭДС E (рис. 97). Вебер-амперную характеристику нелинейной катушки аппроксимируем уравнением $i = k \cdot \psi^2$. Дифференциальное уравнение цепи составляется по 2-му закону Кирхгофа: $iR + \frac{d\psi}{dt} = E$, откуда следует:

$$dt = \frac{d\psi}{E - iR} = \frac{d\psi}{E - R \cdot k\psi^2} = \frac{1}{kR} \cdot \frac{dx}{a^2 - x^2},$$

где обозначены $x = \psi$, $a = \sqrt{\frac{E}{kR}}$.

По таблице интегралов находим решение:

$$t = \frac{1}{kR} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{kR} \cdot \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

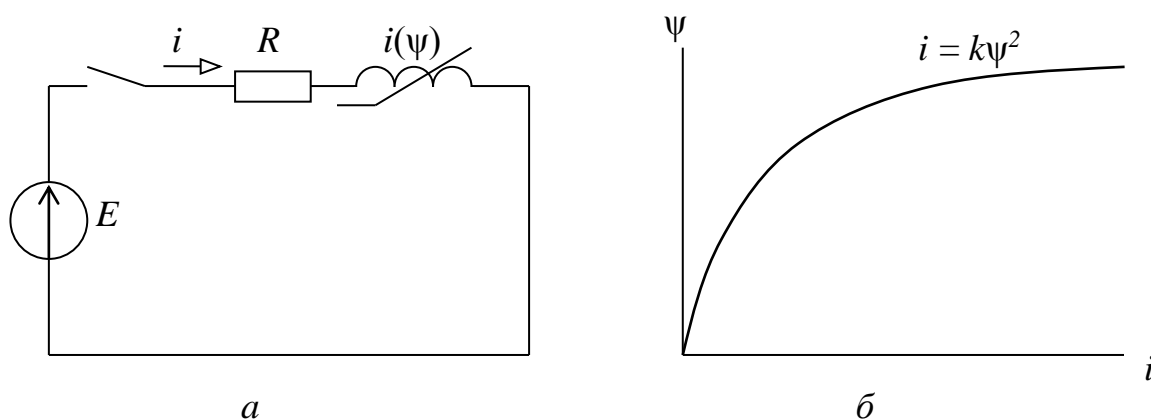


Рис. 97

Настоящая задача имеет аналитическое решение при аппроксимации нелинейной характеристики некоторыми другими уравнениями, например $i = k\psi^3$, $i = k\psi^4$.

3. Расчет переходного процесса методом кусочно-линейной аппроксимации

Метод основан на аппроксимации характеристики нелинейного элемента отрезками прямой. При такой аппроксимации дифференциальные уравнения цепи на отдельных участках будут линейными и могут быть

решены известными методами (классическим или операторным). При переходе от одного участка к другому в дифференциальных уравнениях будут скачком изменяться постоянные коэффициенты, что повлечет скачкообразное изменение коэффициентов в их решении. Решения для отдельных участков сопрягаются между собой на стыках участков на основе законов коммутации.

Рассмотрим применение данного метода к расчету переходного процесса при включении нелинейной катушки к источнику постоянной ЭДС E (рис. 97, а). Нелинейную вебер-амперную характеристику катушки $\psi(i)$ заменим отрезками прямой линии (ломаной линией 0-1-2-3) (рис. 98):

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1}, \quad L_2 = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{I_2 - I_1}, \quad L_3 = \frac{\Psi_3 - \Psi_2}{I_3 - I_2}.$$

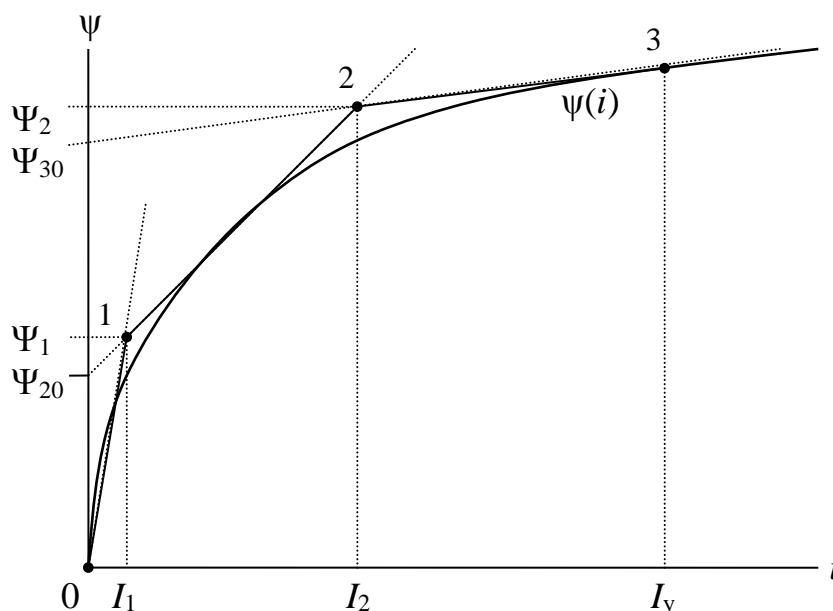


Рис. 98

Аппроксимируем отдельные отрезки ломаной линии уравнениями прямой:

- 1) для отрезка 0-1 $\psi_1 = L_1 \cdot i_1$, где $0 \leq i_1 \leq I_1$;
- 2) для отрезка 1-2 $\psi_2 = \Psi_{20} + L_2 \cdot i_2$, где $I_1 \leq i_2 \leq I_2$;
- 3) для отрезка 2-3 $\psi_3 = \Psi_{30} + L_3 \cdot i_3$, где $I_2 \leq i_3 \leq I_3$.

Коэффициенты аппроксимации Ψ_{20} , Ψ_{30} определяются из графической диаграммы, а коэффициенты L_1 , L_2 , L_3 – через координаты точек стыка отрезков (0,1, 2, 3):

Дифференциальные уравнения для отдельных участков будут иметь вид:

$$L_1 \frac{di}{dt} + Ri = E, \text{ где } 0 \leq i \leq I_1, 0 \leq t \leq t_1,$$

$$L_2 \frac{di}{dt} + Ri = E, \text{ где } I_1 \leq i \leq I_2, t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$L_3 \frac{di}{dt} + Ri = E, \text{ где } I_2 \leq i \leq I_y, t_2 \leq t \leq \infty$$

Решения уравнений для отдельных участков, найденные классическим методом, будут отличаться только постоянными коэффициентами:

$$1) i_1 = I_y + A_1 e^{p_1 t}, \quad 2) i_2 = I_y + A_2 e^{p_2(t-t_1)}, \quad 3) i_3 = I_y + A_3 e^{p_3(t-t_2)},$$

$$\text{где } I_y = \frac{E}{R}, \quad p_1 = -\frac{R}{L_1}, \quad p_2 = -\frac{R}{L_2}, \quad p_3 = -\frac{R}{L_3}.$$

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий и законов коммутации:

- 1) при $t = 0$, $i_1(0) = 0$, из решения (1) следует $A_1 = -I_y$,
- 2) при $t = t_1$, $i_2(t_1) = I_1$, из решения (2) следует $A_2 = I_1 - I_y$,
- 3) при $t = t_2$, $i_3(t_2) = I_2$, из решения (3) следует $A_3 = I_2 - I_y$.

Моменты времени t_1 , t_2 , соответствующие переходу процесса с одного участка характеристики на другой, определяются из совместного решения уравнений для смежных участков в точке стыка:

- 1) для точки 1: $i(t_1) = I_y + A_1 e^{p_1 t_1} = I_y + A_2$, откуда следует

$$t_1 = \frac{1}{p_1} \ln \frac{A_2}{A_1},$$

- 2) для точки 2: $i(t_2) = I_y + A_2 e^{p_2(t_2-t_1)} = I_y + A_3$, откуда следует

$$t_2 = \frac{1}{p_2} \ln \frac{A_3}{A_2} - t_1.$$

Графическая диаграмма переходного процесса показана на рис. 99. Наличие изломов на графической диаграмме искомой функции $i(t)$ объясняется погрешностями аппроксимации характеристики нелинейного элемента возле точек стыка отдельных участков. Достоинство данного метода состоит в том, что он позволяет применить к расчету переходных процессов в нелинейных цепях известные методы расчета переходных процессов в линейных цепях.

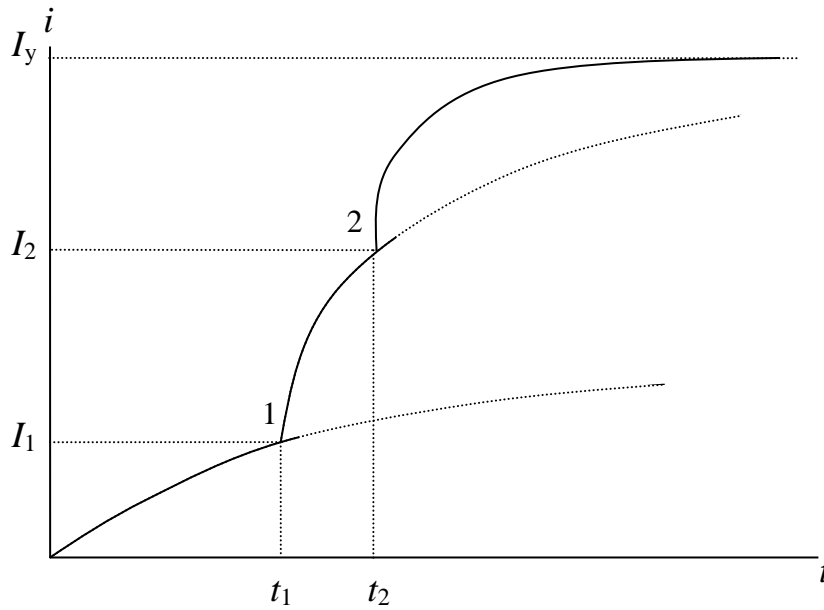


Рис. 99

4. Расчет переходного процесса методом линеаризации дифференциального уравнения

Сущность данного метода заключается в том, что в нелинейном дифференциальном уравнении, описывающем переходной процесс, пренебрегают нелинейностью второстепенных членов этого уравнения, при этом функциональные коэффициенты в этих членах заменяются постоянными. После такой замены нелинейное дифференциальное уравнение превращается в линейное и решается известными методами (классическим или операторным).

Рассмотрим применение данного метода на примере расчета переходного тока в трансформаторе при его включении на холостом ходу к источнику синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ (рис. 245, а).

Дифференциальное уравнение цепи имеет вид:

$$iR + \frac{d\psi}{dt} = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$

Так как активное сопротивление R обмотки трансформатора незначительно, то $\frac{d\psi}{dt} \gg iR$ и второе слагаемое iR можно считать второстепенным членом этого уравнения.

Выразим $i = \frac{\psi}{L}$, где $L = f(i, \psi)$ – функциональный коэффициент, тогда дифференциальное уравнение цепи получит вид:

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{R}{L}\psi = U_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Заменим функциональный коэффициент $L = f(i, \psi)$ в последнем уравнении некоторым постоянным значением $L = L_{\text{ст}} = \text{const}$, после чего дифференциальное уравнение цепи становится линейным относительно переменной ψ . Решение этого уравнения может быть получено классическим методом:

$$\psi(t) = \psi_y + \psi_c = \Psi_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L_{\text{ст}}}t},$$

где $\Psi_m = \frac{U_m L_{\text{ст}}}{\sqrt{R^2 + (\omega L_{\text{ст}})^2}}$, $\varphi = \arctg \frac{\omega L_{\text{ст}}}{R}$.

В момент включения трансформатора $\psi(0) = 0$ и, следовательно, постоянная интегрирования будет равна $A = -\Psi_m \sin(\alpha - \varphi)$. Таким образом амплитуда свободной составляющей A зависит от начальной фазы напряжения источника. При $\alpha - \varphi = \pm 90^\circ$ она имеет максимальные значения, переходной процесс при этом протекает с максимальной интенсивностью. Пусть $\alpha - \varphi = -90^\circ$, тогда $A = \Psi_m$ и решение для функции $\psi(t)$ получит вид:

$$\psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t - 90^\circ) + \Psi_m e^{-\frac{R}{L_{\text{ст}}}t}.$$

Графическая диаграмма расчетной функции $\psi(t)$ показана на рис. 100, а.

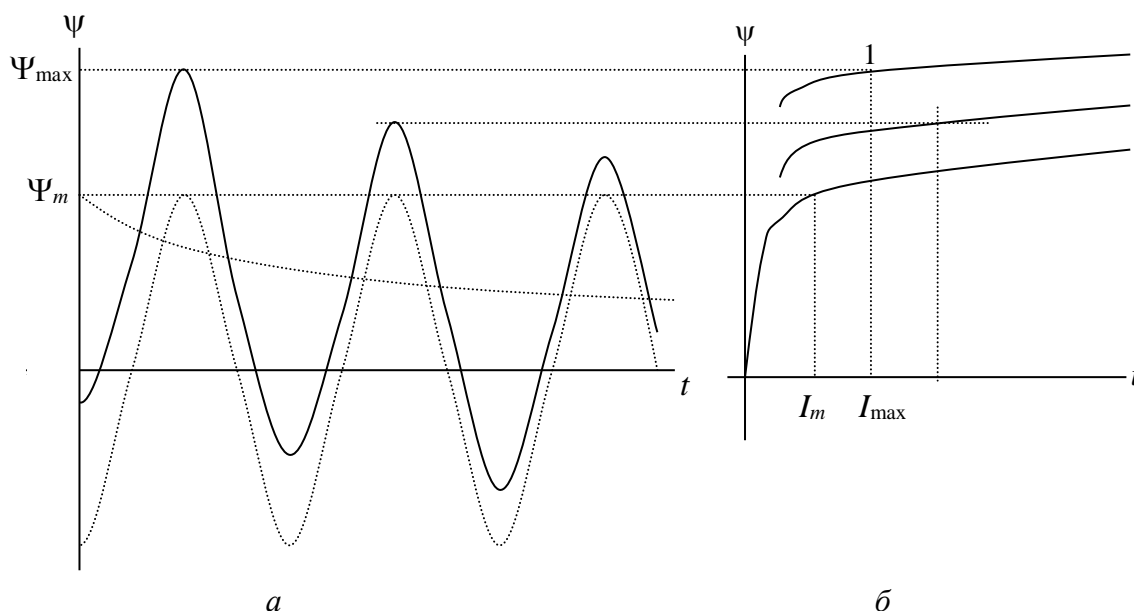


Рис. 100

Графическую диаграмму искомой функции $i(t)$ можно построить методом проекции расчетной функции $\psi(t)$ на вебер-амперную характеристику $i(\psi)$ (рис. 100, а, б). Эта диаграмма представлена на рис. 101:

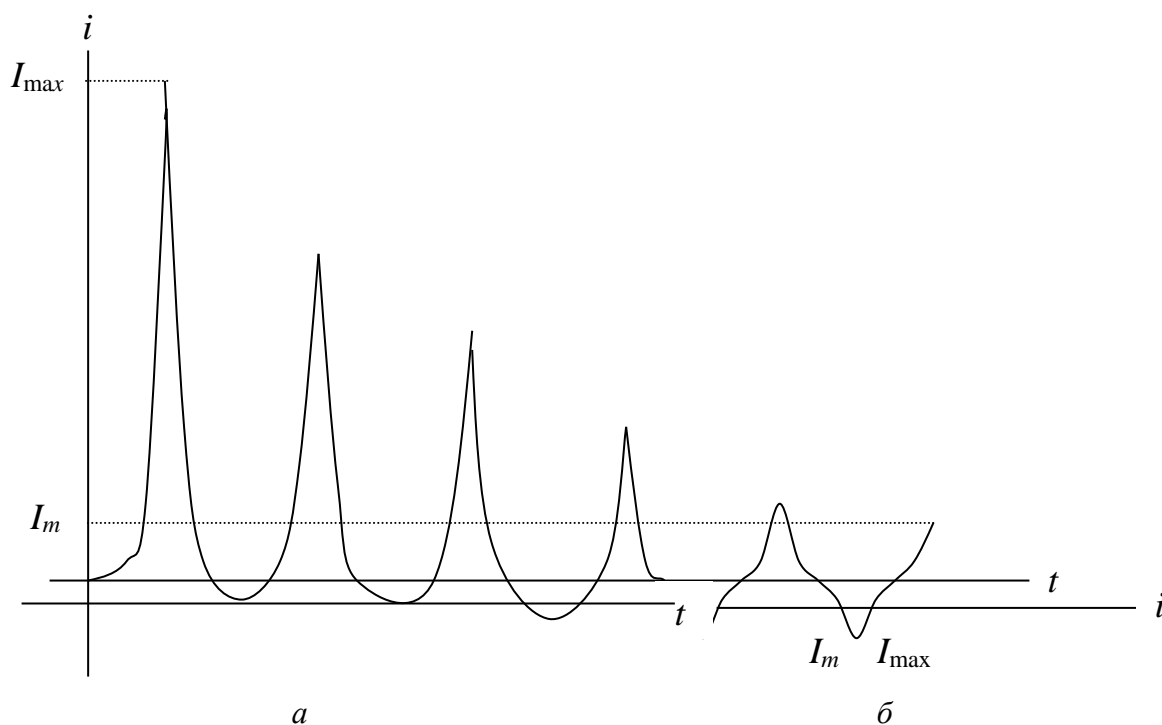


Рис. 101

Как показывает анализ полученного решения, амплитуда первой волны потокосцепления практически равна удвоенному номинальному значению: $\Psi_{\max} \approx 2\Psi_m$. Эта точка 1 на вебер-амперной характеристике $i(\psi)$ находится далеко в области насыщения и ей соответствует ток I_{\max} , значительно превышающий амплитуду тока установившегося режима ($I_{\max} \approx (100 \dots 200)I_m$), что примерно в 10 раз больше амплитуды номинального тока. Такой импульс пускового тока совершенно не опасен для динамической или термической устойчивости трансформатора, однако он может вызвать ложное срабатывание его релейной защиты. По этой причине мощные силовые трансформаторы запрещается включать в сеть в режиме холостого хода. При включении в сеть нагруженного трансформатора переходной процесс быстро затухает, при этом амплитуда импульса пускового тока незначительна.

5. Расчет переходного процесса методом численного интегрирования дифференциального уравнения

Режим нелинейной цепи любой сложности может быть описан системой нелинейных дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. Как известно из математики, система дифференциальных уравнений (как линейных, так и нелинейных) может быть решена методом численного интегрирования (методы Эйлера, Рунге-Кутты). Таким образом, режим любой нелинейной цепи может быть рассчитан методом численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Рассмотрим применение этого метода на примере расчета схемы рис. 102.

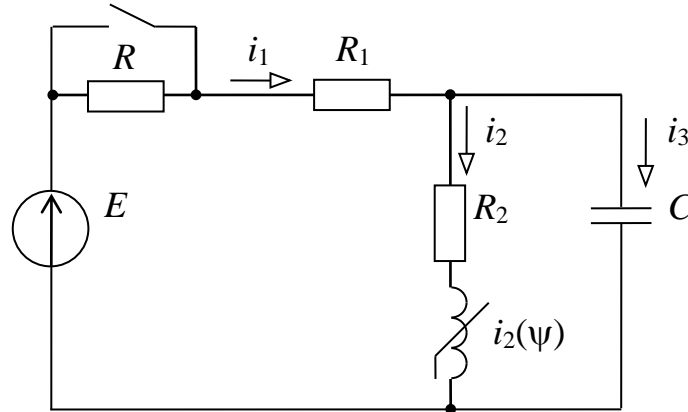


Рис. 102

Пусть на входе схемы источник постоянной ЭДС E_m , а веберамперная характеристика нелинейной катушки аппроксимирована уравнением $i = a \cdot \text{sh}(b \cdot \psi)$. Система дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Ома и Кирхгофа и дополненная нелинейным алгебраическим уравнением аппроксимации характеристики нелинейного элемента, будет иметь вид:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 & (1) \\ i_1 R_1 + u_C = E & (2) \\ i_2 R_2 + d\psi/dt - u_C = 0 & (3) \\ i_3 = C \cdot (du_C/dt) & (4) \\ i_2 = a \cdot \text{sh}(b \cdot \psi) & (5) \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений может быть выполнено методами численного интегрирования на ЭВМ (например, методом Эйлера). Суть метода состоит в том, что период переменного тока T разбивается на большое число шагов интегрирования, например $N = 1000$, дифференциалы переменных заменяются конечными приращениями ($d\psi \Rightarrow \Delta\psi$, $du \Rightarrow \Delta u$, $di \Rightarrow \Delta i$, $dt \Rightarrow \Delta t$), а производные переменных – отношением приращений ($d\psi/dt \Rightarrow \Delta\psi/\Delta t$, $du/dt \Rightarrow \Delta u/\Delta t$). На каждом шаге производится решение системы уравнений и определяются значения переменных величин (токов, напряжений) и их производных, причем в качестве исходных данных принимают значения некоторых переменных на предыдущем шаге. В качестве таких функций принимают $u_C(t)$, $i_L(t)$, которые определяют запасы энергии в электрическом и магнитном поле, вследствие чего они не могут изменяться скачкообразно. Непосредственным результатом расчета будут являться массивы значений переменных величин (токов, напряжений) и их производных в заданном интервале времени (например, в течение времени переходного процесса T_n). В результате последующей обработки массивов данных могут быть определены все параметры функций.

Один из вариантов решения полученной системы уравнений методом численного интегрирования представлен ниже.

Исходные данные: параметры элементов схемы (E, R_1, R_2, C, a, b); начальные условия $u_C(0) = 0, \psi(0) = 0$.

Принимаем: N – число шагов интегрирования, T – расчетное время переходного процесса, $h = \Delta t = T/N$ – шаг интегрирования.

Алгоритм решения системы для произвольного k -го шага:

$$\begin{aligned}
 & t_k = h \cdot k; \\
 \text{из (5)} & \quad i_{2k} = a \cdot \text{sh}(b \cdot \psi_{(k-1)}); \\
 \text{из (2)} & \quad i_{1k} = (E - u_{C(k-1)}) / R_1; \\
 \text{из (1)} & \quad i_{3k} = i_{1k} - i_{2k}; \\
 \text{из (3)} & \quad (d\psi/dt)_k = u_{C(k-1)} - i_{2k} R_2; \\
 \text{из (4)} & \quad (du_C/dt)_k = i_{3k} / C; \\
 & \quad \psi_k = \psi_{(k-1)} + h \cdot (d\psi/dt)_k; \\
 & \quad u_{Ck} = u_{C(k-1)} + h \cdot (du_C/dt)_k.
 \end{aligned}$$

Метод численного интегрирования (численный метод) обладает высокой точностью, так как в нем непосредственно используются физические характеристики нелинейных элементов. С появлением ЭВМ и расширением области их применения данный метод является основным при расчете нелинейных цепей как в переходном, так и в установившемся режиме.

6. Расчет переходного процесса на ЭВМ по стандартной программе

Система нелинейных дифференциальных уравнений, составленная для схемы цепи по законам Кирхгофа и дополненная уравнениями аппроксимации физических характеристик нелинейных элементов, может быть решена численным методом на ЭВМ по стандартной программе. Применение данного метода показано ниже на конкретном примере.

а) Задана схема цепи (рис. 103) и параметры отдельных элементов в единицах измерения SI . Нелинейная вебер-амперная характеристика катушки индуктивности аппроксимирована уравнением $i = a \cdot \sinh(b \cdot \psi)$.

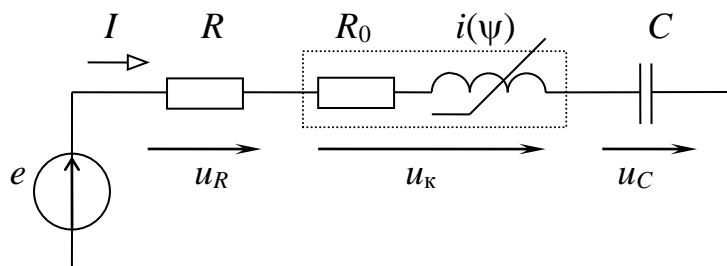


Рис. 103

$$\begin{aligned}
 \underline{R} & := 40 & R_0 & := 4 & \underline{C} & := 45 \cdot 10^{-6} & j & := \sqrt{-1} & a & := .02 & b & := 20 \\
 E_m & := 150 & f & := 50 & \omega & := 2\pi f & \underline{T} & := \frac{1}{f} & \alpha & := 0 \text{deg} \\
 \underline{e}(t) & := E_m \cdot \sin(\omega t + \alpha) & i & := a \cdot \sinh(b \cdot \psi)
 \end{aligned}$$

б) Для схемы составляется система уравнений Кирхгофа в дифференциальной форме и дополняется уравнением аппроксимации ВБАХ. Система дифференциальных уравнений приводится к форме Коши.

$$i \cdot R + i \cdot R_o + \frac{d}{dt} \psi + uc = e(t) \quad i = \frac{d}{dt} uc \quad i = a \cdot \sinh(b \cdot \psi)$$

$$\frac{d}{dt} \psi = -(R + R_o) \cdot (a \cdot \sinh(b \cdot \psi)) - uc + e(t)$$

$$\frac{d}{dt} uc = \frac{1}{C} \cdot (a \cdot \sinh(b \cdot \psi))$$

в) Система дифференциальных уравнений решается численным методом по одной из стандартных программ MathCAD (*rkfixed* или *Rkadapt*). Массивы значений для искомым функций, получаемые в результате решения, методом линейной интерполяции превращают в соответствующие функции времени.

$$\underline{N} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, X) := \begin{bmatrix} -(R + R_o) \cdot (a \cdot \sinh(b \cdot X_0)) - X_1 + e(t) \\ \frac{1}{C} \cdot (a \cdot \sinh(b \cdot X_0)) \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} := rkfixed(N, 0, 0.1, 5000, D)$$

$$tn := F^{(0)} \quad \psi n := F^{(1)} \quad uc n := F^{(2)} \quad \underline{in} := a \cdot \sinh(b \cdot \psi n)$$

$$\psi(t) := linterp(tn, \psi n, t) \quad uc(t) := linterp(tn, uc n, t)$$

$$i(t) := a \cdot \sinh(b \cdot \psi(t)) \quad ur(t) := i(t) \cdot R \quad uk(t) := e(t) - ur(t) - uc(t)$$

г) Производится математическая обработка результатов расчета. Строится графическая диаграмма функции тока $i(t)$, определяются параметры переходного процесса (рис. 104).

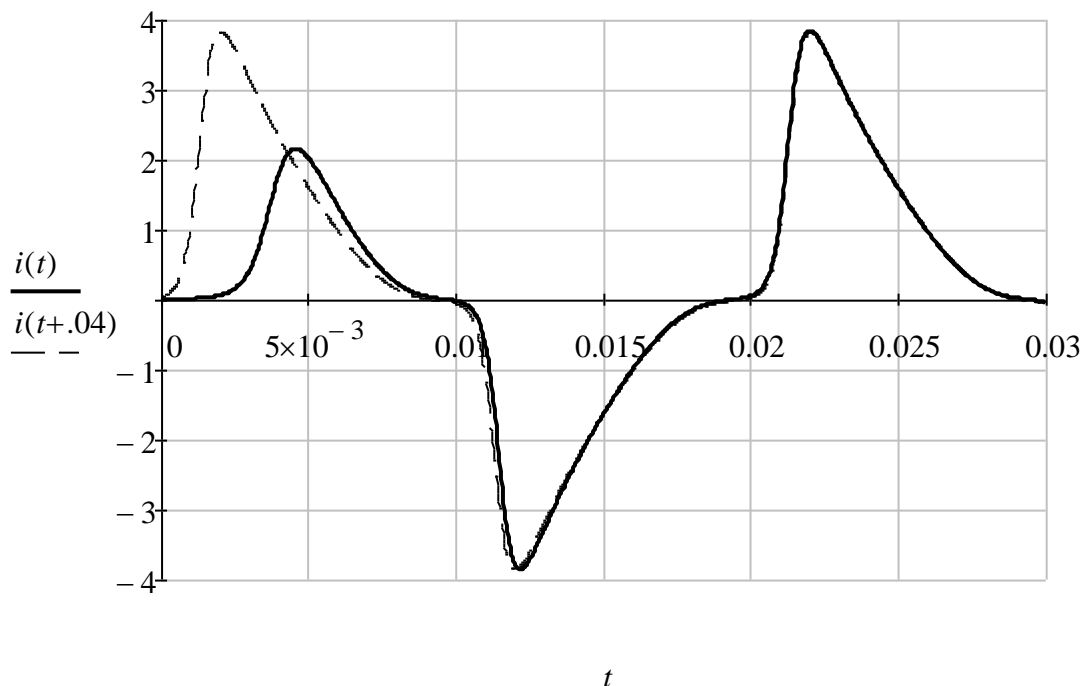


Рис. 104

К достоинствам численного метода следует отнести следующее:

1) Сравнительно невысокая трудоемкость метода, так как все расчеты выполняются ЭВМ по встроенным программам MathCAD.

2) Универсальность метода. Метод пригоден для расчета любых нелинейных цепей с разными данными.

3) Высокая точность вычислений, которая обеспечивается методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

4) Метод позволяют проводить анализ работы схемы как в переходном, так и в установившемся режимах при изменении параметров отдельных элементов.

7. Расчет переходного процесса в трансформаторе при его включении в режиме холостого хода

Ниже приведен конкретный пример расчета переходного процесса в трансформаторе при его включении в режиме холостого хода на ЭВМ по стандартной программе. В качестве расчетной схемы принята стандартная схема замещения трансформатора.

а) Заданы схема замещения трансформатора (рис. 105) и параметры элементов

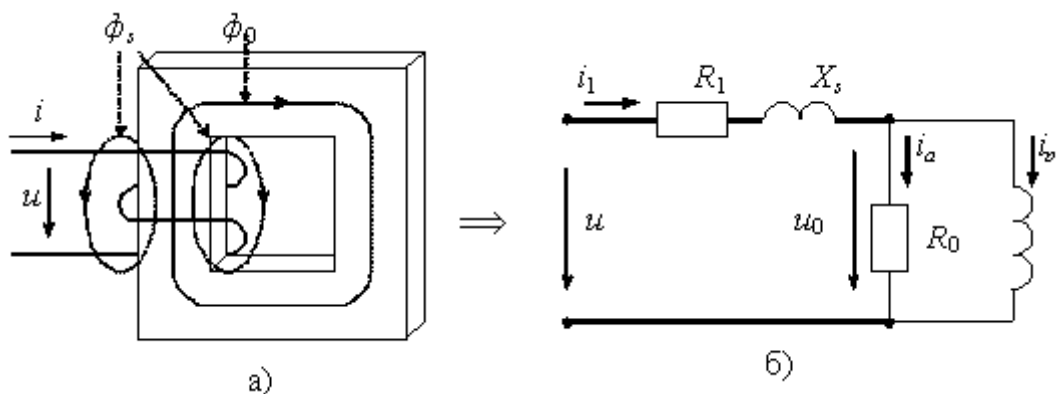


Рис. 105

$$R1 := .3 \quad Ro := 5000 \quad Ll := 0.01 \quad a := .1 \quad b := 20 \quad m := 9$$

$$Em := 250 \quad f := 50 \quad \alpha := 10deg \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad e(t) := Em \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

б) Система дифференциальных уравнений и ее решение

$$i1 - ia - ip = 0 \quad R1 \cdot i1 + Ll \cdot \frac{d}{dt} i1 + ia \cdot Ro = e(t)$$

$$ia \cdot Ro = \frac{d}{dt} \psi \quad ip = a \cdot \psi + b \cdot \psi^m$$

$$N := \begin{pmatrix} 0 \\ .2 \end{pmatrix} \quad F(t, X) := \begin{bmatrix} \frac{-(R1 + Ro)}{Ll} \cdot X_0 + \frac{Ro}{Ll} \cdot [a \cdot X_1 + b \cdot (X_1)^m] + \frac{1}{Ll} \cdot e(t) \\ Ro \cdot X_0 - Ro \cdot [a \cdot X_1 + b \cdot (X_1)^m] \end{bmatrix}$$

$$Z := Rkadapt(N, 0, 2, 100000, F)$$

$$tn := Z^{(0)} \quad in := Z^{(1)} \quad \psi n := Z^{(2)} \quad i(t) := linterp(tn, in, t)$$

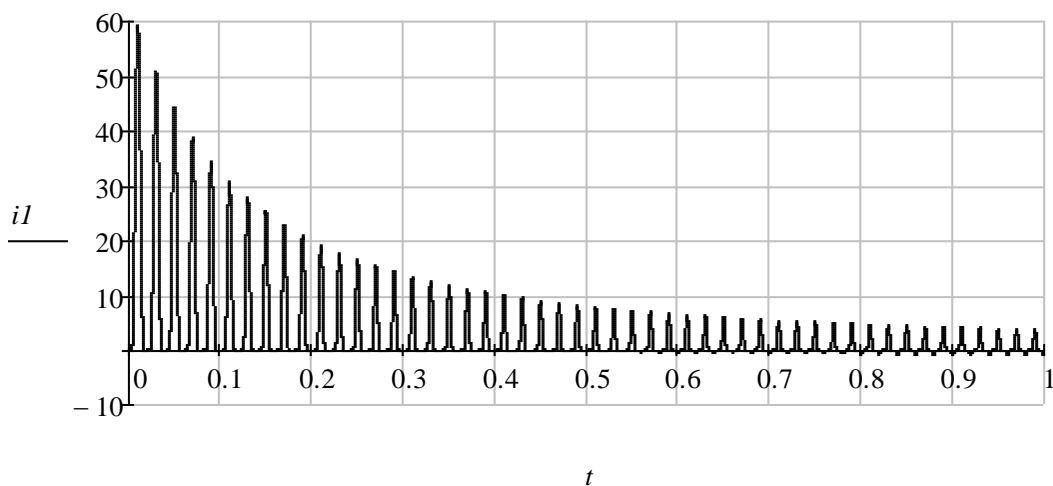


Рис. 106. Графическая диаграмма функции тока $i(t)$.

Анализ решения показывает, что первый импульс тока примерно в 50 раз превышает амплитуду установившегося значения, а длительность переходного процесса составляет около 2 секунд или 100 периодов функции.

Т5. Магнитные цепи переменного потока

1. Потери в сердечниках из ферромагнитного материала при периодическом перемагничивании

Магнитные цепи машин переменного тока, трансформаторов работают в режиме периодического перемагничивания, т.е. при переменном магнитном потоке $\phi(t)$. При периодическом перемагничивании ферромагнитных сердечников в них происходят потери энергии, которые выделяются в виде тепла. Эти потери условно можно разделить на два вида: а) потери на гистерезис p_{Γ} и б) потери на вихревые токи $p_{\text{в}}$.

Потери на гистерезис обусловлены явлением гистерезиса. Они пропорциональны площади статической петли гистерезиса и частоте перемагничивания:

$$p_{\Gamma} = k_{\Gamma} f B_m^n \quad [\text{Вт/кг}],$$

где k_{Γ} – коэффициент потерь, зависящий от сорта материала, B_m – амплитуда индукции магнитного поля, $n = 1,6 \dots 2$ – показатель степени, в практических расчетах принимается равным 2.

Для уменьшения потерь на гистерезис сердечники машин и трансформаторов изготавливают из специальных магнитомягких материалов, так называемых электротехнических сталей, которые имеют узкую петлю гистерезиса.

Переменный магнитный поток $\phi(t)$ наводит ЭДС не только в витках обмоток, расположенных на сердечнике, но и в самом сердечнике. Под действием этой ЭДС внутри сердечника возникают так называемые вихревые токи, которые вызывают дополнительные потери энергии. Так как ЭДС пропорциональна частоте перемагничивания f и амплитуде индукции B_m , а мощность потерь пропорциональна квадрату ЭДС, то из этого следует вывод, что потери на вихревые токи пропорциональны f^2 и B_m^2 :

$$p_{\text{в}} = k_{\text{в}} f^2 B_m^2 \quad [\text{Вт/кг}],$$

где $k_{\text{в}}$ – коэффициент потерь, зависящий от сорта материала.

С целью уменьшения потерь на вихревые токи ферромагнитные сердечники изготавливают не сплошными, а набирают из тонких стальных листов, изолированных друг от друга. Потери на вихревые токи пропорциональны квадрату толщины листа (d^2). Чем тоньше лист, тем меньше потери на вихревые токи в сердечнике, но при этом сам сердечник дороже ста-

новиться дороже. Оптимальная толщина листа на промышленной частоте $f = 50$ Гц составляет 0,3...0,4 мм.

В справочной литературе для разных типов ферромагнитных материалов приводятся суммарные удельные потери $p_o = p_r + p_v$, отнесенные к конкретным параметрам режима. Например, $p_{10/50} = 2$ Вт/кг означает, что потери соответствуют амплитуде индукции $B_m = 1,0$ Тл при частоте $f = 50$ Гц. Учитывая квадратичную зависимость потерь от амплитуды индукции B_m^2 , то их можно определить для любого значения B_m , например $B_m = 1,5$ Тл:

$$p_{1,5/50} = p_{1,0/50} \cdot \left(\frac{1,5}{1,0}\right)^2 = 4,5 \text{ [Вт/кг]}.$$

Для определения отдельных составляющих потерь в сердечнике p_r и p_v необходимо выполнить измерение или расчет суммарных потерь на двух различных частотах f_1 и f_2 при одинаковой амплитуде индукции B_m , и с учетом их различной зависимости от частоты ($p_r \propto f$, $p_v \propto f^2$) разделить эти потери на составляющие.

В справочной литературе для разных типов ферромагнитных материалов приводится так же удельная намагничивающая (реактивная) мощность $q_0 = f(B_m)$. Эта зависимость носит сложный характер, поэтому приводится в виде графической диаграммы или в виде таблицы координат точек (рис. 107):

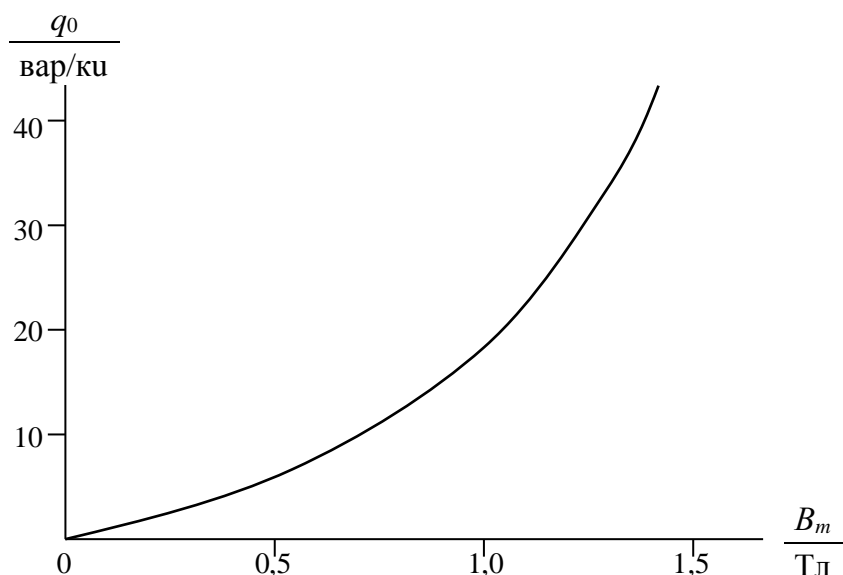


Рис. 107

2. Расчет магнитной цепи переменного потока комплексным методом

Машины переменного тока, трансформаторы, в которых ферромагнитные сердечники подвергаются периодическому перемагничиванию, работают в режиме вынужденного синусоидального напряжения на их обмотках. Рассмотрим работу магнитной цепи на примере сердечника трансформатора (рис. 108, а). К обмотке трансформатора приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, геометрические размеры магнитопровода и характеристики его материала заданы.

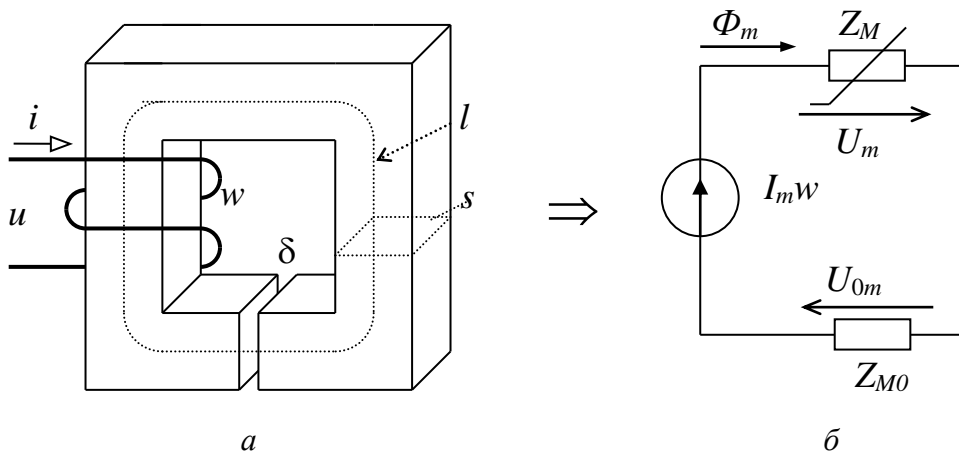


Рис. 108

Из уравнения электромагнитной индукции $u = -e = \frac{d\psi}{dt} = w \frac{d\Phi}{dt}$ следует:

$$\Phi(t) = \frac{1}{w} \int u dt = \frac{1}{w} \int U_m \sin \omega t = \frac{U_m}{w\omega} \sin(\omega t - 90^\circ) = \Phi_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Магнитный поток $\phi(t)$ жестко связан с напряжением $u(t)$, изменяется по синусоидальному закону с отставанием от напряжения на 90° . Таким образом, в схеме замещения магнитной цепи источник энергии представляется источником магнитного потока $\phi(t)$, где

$$\Phi_m = \frac{U_m}{w\omega} = \frac{U}{4,44wf} \text{ [Вб]}, \quad B_m = \frac{U}{4,44wfs} \text{ [Тл]}.$$

Заменим синусоидальные функции их комплексными изображениями:

$$u(t) = U_m \sin \omega t \Rightarrow \underline{U}_m = U_m e^{j0};$$

$$\Phi(t) = \Phi_m \sin(\omega t - 90^\circ) \Rightarrow \underline{\Phi}_m = \Phi_m e^{-j90^\circ}.$$

Вследствие нелинейной зависимости $B = f(H)$ намагничивающий ток в обмотке будет несинусоидальным. Заменяем несинусоидальную функцию тока $i(t)$ эквивалентной синусоидальной:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - 90^\circ + \delta) \Rightarrow \underline{I}_m = I_m e^{j(-90+\delta)} = I_m e^{-j\varphi}.$$

Вследствие потерь в сердечнике на намагничивание магнитный поток $\underline{\Phi}_m$ отстает по фазе на некоторый угол δ от вектора тока \underline{I}_m . Угол отставания δ получил в технике название угла потерь. Очевидно из векторной диаграммы (рис. 109), что $\delta = 90^\circ - \varphi$ или $\varphi = 90^\circ - \delta$.

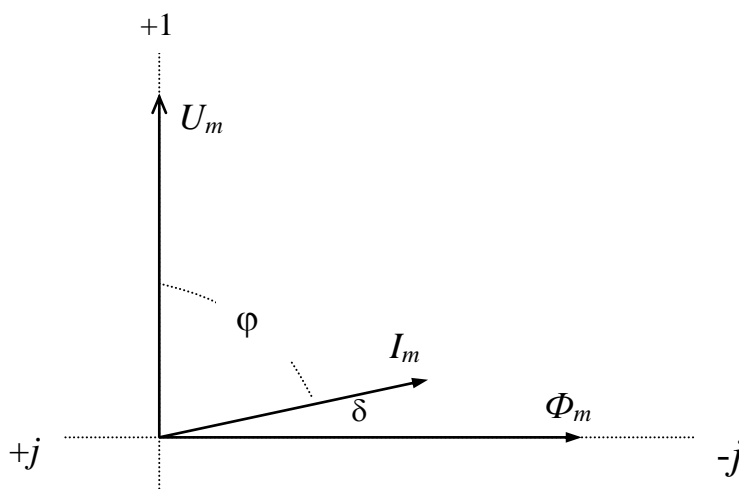


Рис. 109

После замены всех функций времени их комплексными изображениями дальнейшее исследование процессов в магнитной цепи можно проводить в комплексной форме.

Комплексное магнитное сопротивление сердечника:

$$\underline{Z}_M = \frac{\underline{U}_m}{\underline{\Phi}_m} = \frac{\underline{H}_m \cdot \ell}{\underline{B} \cdot s} = \frac{1}{\underline{\mu}} \cdot \frac{\ell}{s} = Z_M e^{j\delta} = R_M + jX_M,$$

где $\underline{\mu} = \frac{\underline{B}_m}{\underline{H}_m} = \mu \cdot e^{-j\delta} = \mu_a - j\mu_p$ – комплексная магнитная проницаемость.

Из справочной литературы находим для расчетной амплитуды индукции B_m соответствующие значения мощности удельных потерь p_0 и удельной намагничивающей мощности q_0 . Суммарные значения этих мощностей для всего сердечника составят:

$$P_C = p_0 \cdot M, \quad Q_C = q_0 \cdot M, \quad \text{где } M \text{ – масса сердечника [кг].}$$

Активное и реактивное магнитные сопротивления сердечника выражаются через суммарные мощности:

$$R_M = \frac{2Q_C}{\Phi_m \cdot \omega}, \quad X_M = \frac{2P_C}{\Phi_m \cdot \omega}.$$

Магнитное сопротивление воздушного зазора носит чисто активный характер и определяется через его геометрические размеры:

$$\underline{Z}_{M0} = R_{M0} + j0 = \frac{\delta}{\mu_0 \cdot s} = 8 \cdot 10^8 \frac{\delta}{s}.$$

Эквивалентное магнитное сопротивление всей цепи:

$$\underline{Z}_{MЭ} = \underline{Z}_M + \underline{Z}_{M0} = (R_M + R_{M0}) + jX_M.$$

МДС обмотки и магнитный поток в сердечнике связаны между собой законом Ома:

$$\underline{I}_m w = \underline{U}_m + \underline{U}_{0m} = \underline{\Phi}_m \underline{Z}_{MЭ}, \text{ откуда следует: } \underline{I}_m = \frac{\underline{\Phi}_m \underline{Z}_{MЭ}}{w} = \frac{\underline{U}_m + \underline{U}_{0m}}{w}.$$

Векторная диаграмма для всех величин показана на рис. 109:

Часть 3. Теория электромагнитного поля

Т1. Электростатическое поле

1. Основные понятия и определения

Электротехника – это отрасль знаний об электромагнитных явлениях и их практическом применении в технике. Физической основой всех электромагнитных явлений является электромагнитное поле.

Электромагнитное поле представляет собой вид материи, характеризующийся воздействием на заряженные частицы. Как вид материи электромагнитное поле обладает массой, энергией, количеством движения, оно может превращаться в вещество и наоборот.

Электромагнитное поле имеет две составляющие или две стороны – электрическую и магнитную. В каждой точке пространства оно определяется двумя векторными величинами: вектором напряженности электрического поля \vec{E} [В/м] и вектором напряженности магнитного поля \vec{H} [А/м].

Следует помнить, что в природе существует единое электромагнитное поле, а отдельные его стороны – электрическое или магнитное поле – могут проявляться независимо друг от друга только в частных случаях и при определенных условиях.

Электростатическое поле представляет собой частный случай электромагнитного поля. Оно создается системой неподвижных по отношению к наблюдателю (в выбранной системе отсчета) зарядов.

Электрические заряды, создающие электростатическое поле, могут быть распределены в пространстве по тому или иному закону.

Если заряд q распределен в некотором объеме v , то он характеризуется объемной плотностью $\rho = \frac{dq}{dv}$ [Кл/м³], откуда следует, что $q = \int_v \rho dv$.

Если заряд q распределен по некоторой поверхности s , то он характеризуется поверхностной плотностью $\sigma = \frac{dq}{ds}$ [Кл/м²], откуда следует, что

$$q = \int_s \sigma ds .$$

Если заряд q распределен вдоль тонкого провода ℓ или оси, то он характеризуется линейной плотностью $\tau = \frac{dq}{d\ell}$ [Кл/м], откуда следует, что

$$q = \int_\ell \tau d\ell .$$

И, наконец, если заряд q сосредоточен в точке, объем которой стремится к нулю, то такой заряд называется точечным. Понятие точечного заряда является идеализированным, в природе точечных зарядов не суще-

ствуется, однако введение понятия точечного заряда имеет большое теоретическое значение.

Электростатическое поле в произвольной точке пространства характеризуется вектором напряженности \vec{E} [В/м]. Напряженность поля единичного точечного заряда q определяется по формуле:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{r}_0,$$

где $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8,842 \cdot 10^{-12}$ [Ф/м] – диэлектрическая проницаемость пустоты; ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды, показывающая во сколько раз проницаемость данной среды больше проницаемости пустоты; $\vec{r}_0 = \vec{1}$ – единичный радиус-вектор, направленный по радиусу от заряда, если $q > 0$, и к заряду, если $q < 0$ (рис. 110, а).

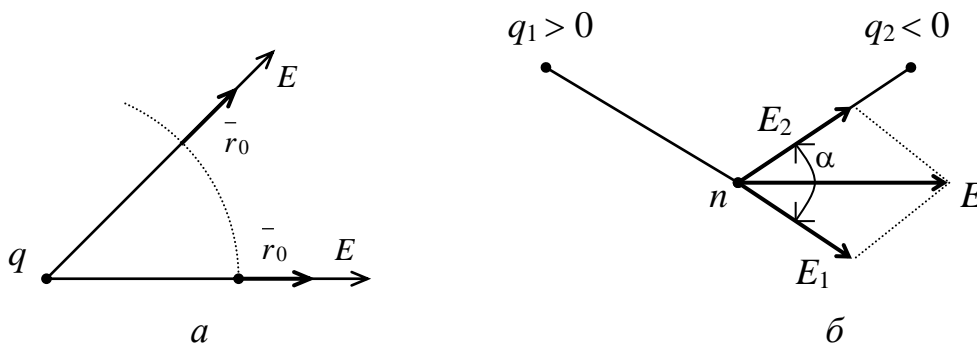


Рис. 110

Если электростатическое поле создается системой зарядов, то к расчету вектора напряженности \vec{E} применим принцип наложения, т.е. результирующее значение вектора напряженности поля в произвольной точке пространства будет равно геометрической сумме составляющих этого вектора от каждого точечного заряда в отдельности, т.е. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$. На рис. 110, б электростатическое поле создается системой из двух точечных зарядов ($q_1 > 0$ и $q_2 < 0$). Модуль результирующего вектора напряженности E можно определить по формуле, вытекающей из теоремы косинусов:

$$|E| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cdot \cos \alpha}.$$

Если электростатическое поле создается системой распределенных в пространстве зарядов, то эти заряды разбиваются на элементарные точечные заряды dq , а операция сложения заменяется интегрированием по объ-

ему, площади или длине, в зависимости от того, как распределены заряды в пространстве.

Пусть точечный заряд q перемещается в электростатическом поле \vec{E} из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории 1a2 (рис. 111.)

При перемещении заряда будет совершаться некоторая работа:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \overline{dl} = \int_1^2 q \vec{E} \overline{dl} = q \cdot \int_1^2 \vec{E} \overline{dl} = q \cdot U_{12}.$$

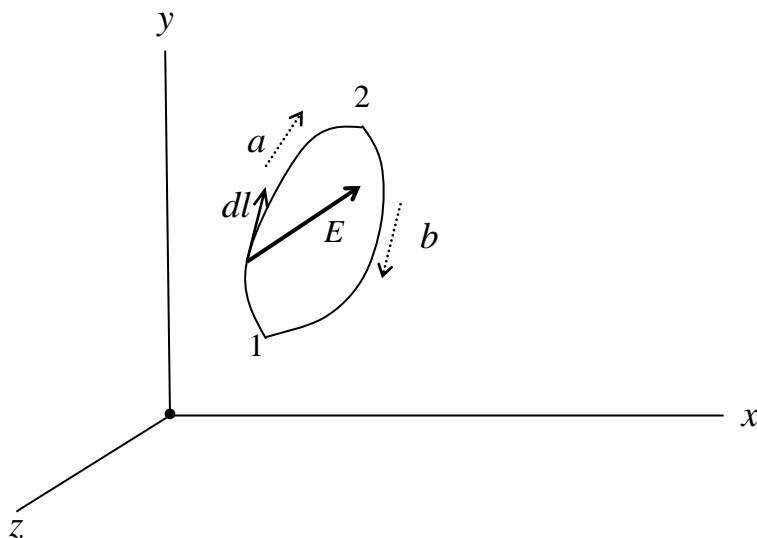


Рис. 111

Напряжением между точками 1 и 2 называется отношение работы по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 к величине заряда q :

$$U_{12} = \frac{A}{q} = \int_1^2 \vec{E} \overline{dl}.$$

Если переместить заряд обратно в точку 1 по некоторой новой траектории 2b1, то согласно закону сохранения энергии суммарная работа по перемещению заряда будет равна нулю:

$$A = q \int_1^2 \vec{E} \overline{dl} + q \int_2^1 \vec{E} \overline{dl} = q \oint \vec{E} \overline{dl} = 0.$$

Из полученного выражения следует два вывода:

1) $\oint \vec{E} \overline{dl} = 0$ – циркуляция вектора напряженности поля \vec{E} по замкнутому контуру равна нулю;

$$2) \int_1^2 \overline{E} dl = - \int_2^1 \overline{E} dl \text{ или } U_{12} = -U_{21} - \text{напряжение между двумя точками 1}$$

и 2 не зависит от выбора пути интегрирования.

Второй вывод позволяет ввести в расчет некоторую функцию координат $V(x, y, z)$ под названием потенциала поля, разность значений которой в рассматриваемых точках 1 и 2 численно равна напряжению между этими точками:

$$V_1 - V_2 = U_{12} = \int_1^2 \overline{E} dl.$$

Пусть потенциал точки 1 известен ($V_1 = \text{const}$), а точка 2 перемещается в пространстве и ее потенциал будет функцией координат x, y, z :

$$V_2 = V(x, y, z) = U_{12} = - \int_1^{x,y,z} \overline{E} dl + \varphi_1.$$

В электротехнике за базовую точку с заданным нулевым потенциалом принимают “землю”, а при отсутствии заземления – любую точку цепи или схемы.

Принимая $V_1 = \text{const}$ за постоянную интегрирования, перейдем к неопределенному интегралу:

$$V = - \int \overline{E} dl = - \int E dl \cos(\overline{E} dl) = - \int E_l dl,$$

откуда $E_l = - \frac{\partial V}{\partial l}$, т.е. проекция вектора \overline{E} на любое направление l показывает скорость убывания потенциала в этом направлении. Аналогично можно записать составляющие вектора \overline{E} по координатным осям x, y, z :

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Просуммируем отдельные составляющие вектора:

$$\overline{E} = -\bar{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \bar{j} \frac{\partial V}{\partial y} - \bar{k} \frac{\partial V}{\partial z} = -(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z})V = -\nabla V = -\text{grad}V,$$

где $\nabla = (\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z})$ – оператор пространственного дифференцирования (Гамильтона).

Поверхность, на которой потенциал φ имеет постоянное значение, называется эквипотенциальной. Вектор напряженности поля \vec{E} направлен в сторону наибольшего убывания потенциала и, следовательно, перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности.

2. Уравнения электростатического поля в интегральной и дифференциальной форме

Интегральная форма уравнений описывает поле в конечных размерах объема, поверхности, линии, расположенных в пространстве. Дифференциальная форма тех же уравнений описывает поле в произвольных точках пространства.

1. Закон Кулона определяет силу взаимодействия между двумя точечными зарядами:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0.$$

Сила взаимодействия двух точечных зарядов направлена по прямой, соединяющих эти заряды, при этом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются.

2. Ранее была получена интегральная форма уравнения циркуляции вектора напряженности поля \vec{E} по замкнутому контуру:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \text{– интегральная форма.}$$

По теореме Стокса перейдем к дифференциальной форме этого уравнения:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta S} = \text{rot}_n \vec{E} = 0.$$

Так как площадка ΔS выбиралась произвольно, то очевидно проекция вектора $\text{rot} \vec{E}$ на любое направление равна нулю, следовательно, и сам вектор равен нулю:

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{– дифференциальная форма.}$$

Ротор вектора \vec{E} характеризует его вихри в пространстве. Равенство $\text{rot} \vec{E} = 0$ означает, что электростатическое поле является безвихревым, т.е. потенциальным.

В декартовой системе координат операция rot запишется так:

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

3. Теорема Гаусса является одной из фундаментальных теорем в теории поля:

$$\oint_S \overline{D} d\overline{s} = \sum q_{CB} - \text{интегральная форма записи теоремы гласит, что по-}$$

ток вектора электрического смещения \overline{D} сквозь замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов, расположенные внутри поверхности S .

$$\text{Для однородной среды } \overline{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \overline{E}, \text{ тогда } \oint_S \overline{E} d\overline{s} = \sum q_{CB} / \varepsilon\varepsilon_0.$$

По теореме Остроградского перейдем к дифференциальной форме уравнения теоремы Гаусса:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \overline{D} d\overline{s}}{\Delta v} = \text{div} \overline{D}, \quad \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum q_{CB}}{\Delta v} = \frac{dq_{CB}}{dv} = \rho_{CB},$$

следовательно: $\text{div} \overline{D} = \nabla \overline{D} = \rho_{CB}$ — дифференциальная форма.

Дивергенция вектора \overline{D} характеризует его истоки в пространстве, следовательно, линии вектора \overline{D} начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

В декартовой системе координат операция div запишется так:

$$\text{div} \overline{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

$$\text{Для однородной среды } \overline{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \overline{E}, \text{ тогда } \text{div} \overline{E} = \frac{\rho_{CB}}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

4. Электростатическое поле обладает способностью запасать энергию. Объемная плотность этой энергии выражается уравнением:

$$\frac{dW_{\text{э}}}{dv} = \frac{\overline{D} \cdot \overline{E}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\overline{D}^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \text{ [Дж/м}^3\text{]}.$$

Для определения запаса энергии в заданном объеме v необходимо выполнить интегрирование плотности энергии по заданному объему:

$$W_{\text{э}} = \int_v \frac{\overline{D} \overline{E}}{2} dv = \int_v \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 dv = \int_v \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} dv.$$

3. Граничные условия в электростатическом поле

Выделим произвольную точку n , расположенную в электростатическом поле на поверхности раздела двух диэлектриков с разными значениями диэлектрической проницаемости ε_1 и ε_2 (рис. 112)

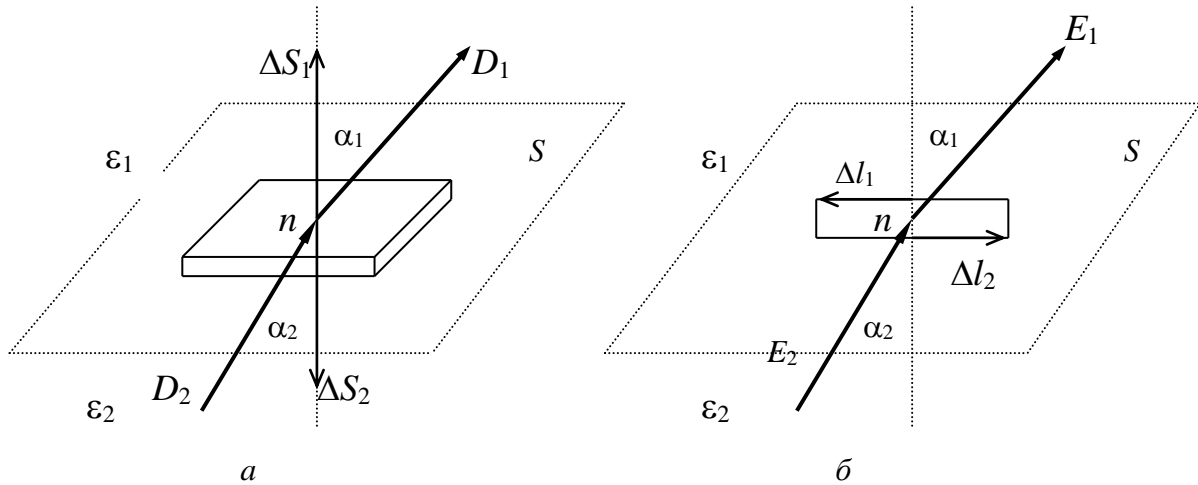


Рис. 112

Окружим точку n элементарной призмой, у которой высота бесконечно мала по сравнению с линейными размерами основания. Применим к поверхности призмы теорему Гаусса, при этом пренебрежем потоком вектора \overline{D} через боковые поверхности ввиду их малости. Тогда получим:

$$\oint_S \overline{D} d\overline{s} = \oint_{\Delta S_1} \overline{D} d\overline{s} + \oint_{\Delta S_2} \overline{D} d\overline{s} = -D_1 \cos \alpha_1 \Delta S_1 + D_2 \cos \alpha_2 \Delta S_2 = -D_{1n} \cdot \Delta S + D_{2n} \cdot \Delta S = 0,$$

или
$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2, \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

На границе раздела двух диэлектриков равны нормальные составляющие вектора электрического смещения \overline{D} .

Окружим выделенную точку n элементарным прямоугольником, высота которого бесконечно мала по сравнению с его длиной (рис. 256, б). Найдем значение циркуляции вектора \overline{E} по периметру прямоугольника:

$$\oint_l \overline{E} d\overline{l} = \oint_{\Delta l_1} \overline{E} d\overline{l} + \oint_{\Delta l_2} \overline{E} d\overline{l} = E_1 \sin \alpha_1 \Delta l_1 - E_2 \sin \alpha_2 \Delta l_2 = E_{1t} \cdot \Delta l - E_{2t} \cdot \Delta l = 0,$$

или
$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2, \quad E_{1t} = E_{2t}.$$

На границе раздела двух диэлектриков равны тангенциальные составляющие вектора напряженности поля \overline{E} .

Разделим почленно вторые уравнения на первые и учтем, что $\overline{D} = \varepsilon\varepsilon_0\overline{E}$, получим

$$\frac{E_{1t}}{D_{1n}} = \frac{E_{2t}}{D_{2n}} \quad \text{или} \quad \frac{E_1 \sin \alpha_1}{\varepsilon\varepsilon_0 E_1 \cos \alpha_1} = \frac{E_2 \sin \alpha_2}{\varepsilon\varepsilon_0 E_2 \cos \alpha_2},$$

откуда следует $\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ – условие преломления линий поля на поверхности раздела двух диэлектриков с различными значениями и диэлектрической проницаемости (ε_1 и ε_2).

Если линии поля направлены нормально к поверхности раздела ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), то $D_1 = D_2$, $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

Рассмотрим граничные условия на поверхности раздела диэлектрика с проводником.

Электрическое поле внутри проводника отсутствует ($\overline{E} = 0$), а его поверхность является эквипотенциальной. На поверхности проводника бесконечно тонким слоем будут располагаться свободные разряды с поверхностной плотностью σ . Линии поля в диэлектрике будут направлены нормально к поверхности проводника как к эквипотенциальной поверхности. Применяя рассуждения, аналогичные предыдущему примеру, получим:

$$D_{1n} = D = \sigma, \quad E_{1t} = 0.$$

4. Уравнение Пуассона и Лапласа. Теорема единственности решения

Расчет электростатических полей с использованием уравнений $\operatorname{rot}\overline{E} = 0$ и $\operatorname{div}\overline{D} = \rho_{CB}$ возможен только в простейших случаях. Наиболее общим методом является расчет электростатических полей на основе решения уравнений Пуассона и Лапласа. Выведем эти уравнения.

Ранее было получено $\overline{E} = -\operatorname{grad}V = -\nabla V$. Подставим это выражение в уравнение дивергенции:

$$\operatorname{div}\overline{D} = \operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0\overline{E}) = \varepsilon\varepsilon_0\operatorname{div}(-\operatorname{grad}V) = -\varepsilon\varepsilon_0\operatorname{div}\operatorname{grad}V = \rho_{CB},$$

откуда следует:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}V = -\frac{\rho_{CB}}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho_{CB}}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad \text{– уравнение Пуассона.}$$

Уравнение Пуассона справедливо для тех точек среды, где существуют объемные заряды ρ_{CB} .

В реальных условиях свободные заряды располагаются на поверхности проводников бесконечно тонким слоем. Объемная плотность таких зарядов равна бесконечности и уравнение Пуассона применительно к ним теряет свой смысл.

В диэлектриках, которыми разделены заряженные проводники, объемные заряды отсутствуют ($\rho_{CB} = 0$), уравнение Пуассона превращается в уравнение Лапласа:

$$\operatorname{divgrad}V = 0 \text{ или } \nabla^2 V = 0 \text{ – уравнение Лапласа.}$$

Таким образом, электростатическое поле в диэлектрике описывается уравнением Лапласа, внутри проводников поле отсутствует вообще, а на границе раздела диэлектрика с проводником вступают в силу граничные условия $D_{1n} = D = \sigma$, $E_{1t} = 0$.

В декартовой системе координат операцию двойного дифференцирования ∇^2 записывают так:

$$\nabla^2 V = \left(\bar{i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{j} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = 0.$$

Уравнение Лапласа в электростатике имеет исключительно важное значение.

Уравнения Пуассона и Лапласа, как уравнения в частных производных, допускают множество линейно независимых частных решений. Однако в реальных условиях каждой конкретной задаче соответствует только одно определенное решение.

Теорема единственности решения гласит, что найденное любым способом решение уравнений Пуассона или Лапласа, является единственно верным решением, если оно удовлетворяет граничным условиям данной задачи.

Предположим, что существует два решения для вектора напряженности поля \bar{E}' и \bar{E}'' , оба удовлетворяющие граничным условиям задачи. Тогда получим:

$$\operatorname{div}(\bar{E}' - \bar{E}'') = \operatorname{div}\bar{E}' - \operatorname{div}\bar{E}'' = \frac{\rho_{CB}}{\epsilon\epsilon_0} - \frac{\rho_{CB}}{\epsilon\epsilon_0} = 0$$

$$\operatorname{rot}(\bar{E}' - \bar{E}'') = \operatorname{rot}\bar{E}' - \operatorname{rot}\bar{E}'' = 0 - 0 = 0.$$

Если rot и div от вектора равны нулю, то сам вектор тождественно равен нулю, следовательно, $\bar{E}' - \bar{E}'' = 0$, или $\bar{E}' = \bar{E}'' = \bar{E}$, что требовалось доказать.

Из теоремы единственности решения вытекают два следствия, имеющие важное практическое значение:

1) электростатическое поле в некотором объеме, ограниченном эквипотенциальной поверхностью, не изменится, если эту поверхность заменить бесконечно тонким проводящим слоем;

2) электростатическое поле по одну сторону некоторой поверхности S не изменится, если по другую сторону поверхности изменить параметры среды (например, заменить проводящую среду диэлектриком) и изменить расположение свободных зарядов так, чтобы на этой поверхности сохранились прежние граничные условия.

Второе следствие лежит в основе так называемого метода зеркальных отображений, применяемого на практике для расчета электростатических полей.

5. Электростатическое поле осевых зарядов

Ниже будет рассмотрено несколько примеров электростатических полей, создаваемых осевыми зарядами.

1) Поле уединенной равномерно заряженной оси (рис. 113, а).

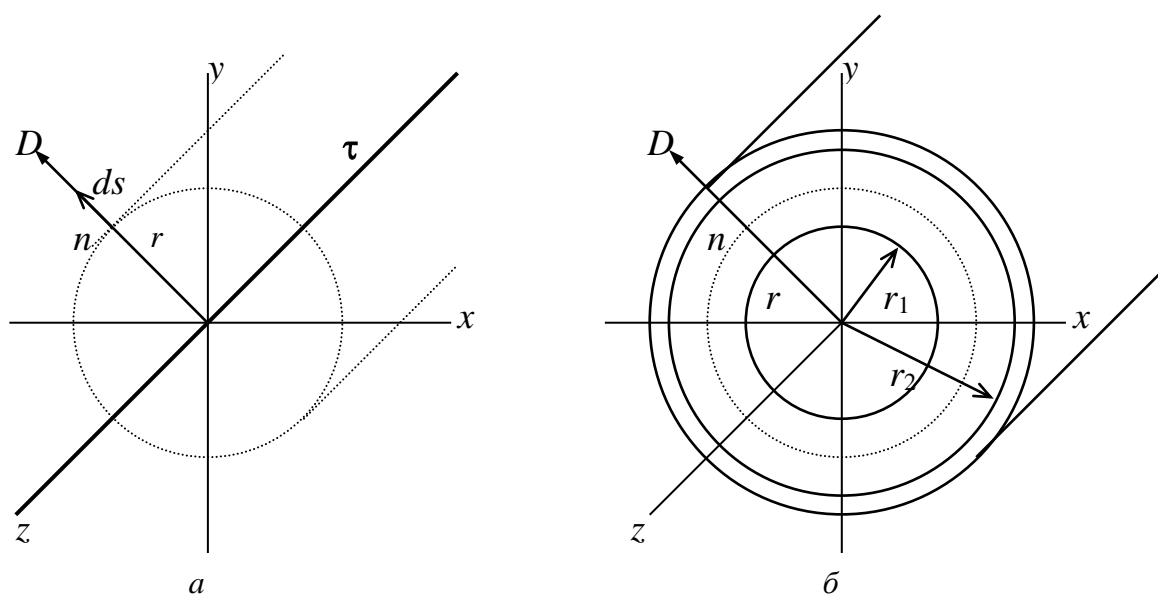


Рис. 113

Расчет параметров поля в произвольной точке n выполним с помощью теоремы Гаусса в интегральной форме. Окружим ось цилиндром с произвольным радиусом r и длиной образующей $l = 1$. Вектор электрического смещения $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$ в силу симметрии во всех точках на боковой поверхности цилиндра ($r = \text{const}$) имеет одно и то же значение и направление по радиусу, т.е. нормально к этой поверхности.

По теореме Гаусса получим:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \oint_{\Delta S_{\text{БОК}}} \vec{D} \cdot \vec{ds} + \oint_{\Delta S_{\text{ТОР}}} \vec{D} \cdot \vec{ds} = D \cdot 2\pi r l + 0 = q = \tau \cdot l .$$

Откуда следует, что $D = \frac{\tau}{2\pi r}$; $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}$.

Поток вектора \vec{D} через торцевые поверхности цилиндра равен нулю, так как линии вектора здесь направлены по касательной к поверхности.

В цилиндрической системе координат потенциал поля φ будет зависеть только от радиуса r : $\vec{E} = -\text{grad}V = -\frac{dV}{dr}$, откуда

$$\varphi = -\int E dr = -\int \frac{\tau \cdot dr}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + C .$$

Если принять на некоторой поверхности радиуса r_0 значение потенциала равным нулю, то $C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r_0$ и значение потенциала на поверхности произвольного радиуса будет равна:

$$V_{(r)} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} .$$

2) Поле коаксиального кабеля (рис. 113, б).

Конструктивно коаксиальный кабель состоит из внутреннего провода радиуса r_1 (прямой провод) и наружного провода в виде трубы или металлического чехла радиуса r_2 (обратный провод), разделенных между собой диэлектриком с относительной проницаемостью ϵ .

Реальные заряды в коаксиальном кабеле расположены равномерно по поверхности внутреннего провода (жиле) и на внутренней поверхности внешней оболочки. В соответствии со вторым следствием из теоремы единственности заменим поверхностные заряды внутреннего провода осевым зарядом с линейной плотностью τ , после чего к расчету параметров поля можно применить положения и выводы, полученные ранее для заряженной оси:

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}; \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} .$$

Напряжение между внутренней жилой и оболочкой:

$$U = V_1 - V_2 = -\int_{r_2}^{r_1} \vec{E} dr = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{\tau dr}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

Емкость кабеля на единицу длины: $C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$, откуда следует,

что
$$\tau = C_0 \cdot U = \frac{U 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Наибольшее значение напряженности поля имеет место на поверхности внутреннего провода при $r = r_1$:

$$E_{\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1} \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

3) Поле двух разноименно заряженных параллельных осей (рис. 114).
 Две разноименно заряженные оси ($\tau_1 = +\tau$, $\tau_2 = -\tau$) расположены параллельно на расстоянии $2a$ в диэлектрическом пространстве.

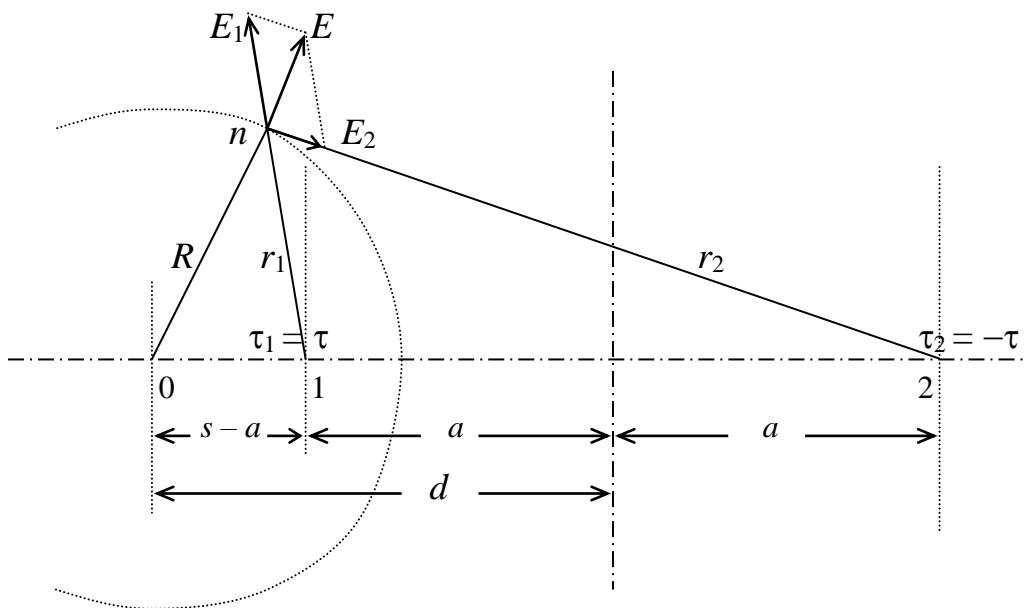


Рис. 114

Параметры поля в произвольной точке пространства n могут быть определены по методу наложения. Результирующий вектор напряженности поля равен геометрической сумме составляющих, а результирующий потенциал – алгебраической сумме составляющих от каждого провода:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} \vec{r}_{01} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} \vec{r}_{02};$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_1} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_2} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + C.$$

Если принять $\varphi = 0$ в точках равноудалённых от обеих осей ($r_1 = r_2$), то постоянная интегрирования будет равна нулю ($C = 0$), тогда получим:

$$V = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$ должны удовлетворять условию $k = \frac{r_2}{r_1} = \text{const}$. В геометрии есть малоизвестная теорема Аполлония, которая гласит, что геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до заданной пары точек постоянно, является окружность, центр которой лежит на линии, соединяющей заданную пару точек. Эта окружность должна удовлетворять следующему условию:

$$(s + a)(s - a) = R^2 \quad \text{или} \quad \frac{s + a}{R} = \frac{R}{s - a}.$$

Анализ геометрии рис. 2 показывает, что треугольник $20n$ подобен треугольнику $n01$ (общий угол с вершиной 0 и прилежащие к углу стороны пропорциональны). Из подобия треугольников следует:

$$\frac{s + a}{R} = \frac{R}{s - a} = \frac{r_2}{r_1} = k.$$

При перемещении точки n вдоль окружности изменяются расстояния r_1 и r_2 так, что их отношение остается постоянным $k = \frac{r_2}{r_1} = \text{const}$. При изменении отношения $k = \frac{r_2}{r_1}$ центр окружности перемещается вдоль линии, соединяющую заданную пару точек 1 и 2 . При $k > 1$, $r_2 > r_1$ и центр окружности находится в левой полуобласти, при $k < 1$, $r_1 < r_2$ и центр окружности находится в правой полуобласти, а при $k = 1$, $r_1 = r_2$, центр окружности смещается в бесконечность, а сама окружность превращается в прямую линию, совпадающую с вертикальной осью симметрии.

Линии вектора напряженности поля \vec{E} также является дугами окружности, но с центрами, расположенными на вертикальной оси симметрии.

Графической диаграммой или сеткой поля называется совокупность следов эквипотенциальных поверхностей с заданными значениями потенциалов, построенная совместно с совокупностью следов линии вектора

напряженности поля \vec{E} . Графическая диаграмма поля двух разноименно заряженных осей имеет вид рис. 115.

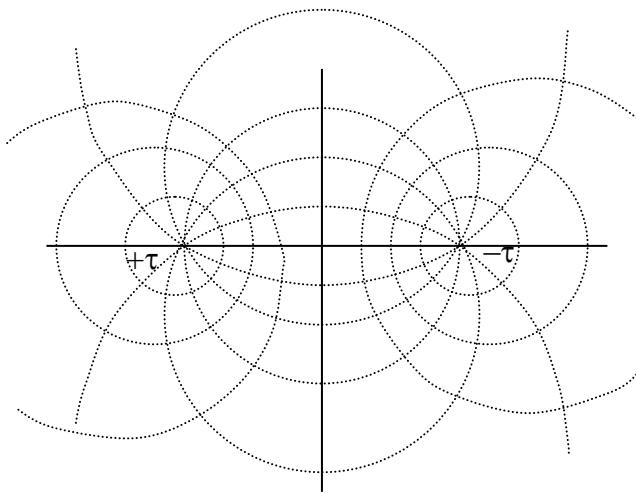


Рис. 115

водов R , межосевое расстояние d , радиус R соизмерим с расстоянием d . Провода линии не заземлены, к линии приложено постоянное напряжение U (рис. 116).

Согласно второму следствию из теоремы единственности заменим поверхностные заряды проводов осевыми $+\tau$ и $-\tau$, проводящую среду – диэлектриком так, чтобы на поверхности проводов сохранились прежние условия, а именно: эти поверхности должны остаться эквипотенциальными с теми же значениями потенциалов $\varphi_1 = +\varphi$ и $\varphi_2 = -\varphi$. Чтобы выполнить эти условия, электрические оси проводов должны быть смещены относительно геометрических осей на некоторое расстояние $s - a$.

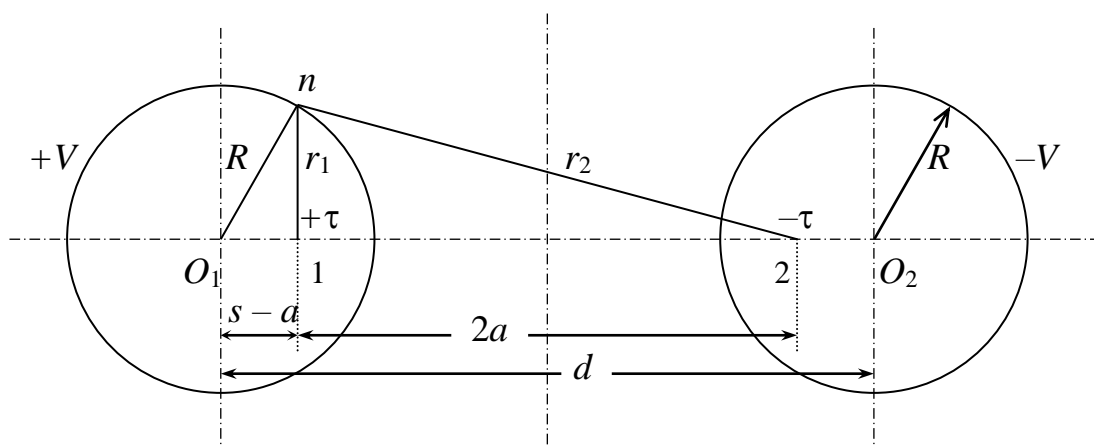


Рис. 116

Согласно второму следствию из теоремы единственности заменим поверхностные заряды проводов осевыми $+\tau$ и $-\tau$, проводящую среду – диэлектриком так, чтобы на поверхности проводов сохранились прежние

По графической диаграмме поля можно определить его параметры (\vec{E}, V) в любой точке.

6. Электростатическое поле и емкость двухпроводной линии

Пусть требуется рассчитать электростатическое поле и емкость двухпроводной линии с заданными геометрическими размерами (радиус проводов R , межосевое расстояние d , радиус R соизмерим с расстоянием d).

Провода линии не заземлены, к линии приложено постоянное напряжение U (рис. 116).

Согласно второму следствию из теоремы единственности заменим поверхностные заряды проводов осевыми $+\tau$ и $-\tau$, проводящую среду – диэлектриком так, чтобы на поверхности проводов сохранились прежние условия, а именно: эти поверхности должны остаться эквипотенциальными с теми же значениями потенциалов $\varphi_1 = +\varphi$ и $\varphi_2 = -\varphi$. Чтобы выполнить эти условия, электрические оси проводов должны быть смещены относительно геометрических осей на некоторое расстояние $s - a$.

условия, а именно: эти поверхности должны остаться эквипотенциальными с теми же значениями потенциалов $V_1 = +V$ и $V_2 = -V$. Чтобы выполнить эти условия, электрические оси проводов должны быть смещены относительно геометрических осей на некоторое расстояние $s - a$.

Положение электрических осей определяется из теоремы Аполония:

$$\begin{cases} (s + a)(s - a) = R^2 \\ 2s = d \end{cases}$$

Таким образом, электростатическое поле, создаваемое двумя проводами с поверхностными зарядами σ , будет эквивалентным полю, которое создается двумя разноименно заряженными осями $+\tau$ и $-\tau$, и для его расчета можно применить полученные ранее формулы:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2; \quad V = V_1 + V_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Потенциал положительного провода:

$$V_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{s + a}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{d - (s - a)}{R}.$$

В силу симметрии $V_2 = -V_1$, тогда напряжение:

$$U = V_1 - V_2 = 2V_1 = \frac{\tau}{\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{d - (s - a)}{R},$$

где $s - a$ – смещение электрической оси провода относительно геометрической.

Из полученного выражения вытекают расчетные формулы:

$$\tau = \frac{U \cdot \pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d - (s - a)}{R}} [\text{Кл/м}]; \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d - (s - a)}{R}} [\text{Ф/м}].$$

Для воздушных линий ($\epsilon = 1$) межосевое расстояние d многократно больше радиуса проводов R . В этом случае смещением электрических осей можно пренебречь ($s - a \approx 0$) и считать, что электрические оси проводов совпадают с геометрическими. Для таких линий полученные выше расчетные формулы будут иметь вид:

$$\tau = \frac{U \cdot \pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}} [\text{Кл/м}], \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}} [\text{Ф/м}].$$

7. Электростатическое поле и емкость цилиндрического провода, расположенного над проводящей плоскостью (землей)

Пусть требуется рассчитать электростатическое поле и емкость цилиндрического провода, расположенного над проводящей плоскостью (землей). Заданы радиус провода R , высота подвески h (радиус R соизмерим с высотой h). К проводу приложено постоянное напряжение U (рис. 117).

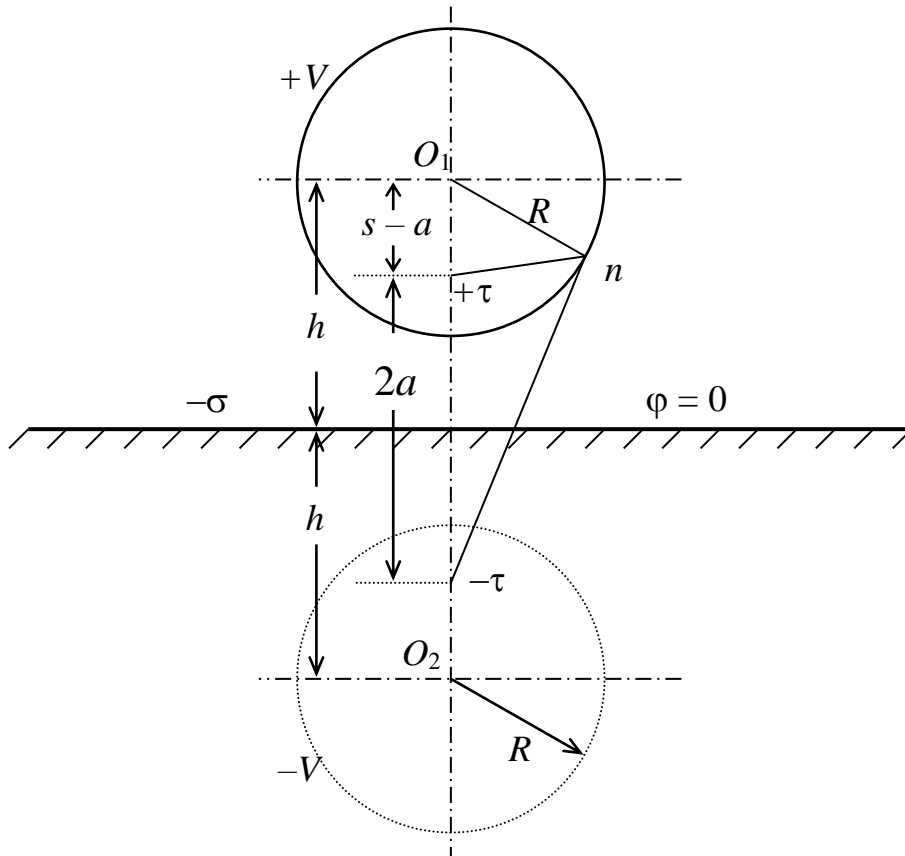


Рис. 117

Согласно второму следствию из теоремы единственности заменим проводящую среду диэлектриком, а поверхностные заряды провода и земли – двумя разноименно заряженными осями $+\tau$ и $-\tau$ так, чтобы остались неизменными прежние граничные условия: 1) поверхность земли должна быть эквипотенциальной с потенциалом $\varphi_0 = 0$, 2) поверхность провода должна быть эквипотенциальной с потенциалом $\varphi_1 = U$. Чтобы выполнить эти условия, электрические оси $+\tau$ и $-\tau$ должны быть смещены относительно геометрических осей на некоторое расстояние $s - a$.

Положение электрических осей определяется из теоремы Аполония:

$$\begin{cases} (s + a)(s - a) = R^2 \\ s = h \end{cases}$$

Таким образом, электростатическое поле, создаваемое двумя проводами с поверхностными зарядами σ , будет эквивалентным полю, которое создается двумя разноименно заряженными осями $+\tau$ и $-\tau$, и для его расчета можно применить полученные ранее формулы:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2; \quad V = V_1 + V_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Потенциал провода:

$$V = U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{s+a}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{2h-(s-a)}{R},$$

где $(s-a)$ – смещение электрической оси провода относительно геометрической.

Из полученного выражения вытекают расчетные формулы:

$$\tau = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h-(s-a)}{R}} [\text{Кл/м}]; \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h-(s-a)}{R}} [\text{Ф/м}].$$

Если высота подвеса провода намного больше его радиуса, то смещением электрических осей можно пренебречь ($s-a \approx 0$) и считать, что электрические оси проводов совпадают с геометрическими. В этом случае расчетные формулы будут иметь вид:

$$\tau = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}} [\text{Кл/м}]; \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}} [\text{Ф/м}].$$

8. Поле многопроводной линии. Метод зеркальных отображений

Заданы n длинных проводов, расположенных параллельно проводящей плоскости (над землей). Радиусы проводов R_1, R_2, R_3, \dots , высоты подвесок h_1, h_2, h_3, \dots , межосевое расстояние $d_{12}, d_{13}, d_{23}, \dots$, при этом $h \gg R$, $d \gg R$. Потенциалы проводов V_1, V_2, V_3, \dots известны (рис. 118).

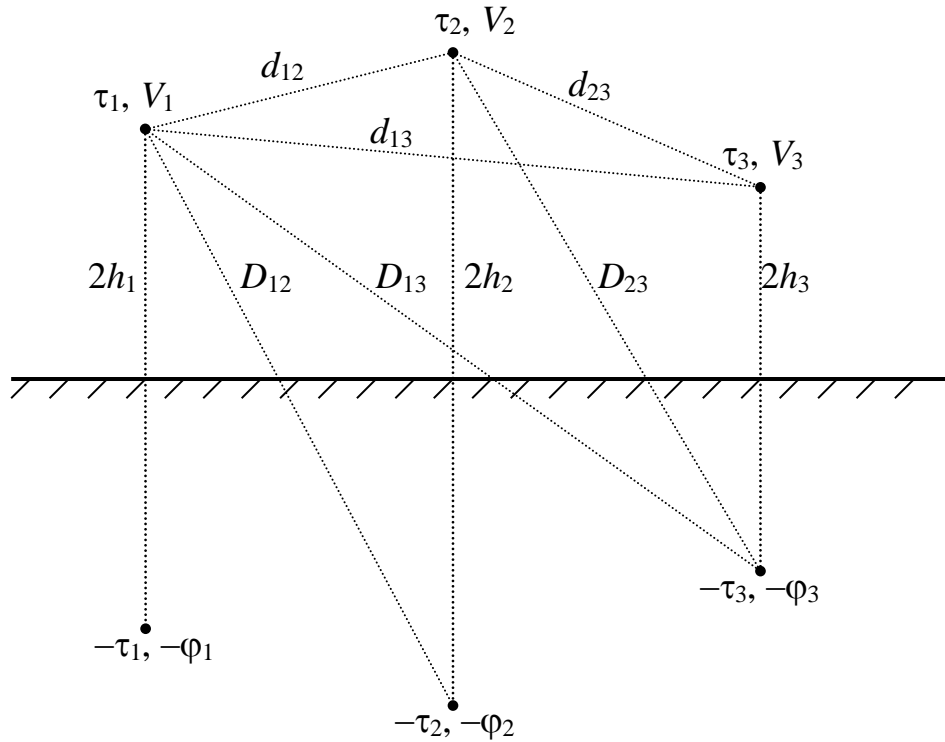


Рис. 118

На основании второго следствия из теоремы единственности заменим проводящую среду (землю) диэлектриком с $\varepsilon = \varepsilon_0$, а поверхностные заряды земли – системой зеркальных зарядов проводов с противоположными знаками. Смещением электрических осей пренебрегаем, так как по условию $h \gg R$.

Расчет параметров поля в произвольной точке n может быть выполнен по методу наложения, то есть результирующие параметры поля могут быть найдены как суммы соответствующих составляющих от независимого действия осевых зарядов самих проводов и их зеркальных отображений:

$$\bar{E}_n = \bar{E}_{n1} + \bar{E}_{n2} + \bar{E}_{n3} + \dots + \bar{E}'_{n1} + \bar{E}'_{n2} + \bar{E}'_{n3} + \dots$$

$$V_n = V_{n1} + V_{n2} + V_{n3} + \dots + V'_{n1} + V'_{n2} + V'_{n3} + \dots$$

Потенциал на поверхности первого провода:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{R} + \frac{-\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{2h_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{d_{12}} + \frac{-\tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{D_{12}} + \frac{\tau_3}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{d_{13}} + \frac{-\tau_3}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{D_{13}} + \dots = \\ &= \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{D_{12}}{d_{12}} + \frac{\tau_3}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{D_{13}}{d_{13}} + \dots = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 + \dots \end{aligned}$$

Аналогично для каждого провода:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 + \dots \\ V_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 + \alpha_{23}\tau_3 + \dots \\ V_3 = \alpha_{31}\tau_1 + \alpha_{32}\tau_2 + \alpha_{33}\tau_3 + \dots \\ \dots \end{array} \right\} \text{ первая группа формул Максвелла.}$$

Здесь обозначены:

$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{R_1}$, $\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{R_2}$, ... – собственные потенциальные коэффициенты;

$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{12}}{d_{12}}$, $\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{13}}{d_{13}}$, ... – взаимные потенциальные коэффициенты.

Потенциальные коэффициенты определяются через геометрические размеры, они всегда положительны, имеют физическую размерность $[1/\Phi]$.

Если заданы потенциалы проводов Φ_1, Φ_2, \dots , то их заряды τ_1, τ_2, \dots могут быть определены из совместного решения системы потенциальных уравнений (первой группы формул Максвелла):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \Delta_1/\Delta = \beta_{11}\Phi_1 + \beta_{12}\Phi_2 + \beta_{13}\Phi_3 + \dots \\ \tau_2 = \Delta_2/\Delta = \beta_{21}\Phi_1 + \beta_{22}\Phi_2 + \beta_{23}\Phi_3 + \dots \\ \tau_3 = \Delta_3/\Delta = \beta_{31}\Phi_1 + \beta_{32}\Phi_2 + \beta_{33}\Phi_3 + \dots \end{array} \right\} \text{ вторая группа формул Максвелла.}$$

Здесь приняты обозначения:

$\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}, \dots$ – собственные емкостные коэффициенты, всегда положительны,

$\beta_{12} = \beta_{21}, \beta_{13} = \beta_{31}, \dots$ – взаимные емкостные коэффициенты, всегда отрицательны.

На практике более удобно пользоваться формулами Максвелла третьей группы с частичными ёмкостями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = U_{10}C_{11} + U_{12}C_{12} + U_{13}C_{13} + \dots \\ \tau_2 = U_{21}C_{21} + U_{20}C_{22} + U_{23}C_{23} + \dots \\ \tau_3 = U_{31}C_{31} + U_{32}C_{32} + U_{30}C_{33} + \dots \end{array} \right\} \text{ третья группа формул Максвелла.}$$

Здесь обозначены:

$U_{10} = \Phi_1 - \Phi_0$, $U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$, $U_{21} = \Phi_2 - \Phi_1$, ... – напряжения между соответствующими элементами схемы (рис. 119).

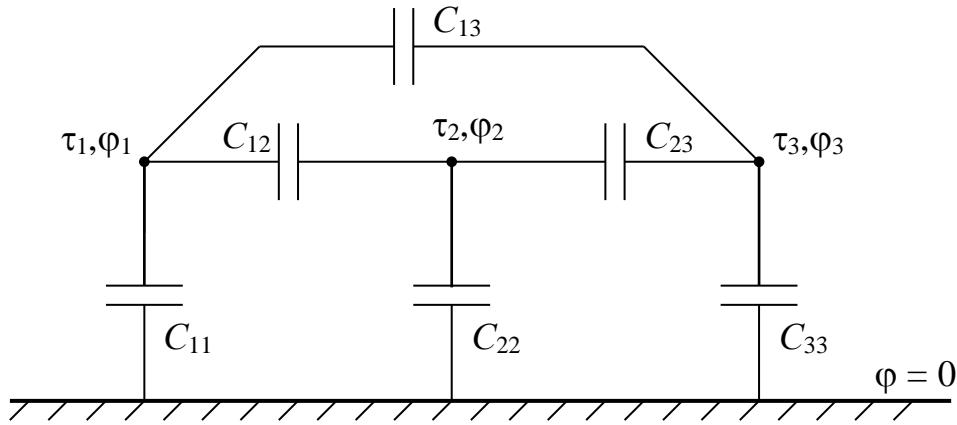


Рис. 119

Частичные емкости определяются через емкостные коэффициенты второй группы формул.

Метод расчета полей многопроводных линий, основанный на применении второго следствия из теоремы единственности, получил название метода зеркальных отображений.

Рассмотрим применение данного метода к расчету рабочей емкости двухпроводной линии, расположенной над поверхностью земли. Если провода линии питаются от незаземленного источника, то можно принять для первого провода $q_1 = q$, $\tau_1 = \tau$, для второго провода $q_2 = -q$, $\tau_2 = -\tau$. Тогда получим:

$$\begin{cases} V_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})\tau \\ V_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})\tau \end{cases}$$

Напряжение между проводами:

$$\begin{aligned} U = V_1 - V_2 &= (\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22})\tau = (\alpha_{11} - 2\alpha_{12} + \alpha_{22})\tau = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{2h_1}{R_1} + \ln \frac{2h_2}{R_2} - 2 \ln \frac{D}{d} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{4h_1h_2d^2}{R_1R_2D^2} \end{aligned}$$

Откуда следует формула рабочей емкости линии с учетом влияния земли:

$$C_{\text{раб}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(4h_1h_2d^2/R_1R_2D^2)} \text{ [Ф/м]}.$$

Если линия расположена достаточно высоко над поверхностью земли ($h \gg d$), то $D \approx 2h$ и уравнение для рабочей емкости превращается в урав-

нение $C_0 \approx \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln d/R}$, которое было получено ранее для двухпроводной линии без учета влияния земли.

9. Электрическое поле трехфазной линии электропередачи

Геометрические размеры в поперечном сечении линии электропередачи несравнимо малы по сравнению с длиной электромагнитной волны на частоте 50 Гц ($\lambda_{50} = 6000\text{км}$). По этой причине волновые процессы в поперечном сечении линии могут не учитываться, а полученные ранее соотношения для многопроводной линии в статическом режиме с большой степенью точности могут быть применены к расчету поля линий электропередач переменного тока на промышленной частоте $f = 50$ Гц. Изменяющиеся по синусоидальному закону потенциалы проводов ЛЭП по отношению к параметрам поля можно считать квазистатическими или медленно изменяющимся, и расчет параметров поля для каждого момента времени можно выполнять по полученным ранее уравнениям электростатики.

При синусоидальном законе изменения потенциалов и зарядов проводов формулы Максвелла можно записать в комплексной форме:

$$\begin{cases} \underline{V}_A = \alpha_{AA}\underline{\tau}_A + \alpha_{AB}\underline{\tau}_B + \alpha_{AC}\underline{\tau}_C = U_{\phi m} e^{j0^\circ} \\ \underline{V}_B = \alpha_{BA}\underline{\tau}_A + \alpha_{BB}\underline{\tau}_B + \alpha_{BC}\underline{\tau}_C = U_{\phi \delta} e^{-j120^\circ} \\ \underline{V}_C = \alpha_{CA}\underline{\tau}_A + \alpha_{CB}\underline{\tau}_B + \alpha_{CC}\underline{\tau}_C = U_{\phi \delta} e^{j120^\circ} \end{cases} .$$

Потенциалы проводов ЛЭП равны соответствующим фазным напряжениям и определяются генератором.

Для трехфазных ЛЭП применяются различные варианты расположения проводов в пространстве. На рис. 120 приведены два из них: а) по вершинам равностороннего треугольника, б) в одной плоскости, параллельной поверхности земли. В первом варианте равны расстояния между проводами ($d_{AB} = d_{BC} = d_{CA} = d$), но не равны их высоты над землей ($h_A \neq h_B \neq h_C$). Во втором варианте не равны расстояния между проводами ($d_{AB} \neq d_{BC} \neq d_{CA}$), но равны их высоты над землей ($h_A = h_B = h_C$). Таким образом, в воздушных трехфазных ЛЭП не может быть достигнута полная симметрия проводов в пространстве. Потенциальные коэффициенты $\alpha_{AB}, \alpha_{BA}, \dots$, которые определяются через геометрические расстояния, будут несимметричными в формулах первой группы формул Максвелла. Несимметрия потенциальных коэффициентов вызовет несимметрию зарядов проводов $\underline{\tau}_A, \underline{\tau}_B, \underline{\tau}_C$ и соответствующую несимметрию зарядных токов

линии $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ в режиме холостого хода. Полная симметрия проводов в пространстве достигается только в кабельных линиях.

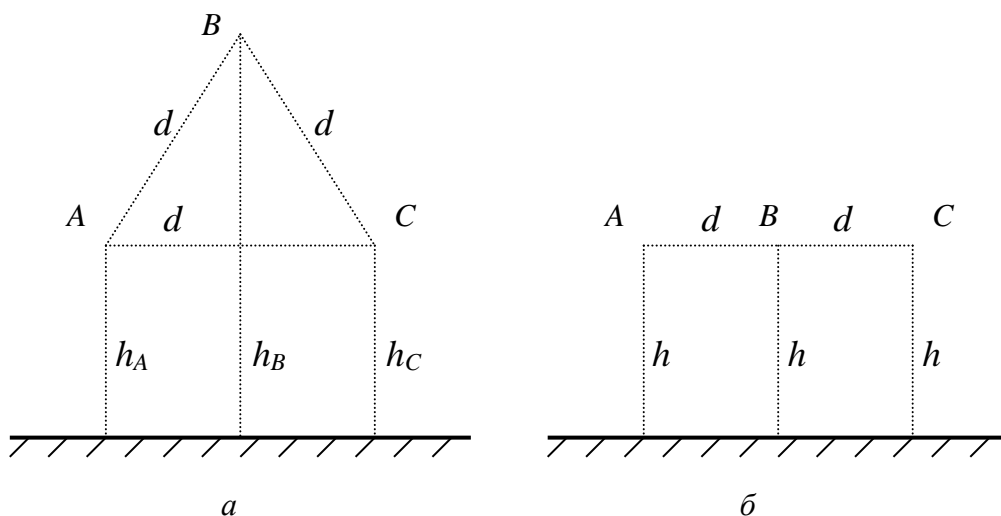


Рис. 120

Для устранения несимметрии фаз воздушных линий электропередачи через равные расстояния (обычно через $1/3$ длины) производят круговую перестановку или транспозицию проводов (рис. 121). При наличии транспозиции усредненные значения параметров линии получаются одинаковыми для всех фаз, при этом несимметрия между началом и концом линии устраняется.

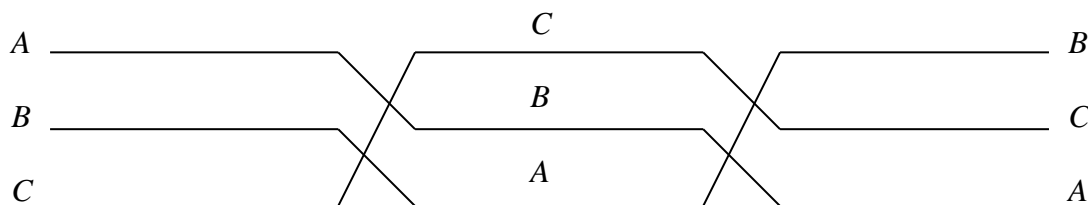


Рис. 121

Средние значения потенциалов коэффициентов для транспонированной линии:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{собр}} &= \frac{1}{3}(\alpha_{AA} + \alpha_{BB} + \alpha_{CC}) = \frac{1}{3 \cdot 2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{2h_A}{R} + \ln \frac{2h_B}{R} + \ln \frac{2h_C}{R} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln 2 \frac{\sqrt[3]{h_A \cdot h_B \cdot h_C}}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R} \end{aligned}$$

$$\alpha_{B3} = \frac{1}{3}(\alpha_{AB} + \alpha_{BC} + \alpha_{CA}) = \frac{1}{3 \cdot 2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{D_{AB}}{d_{AB}} + \ln \frac{D_{BC}}{d_{BC}} + \ln \frac{D_{CA}}{d_{CA}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt[3]{D_{AB} \cdot D_{BC} \cdot D_{CA}}}{\sqrt[3]{d_{AB} \cdot d_{BC} \cdot d_{CA}}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d},$$

где $h = \sqrt[3]{h_A \cdot h_B \cdot h_C}$; $D = \sqrt[3]{D_{AB} \cdot D_{BC} \cdot D_{CA}}$; $d = \sqrt[3]{d_{AB} \cdot d_{BC} \cdot d_{CA}}$ – среднегеометрические значения расстояний.

Потенциальное уравнение для провода фазы A транспонированной линии получит вид:

$$\underline{U}_A = \underline{\varphi}_A = \alpha_{\text{соб}} \underline{\tau}_A + \alpha_{B3} \underline{\tau}_B + \alpha_{B3} \underline{\tau}_C = \alpha_{\text{соб}} \underline{\tau}_A + \alpha_{B3} \underline{\tau}_A e^{-j120^\circ} + \alpha_{B3} \underline{\tau}_A e^{j120^\circ} =$$

$$= \left[\alpha_{\text{соб}} + (e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}) \alpha_{B3} \right] \cdot \underline{\tau}_A = (\alpha_{\text{соб}} - \alpha_{B3}) \underline{\tau}_A$$

Из полученного выражения следует формула для удельной емкости фазы ЛЭП на землю:

$$C_0 = \frac{\underline{\tau}_A}{\underline{U}_A} = \frac{1}{\alpha_{\text{соб}} - \alpha_{B3}} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R} - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2hd}{RD}} \quad [\text{Ф/М}].$$

Если длина линии равна l , то эквивалентная емкость фазы на землю составит $C_\Phi = C_0 l$, а ток холостого хода линии будет равен $I_0 = U_\Phi / X_C = U_\Phi \omega C$.

Исследуем, как будет изменяться напряженность электрического поля в произвольной точке n в поперечном сечении линии (рис. 122, a) в интервале времени одного периода.

Результирующий вектор напряженности поля \overline{E}_n будет равен геометрической сумме отдельных составляющих:

$$\overline{E}_n = \overline{E}_{nA} + \overline{E}_{nB} + \overline{E}_{nC} + \overline{E}'_{nA} + \overline{E}'_{nB} + \overline{E}'_{nC}.$$

Расчеты показывают, что в интервале времени одного периода вектор \overline{E} будет изменяться по модулю и по направлению и за один период опишет эллипсоидную фигуру (рис. 122, b). Таким образом, электрическое поле в поперечном сечении ЛЭП является вращающимся, но не круговым, эллиптическим по форме. Максимальное значение этого вектора E_{max} соответствует большой полуоси эллипса.

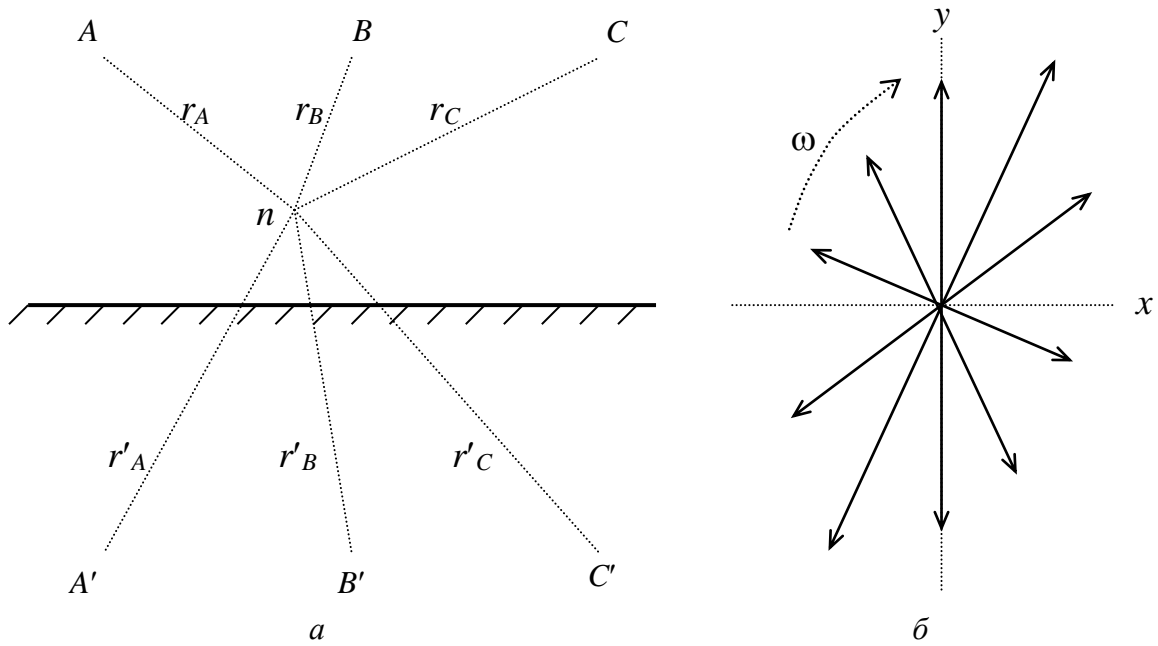


Рис. 122

На рис. 123 представлена графическая диаграмма $E_{\max} = f(x)$ при $y = 1 \text{ м} = \text{const}$ для ЛЭП с расположением проводов в плоскости, параллельной поверхности земли. Анализ диаграммы показывает, что абсолютный максимум этой функции имеет место с внешней стороны крайних проводов ЛЭП, а под средней фазой напряженность поля меньше, чем под крайними фазами (рис. 123).

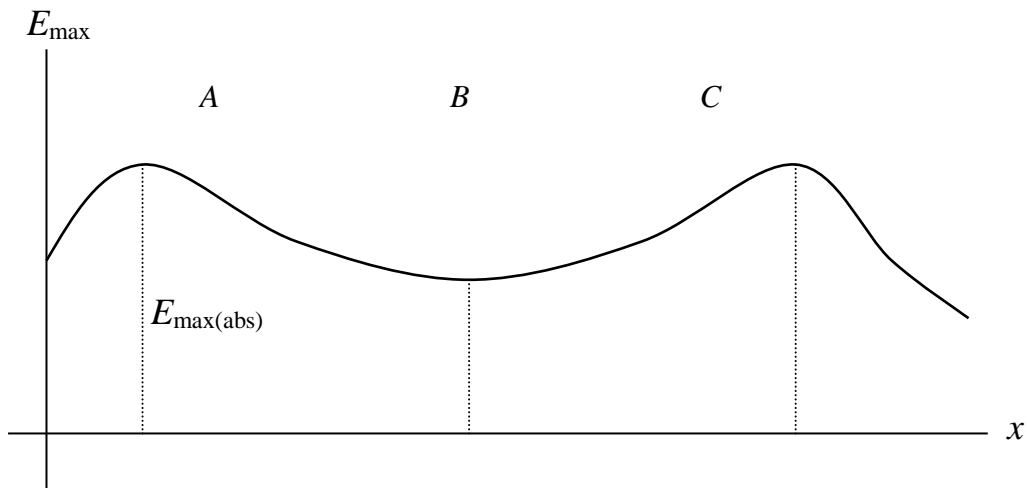


Рис. 123

Т2. Электрическое поле постоянного тока

1. Законы электрического поля в интегральной и дифференциальной формах

Под электрическим током проводимости i понимается движение свободных зарядов в проводящей среде γ под действием сил электрического поля \vec{E} . Ток проводимости в каждой точке среды характеризуется вектором плотности:

$$\vec{\delta} = \frac{di}{dS_n} \text{ [A/m}^2\text{]}.$$

Направление вектора $\vec{\delta}$ совпадает с направлением положительных зарядов. Ток, протекающий через произвольную площадку s , связан с вектором $\vec{\delta}$ уравнением: $i = \int_s \vec{\delta} \cdot d\vec{s}$.

Выделим мысленно в проводящей среде, где протекает ток, элементарный цилиндр длиной dl с основанием ds так, чтобы вектор $\vec{\delta}$ был направлен вдоль оси цилиндра (рис. 124).

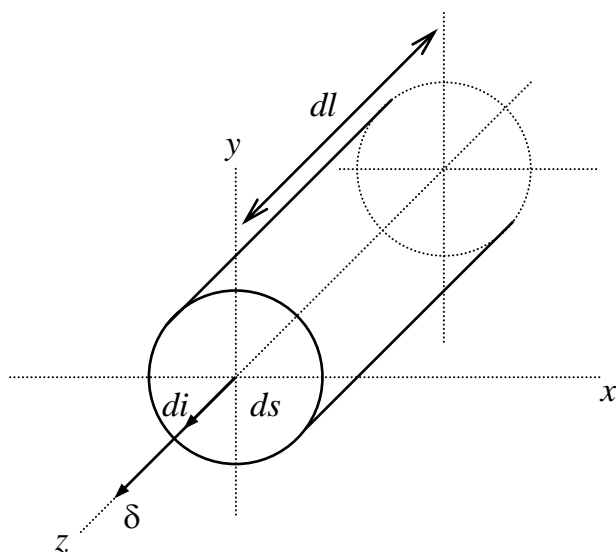


Рис. 124

Ток, протекающий вдоль цилиндра:

$$di = \int_s \vec{\delta} \cdot d\vec{s} = \delta \cdot ds.$$

Напряжение между концами цилиндра:

$$du = \int \vec{E} d\vec{l} = \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

где \vec{E} – вектор напряженности электрического поля, под действием которого возникает ток.

Сопротивление цилиндра, как проводника:

$$dR = \rho \frac{dl}{ds} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dl}{ds},$$

где γ – удельная проводимость среды [См/м].

Сопротивление цилиндра по закону Ома:

$$dR = \frac{du}{di} = \frac{\vec{E} dl}{\vec{\delta} ds}.$$

Приравнивая правые части равенств, получим:

$$\boxed{\bar{\delta} = \gamma \bar{E}} \quad - \text{уравнение закона Ома в дифференциальной форме}$$

Мощность, выделяемая в цилиндре по закону Джоуля:

$$dP = (di)^2 \cdot dR = \delta^2 ds^2 \cdot \frac{dl}{\gamma ds} = \frac{\delta^2}{\gamma} dv,$$

откуда $p = \frac{dP}{dv} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2$ [Вт/м³] – уравнение закона Джоуля в дифференциальной форме, которое характеризует интенсивность выделения энергии вокруг рассматриваемой точки.

Если внутри цилиндра окажутся источники энергии, создающие дополнительную составляющую напряженности поля \bar{E}_{cm} (напряженность поля сторонних сил), то $\bar{E}_s = \bar{E} + \bar{E}_{cm}$ и закон Ома в дифференциальной форме получит вид:

$$\bar{\delta} = \gamma(\bar{E} + \bar{E}_{cm}).$$

Как известно, выражение первого закона Кирхгофа в интегральной форме имеет вид:

$$\sum i = i_1 + i_2 + \dots = 0.$$

Выразим каждый из токов i_1, i_2, \dots через вектор плотности тока $\bar{\delta}$:

$$\sum i = \int_{S_1} \bar{\delta} \cdot \bar{ds} + \int_{S_2} \bar{\delta} \cdot \bar{ds} + \dots = \oint_S \bar{\delta} \cdot \bar{ds} = 0.$$

Преобразуем полученное уравнение по теореме Остроградского-Гаусса: $\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{\delta} \cdot \bar{ds}}{\Delta v} = \text{div} \bar{\delta}$, следовательно:

$\text{div} \bar{\delta} = 0$ – уравнение первого закона Кирхгофа в дифференциальной форме.

Из этого уравнения следует вывод, что линии вектора $\bar{\delta}$ непрерывны и замкнуты.

Интегральная форма уравнения 2-го закона Кирхгофа для контура, не содержащего источников ЭДС, имеет вид:

$$\sum u = u_1 + u_2 + \dots = 0.$$

Выразим каждое из напряжений через вектор напряженности поля \bar{E} :

$$\sum u = \int_{l_1} \bar{E} \cdot \bar{dl} + \int_{l_2} \bar{E} \cdot \bar{dl} + \dots = \oint_l \bar{E} \cdot \bar{dl} = 0 ,$$

и преобразуем полученное уравнение по теореме Стокса:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{E} \cdot \bar{dl}}{\Delta S} = \text{rot}_n \bar{E} = 0 .$$

Последнее уравнение справедливо для любого направления, следовательно:

$\text{rot} \bar{E} = 0$ – уравнение второго закона Кирхгофа в дифференциальной форме.

Из этого уравнения следует вывод, что электрическое поле постоянного тока безвихревое, потенциальное и в каждой точке может быть описано потенциальной функцией согласно уравнению:

$$\bar{E} = -\text{grad}V .$$

Преобразуем уравнение первого закона Кирхгофа:

$$\text{div} \bar{\delta} = \text{div} \gamma \bar{E} = \text{div} (-\gamma \text{grad}V) = -\gamma \cdot \text{div} \cdot \text{grad}V = 0 ,$$

откуда следует: $\text{div} \text{grad}V = 0$ или $\nabla^2 V = 0$ – уравнение Лапласа для электрического поля постоянного тока.

На границе раздела двух сред с различными проводимостями γ_1 и γ_2 выделим точку и окружим ее элементарной призмой, у которой высота бесконечно мала по сравнению с линейными размерами оснований (рис. 125, а).

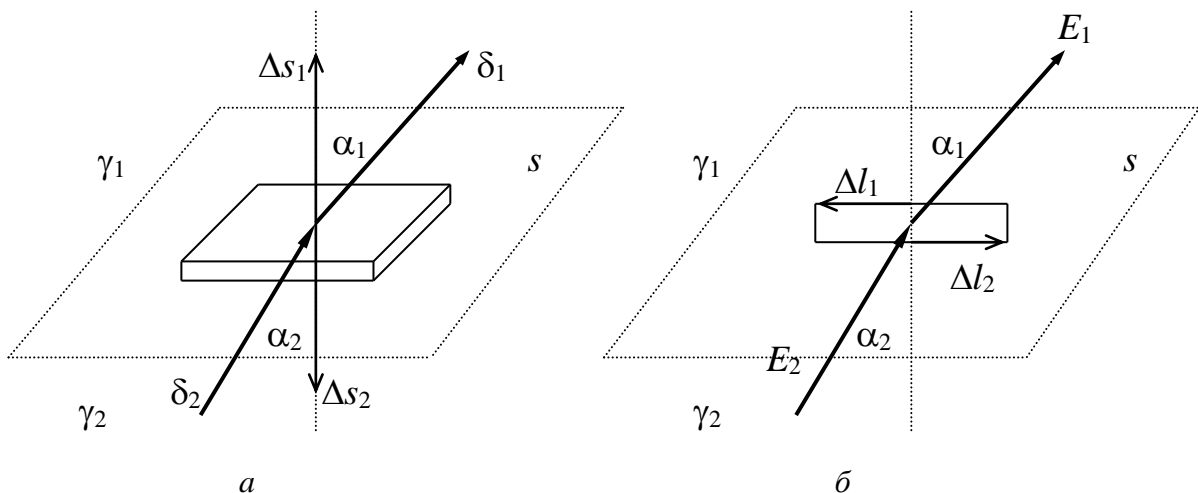


Рис. 125

Применяя первый закон Кирхгофа, получим:

$$\oint_S \overline{\delta} ds = \int_{S_1} \overline{\delta}_1 ds + \int_{S_2} \overline{\delta}_2 ds = \delta_1 \Delta s_1 \cos \alpha_1 - \delta_2 \Delta s_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

Откуда следует, что $\delta_{1n} = \delta_1 \cos \alpha_1 = \delta_{2n} = \delta_2 \cos \alpha_2$ – на границе раздела двух сред с различными проводимостями равны нормальные составляющие вектора плотности тока $\overline{\delta}$.

Окружим точку элементарным прямоугольником (рис. 125, б), у которого высота бесконечно мала по сравнению с длиной. Применяя второй закон Кирхгофа к контуру прямоугольника, получим:

$$\oint E dl = \int_{l_1} \overline{E}_1 dl + \int_{l_2} \overline{E}_2 dl = E_1 l_1 \sin \alpha_1 - E_2 l_2 \sin \alpha_2 = 0.$$

Откуда следует, что $E_{1t} = E_1 \sin \alpha_1 = E_{2t} = E_2 \sin \alpha_2$ – на границе раздела двух сред с различными проводимостями γ_1 и γ_2 равны тангенциальные составляющие вектора напряженности поля \overline{E} .

Разделим почленно левые и правые части полученных уравнений и учтем, что $\delta_1 = \gamma_1 E_1$ и $\delta_2 = \gamma_2 E_2$, в итоге получим:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad - \text{условие преломления линий поля на границе раздела}$$

двух сред с различными проводимостями γ_1 и γ_2 .

2. Методы расчета электрических полей постоянного тока

Электрическое поле постоянного тока, с одной стороны, и электростатическое поле вне электрических зарядов ($\rho_{\text{св}} = 0$), с другой стороны, описываются одинаковыми по структуре математическими уравнениями. Для сравнения сведем эти уравнения в общую таблицу.

Электрическое поле постоянного тока	Электростатическое поле при отсутствии зарядов ($\rho_{\text{св}} = 0$)
$\overline{\delta} = \gamma \overline{E}$	$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E}$
$\operatorname{div} \overline{\delta} = 0$	$\operatorname{div} \overline{D} = \rho_{\text{я}} = 0$
$\operatorname{rot} \overline{E} = 0$	$\operatorname{rot} \overline{E} = 0$
$\nabla^2 V = 0$	$\nabla^2 V = 0$
$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Как следует из приведенной таблицы, оба поля описываются одинаковыми по структуре уравнениями и к ним применим принцип двойственности. Таким образом, для расчета электрических полей постоянного тока, можно применять те же расчетные методы, которые были получены ранее для электростатических полей, при условии соответствующих замен в расчетных формулах физических величин и коэффициентов: $\vec{D} \rightarrow \vec{\delta}$, $\epsilon_0 \rightarrow \gamma$, $q \rightarrow i$, $C \rightarrow G$. С другой стороны, для экспериментального исследования сложных по конфигурации электростатических полей применяется их физическое моделирование с помощью электрических полей постоянного тока.

В электростатике очень важное значение имеет теоретическое понятие точечного заряда q . По аналогии введем понятие точечного тока i , который растекается в проводящей среде из одной точки, при этом в этой точке плотность тока $\vec{\delta} = \infty$.

Рассмотрим несколько примеров расчета электрических полей постоянного тока.

Пример 1. Заземлитель шаровой формы с радиусом R находится на большой глубине h ($h \gg R$). К заземлителю подведено напряжение U (рис. 126).

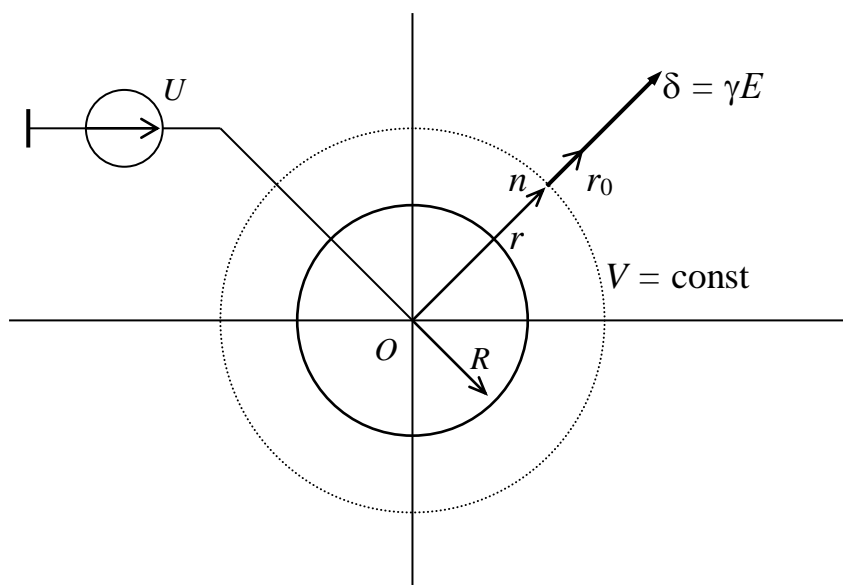


Рис. 126

Заменяем суммарный ток, стекающий с поверхности заземлителя точечным током i , который растекается из центра заземлителя. Применим расчетные формулы из теории электростатического поля точечного заряда, заменив $\vec{D} \rightarrow \vec{\delta}$, $\epsilon_0 \rightarrow \gamma$, $q \rightarrow i$, $C \rightarrow G$:

$$i = \int_S \vec{\delta} dS = 4\pi r^2 \vec{\delta} = 4\pi r^2 \gamma E, \text{ откуда } \vec{E} = \frac{i}{4\pi \gamma r^2} \cdot \vec{r}, \quad V = -\int E dr = \frac{i}{4\pi \gamma r} + C,$$

если принять $\varphi_\infty = 0$, то постоянная интегрирования $C = 0$.

Потенциал на поверхности заземлителя при $r = R$:

$$V(R) = U = \frac{i}{4\pi\gamma R},$$

откуда получаем формулы для сопротивления заземлителя и его тока:

$$R_3 = \frac{U}{i} = \frac{1}{4\pi\gamma R}, \quad i = \frac{U}{R_3} = U \cdot 4\pi\gamma R.$$

Пример 2. Заземлитель в виде шара расположен на сравнительно небольшой глубине h , соизмеримой с его радиусом R (рис. 127).

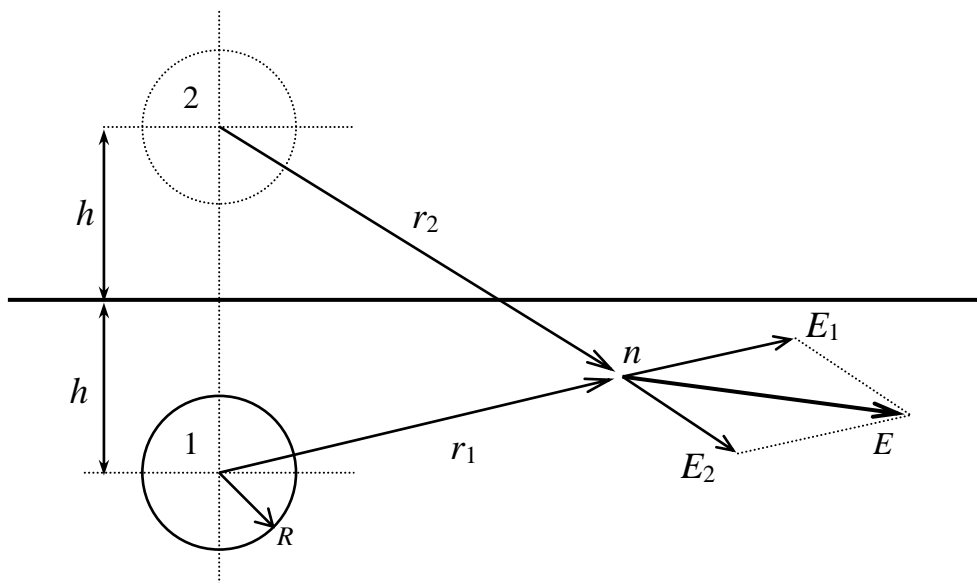


Рис. 127

Применим к решению задачи метод зеркальных отображений. Заменим в верхней полуплоскости диэлектрик ϵ проводящей средой γ и зеркально расположим там такой же заземлитель той же полярности, при этом граничные условия на поверхности земли не изменятся (линии вектора E направлены по касательной вдоль поверхности). Заменим токи, стекающие с поверхностей обоих заземлителей, равными по величине точечными токами, растекающимися из электрических центров 1 и 2, которые будут смещены относительно геометрических центров так, чтобы сохранились прежними граничные условия на поверхности шаров (поверхности должны остаться эквипотенциальными с потенциалом $\varphi = U$). После определения положения электрических центров расчет параметров поля в произвольной точке n производится по методу наложения:

$$\bar{E}_n = \bar{E}_{n1} + \bar{E}_{n2} = \frac{i}{4\pi\gamma r_1^2} \bar{r}_{01} + \frac{i}{4\pi\gamma r_2^2} \bar{r}_{02}$$

$$V_n = V_{n1} + V_{n2} = \frac{i}{4\pi\gamma r_1} + \frac{i}{4\pi\gamma r_2}.$$

При соотношении $h \gg R$ потенциал на поверхности заземлителя будет равен:

$$V = U = V_1 + V_2 \approx \frac{i}{4\pi\gamma R} + \frac{i}{4\pi\gamma 2h} = \frac{i}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2h} \right),$$

откуда следует формула для определения сопротивления заземлителя:

$$R_3 = \frac{U}{i} = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2h} \right).$$

Пример 3. Определить шаговое напряжение $U_{ш}$ на заданном расстоянии x от центра опоры высоковольтной ЛЭП при коротком замыкании одной из фаз линии на опору (рис. 128).

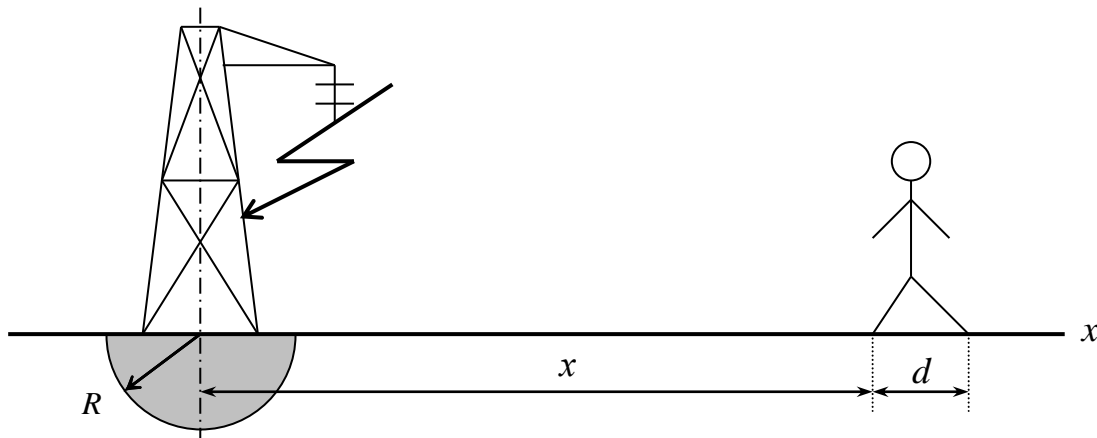


Рис. 128

Для упрощения расчетов будем считать, что заземлитель опоры имеет форму полушария с радиусом R . Заменяем диэлектрик в верхней части пространства проводящей средой γ , а заземлитель дополним зеркальным отображением до полного шара. После таких преобразований решение задачи сводится к расчету поля шарового заземлителя п.1.:

$$I_3 = U_\phi \cdot 4\pi\gamma R; \quad E(r) = \frac{I_3}{4\pi\gamma r^2} = \frac{U_\phi R}{r^2}; \quad U_{ш} = \int_{x+d}^x E dr = \int_{x+d}^x \frac{U_\phi R}{r^2} dr = U_\phi R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+d} \right),$$

где U_ϕ – фазное напряжение ЛЭП, R – радиус заземлителя опоры.

Пример 4. Требуется рассчитать электрическое поле вертикального цилиндрического заземлителя диаметром D и длиной h . К заземлителю подведено напряжение U (рис. 129).

Заменим диэлектрик в верхней части пространства проводящей средой γ , а заземлитель дополним его зеркальным отображением. Будем считать, что электрический ток стекает с оси заземлителя, где $\tau = f(y)$ – линейная плотность тока стекания [А/м]. Вид функции $\tau = f(y)$ должен удовлетворять граничным условиям, а именно, поверхность заземлителя должна быть эквипотенциальной с потенциалом $\phi = U$. Расчеты показывают, что линейная плотность тока τ по концам заземлителя значительно больше, чем в его середине. Тогда $di = \tau dl$ – элемент тока.

Параметры поля получаются в результате интегрирования соответствующих уравнений по всей длине заземлителя:

$$\vec{E} = \int_{-h}^{+h} \frac{\tau dl}{4\pi\gamma r^2} \vec{r}_0; \quad V = \int_{-h}^{+h} \frac{\tau dl}{4\pi\gamma r}.$$

Расчеты полей сложной конфигурации выполняются как правило на ЭВМ методом численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений.

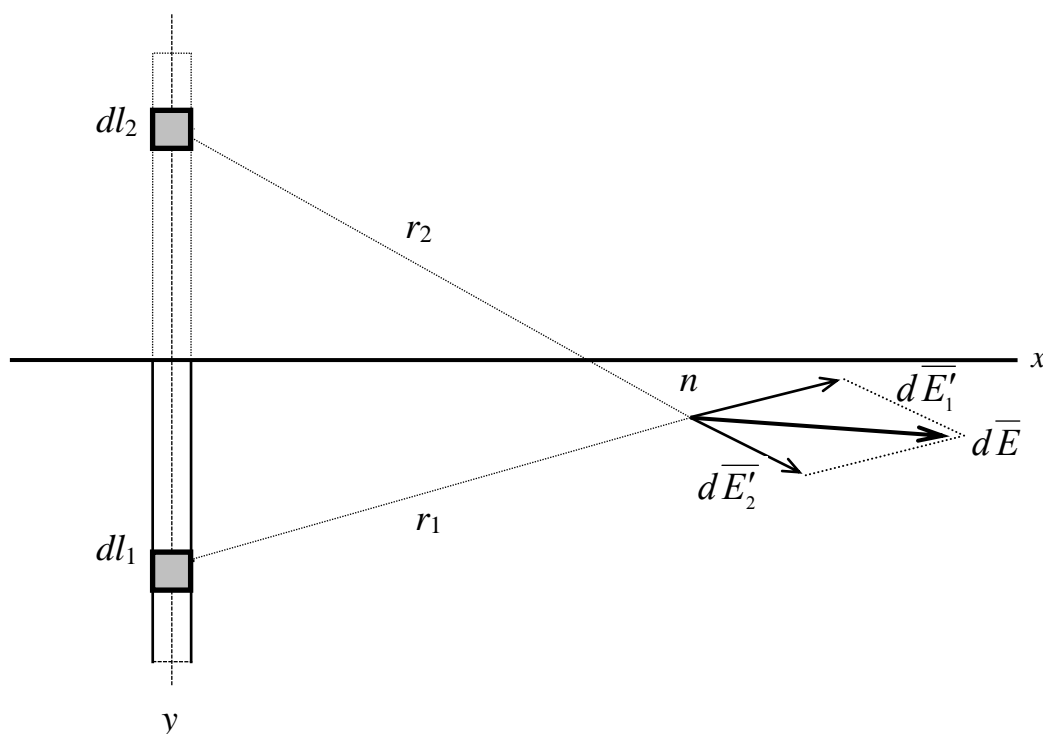


Рис. 129

Т3. Магнитное поле постоянных токов

1. Уравнения магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах

Магнитное поле характеризуется двумя векторными величинами:

\vec{H} – вектор напряженности магнитного поля, создается электрическими токами, является первопричиной магнитного поля [А/м];

\vec{B} – вектор индукции магнитного поля или плотность магнитных силовых линий [Тл].

Между векторами \vec{B} и \vec{H} существует связь:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H},$$

где $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6}$ [Гн/м] – магнитная проницаемость пустоты, μ – относительная магнитная проницаемость.

Известный из курса физики закон Био-Савара-Лапласа устанавливает связь между элементарным вектором магнитной индукции $d\vec{B}$ в произвольной точке пространства и элементом тока $d\vec{i} = I \cdot d\vec{l}$ (рис. 130):

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}_0]}{r^2}; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}_0]}{r^2}.$$

На основе закона Био-Савара-Лапласа выполняется расчет магнитного поля сложных систем проводников с токами.

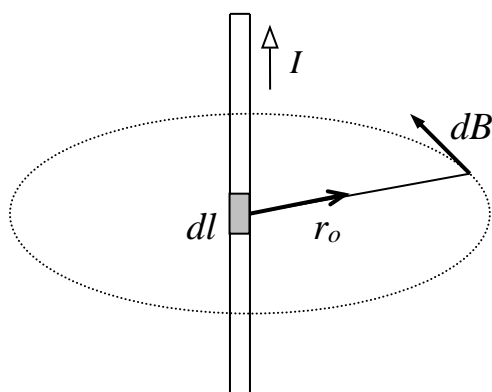


Рис. 130

Закон Ампера определяет силу взаимодействия магнитного поля на элемент проводника с током:

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \cdot \vec{B}],$$

откуда следует, что сила, действующая на проводник, равна

$$\vec{F} = I \int_l [d\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

На прямолинейный проводник с током I в равномерном магнитном поле действует сила $F = BIl \sin(B \wedge l)$, направление которой определяется по правилу левой руки.

1-й закон Кирхгофа для магнитной цепи, выражающий непрерывность магнитных силовых линий поля, имеет вид:

$$\sum \Phi = \sum \int_S \bar{B} \cdot \bar{ds} = \oint_S \bar{B} \cdot \bar{ds} = 0 \quad \text{– интегральная форма уравнения непрерывности магнитных линий.}$$

Преобразуем это уравнение по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \bar{B} \cdot \bar{ds}}{\Delta V} = \operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad \text{– дифференциальная форма уравнения непрерывности магнитных линий.}$$

Закон полного тока для магнитного поля имеет вид:

$$\oint_S \bar{H} \cdot \bar{dl} = \sum i = i_{\text{пол}} \quad \text{– интегральная форма закона полного тока.}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения по теореме Стокса:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_S \bar{H} \cdot \bar{dl}}{\Delta S} = \operatorname{rot} \bar{H}, \quad \text{а в правой части получим: } \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{i_{\text{пол}}}{\Delta S} = \frac{di}{dS_n} = \bar{\delta}_n.$$

Следовательно:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} \quad \text{– дифференциальная форма закона полного тока.}$$

Граничные условия в магнитном поле на границе раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 выражаются уравнениями:

$$B_{1n} = B_1 \cos \alpha_1 = B_{2n} = B_2 \cos \alpha_2$$

$$H_{1t} = H_1 \sin \alpha_1 = H_{2t} = H_2 \sin \alpha_2$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

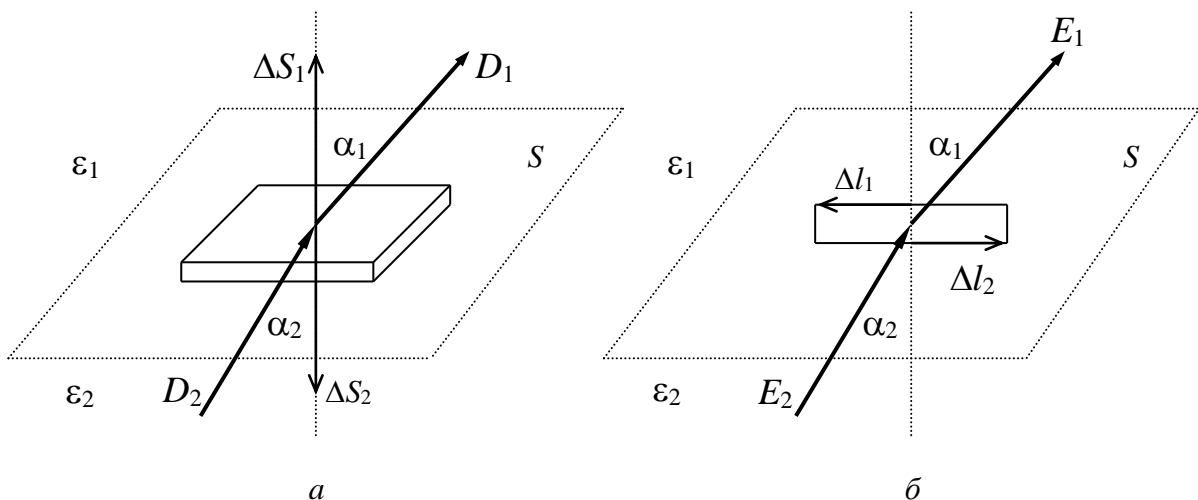


Рис. 131

На границе раздела двух сред равны нормальные составляющие вектора B и тангенциальные составляющие вектора H .

Магнитное поле несет в себе энергию, плотность которой определяется уравнением:

$$w = \frac{dW_m}{dV} = \frac{\overline{BH}}{2} = \frac{\mu\mu_0}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \text{ [Дж/м}^3\text{]}$$

2. Векторный потенциал магнитного поля

Пусть требуется рассчитать магнитное поле в однородной среде ($\mu = \text{const}$), в которой протекает электрический ток, плотность которого задана в виде некоторой функции координат $\overline{\delta}(x, y, z)$. Для определения векторов поля $\overline{B}(x, y, z)$ и $\overline{H}(x, y, z)$ необходимо решить систему уравнений:

$$\text{div} \overline{B} = 0 \quad (1)$$

$$\text{rot} \overline{H} = \overline{\delta} \quad (2)$$

$$\overline{B} = \mu\mu_0 \overline{H} \quad (3)$$

Введем новую векторную величину \overline{A} , позволяющую исключить из системы уравнений неизвестные \overline{B} и \overline{H} и получить одно дифференциальное уравнение, решение которого известно в математике.

Пусть вектор \overline{A} , получивший название вектора потенциала магнитного поля, удовлетворяет условию: $\overline{B} = \text{rot} \overline{A}$

Так как div rot любого вектора тождественно равна нулю, то уравнение (1) выполняется тождественно: $\text{div} \overline{B} = \text{div rot} \overline{A} = 0$

$$\text{Из уравнения (2) следует: } \text{rot} \overline{H} = \text{rot} \frac{\overline{B}}{\mu\mu_0} = \frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot} \overline{A} = \overline{\delta}$$

$$\text{Из курса математики известно, что } \text{rot rot} \overline{A} = \text{grad div} \overline{A} - \nabla^2 \overline{A} = \mu\mu_0 \overline{\delta}.$$

В полученном уравнении можно принять $\text{div} \overline{A} = 0$, не нарушая равенства $\overline{B} = \text{rot} \overline{A}$. Тогда получим:

$\nabla^2 \overline{A} = -\mu\mu_0 \overline{\delta}$ – уравнение Пуассона для векторного потенциала магнитного поля для областей среды, где протекают токи проводимости. Для областей среды, где токи проводимости отсутствуют, уравнение Пуассона превращается в уравнение Лапласа $\nabla^2 \overline{A} = 0$. Каждое из этих векторных уравнений в декартовой системе координат распадается на три скалярных в направлении координатных осей:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu\mu_0 \delta_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu\mu_0 \delta_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu\mu_0 \delta_z \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 A_x = 0 \\ \nabla^2 A_y = 0 \\ \nabla^2 A_z = 0 \end{cases}$$

Решения уравнений Пуассона для векторного потенциала \bar{A} имеют вид (без вывода):

$$A_x = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x}{r} dv; \quad A_y = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y}{r} dv; \quad A_z = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z}{r} dv$$

$$\bar{A} = \bar{i}A_x + \bar{j}A_y + \bar{k}A_z = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\delta}}{r} dv.$$

Если решение для векторного потенциала \bar{A} найдено, то другие неизвестные величины выражаются через векторный потенциал:

$$\bar{B} = \text{rot}\bar{A}$$

$$\Phi = \int_S \bar{B} dS = \int_S \text{rot}\bar{A} dS = \dots = \oint_l \bar{A} dl$$

$$W_M = \int_V \frac{B^2}{2\mu\mu_0} dv = \dots = \frac{1}{2} \int_V \bar{\delta} \cdot \bar{A} dv.$$

Если токи протекают по линейным проводникам, поперечные размеры которых весьма малы по сравнению с их длиной, то выражение для векторного потенциала \bar{A} можно упростить следующим образом:

$$\bar{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\delta}}{r} dv = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_l \int_S \frac{\bar{\delta}}{r} dS dl = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{dl}{r} \int_S \bar{\delta} dS = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{i}{r} dl,$$

где $i = \int_S \bar{\delta} \cdot d\bar{s}$ – ток в проводнике

В последнем уравнении интегрирование по объему заменяется интегрированием по контурам линейных проводов, что упрощает его решение.

3. Скалярный потенциал магнитного поля

Ранее для электростатического поля вне зарядов ($\rho = 0$) была получена система уравнений :

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{H}; \quad \text{div}\bar{D} = 0; \quad \text{rot}\bar{H} = 0; \quad \bar{E} = -\text{grad}\phi; \quad \nabla^2\phi = 0.$$

Для магнитного поля вне токов ($\delta = 0$) система уравнений имеет вид:

$$\bar{B} = \mu\mu_0 \bar{H}; \quad \text{div}\bar{B} = 0; \quad \text{rot}\bar{H} = 0.$$

Сравнение этих систем уравнений показывает, что они имеют одинаковую структуру и, следовательно, к их решению применим принцип

двойственности. Это значит, что к расчету магнитного поля в областях вне токов могут быть применены методы, заимствованные из электростатики. Введем по аналогии понятие скалярного магнитного потенциала $\varphi_M(x, y, z)$ из условия:

$$\vec{H} = -\text{grad}\varphi_M, \quad \nabla^2\varphi_M = 0;$$

Применение понятия скалярного потенциала $\varphi_M(x, y, z)$ в ряде случаев значительно упрощает решение задач по расчету магнитного поля вне токов. Следует иметь в виду, что для электрического поля напряжение

$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ не зависит от выбора пути интегрирования, в то же

время магнитное напряжение $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma i$ зависит от выбора этого пути.

4. Магнитное поле цилиндрического проводника с током

Пусть по бесконечно длинному цилиндрическому проводу радиуса R протекает постоянный ток I . Выберем систему координат x, y, z так, чтобы ось провода совпадала с осью координат z (рис. 132).

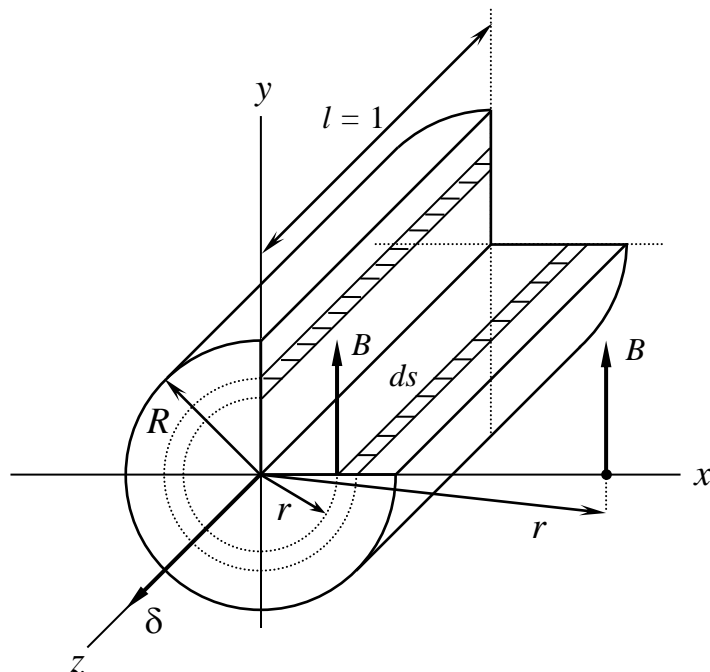


Рис. 132

Будем считать, что ток равномерно распределяется по сечению провода, тогда его плотность будет равна $\vec{\delta} = \frac{I}{s} = \frac{I}{\pi R^2}$.

Для исследования магнитного поля выделим две неравнозначные области, для каждой из которых выполним расчет параметров магнитного поля:

1) область внутри провода при $0 \leq r \leq R$,

2) область вне провода при $R \leq r \leq \infty$.

Для расчета поля во внутренней области выберем контур интегрирования в виде окружности с текущим радиусом $r < R$. Тогда ток внутри контура интегрирования:

$$i(r) = \bar{\delta}\pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}, \text{ откуда } \frac{i(r)}{I} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Применим к контуру интегрирования закон полного тока в интегральной форме :

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = H 2\pi r = i_{\text{пол}} = i(r) = I \frac{r^2}{R^2},$$

откуда следует
$$H = \frac{I}{2\pi R^2} r \text{ и } B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

Векторы \bar{B} и \bar{H} направлены по касательной к окружности, их направление определяется по правилу правоходового винта.

При увеличении радиуса на элементарную величину dr произойдет приращение магнитного потока на величину $d\phi$ на единицу длины провода ($l = 1$) и приращение магнитного потокосцепления на величину $d\psi$:

$$d\phi = B ds = B l dr = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R^2} r dr$$

$$d\psi = d\phi \frac{i(r)}{I} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi R^2} r dr \frac{r^2}{R^2} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi R^4} r^3 dr$$

Внутренний магнитный поток и внутреннее потокосцепление найдутся в результате интегрирования полученных выше выражений по всему сечению провода:

$$\Phi_{\text{внутр.}} = \int_0^R d\phi = \int_0^R \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R^2} r \cdot dr = \frac{\mu\mu_0}{4\pi},$$

$$\Psi_{\text{внутр.}} = \int_0^R d\psi = \int_0^R \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R^4} r^3 \cdot dr = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}.$$

Из последнего уравнения следует формула для внутренней индуктивности провода на единицу длины :

$$L_{\text{внутр.}} = \frac{\Psi_{\text{внутр.}}}{I} = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \quad [\text{Гн/м}]$$

Внутренняя индуктивность провода зависит от его магнитной проницаемости μ (для стальных проводов она значительно больше, чем для медных или алюминиевых) и не зависит от его радиуса.

Для расчета поля во внешней области выберем контур интегрирования в виде окружности с текущим радиусом $r > R$. Ток внутри контура интегрирования равен I и не зависит от текущего значения радиуса r . Из закона полного тока следует:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H 2\pi r = i_{\text{пол}} = I, \quad \text{откуда} \quad H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Приращения магнитного потока $d\phi$ и потокосцепления $d\psi$ будут равны:

$$d\phi = d\psi = B ds = B l dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr.$$

Внешний магнитный поток $\Phi_{\text{внеш}}$ и соответственно внешнее потокосцепление $\Psi_{\text{внеш}}$ найдутся в результате интегрирования полученных выше выражений по сечению вне провода:

$$\Phi_{\text{внешн.}} = \Psi_{\text{внешн.}} = \int_R^{R'} d\psi = \int_R^{R'} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R'}{R},$$

где $R' < \infty$ – внешний радиус в окружающем провод пространстве, где производится расчет параметров поля.

Внешняя индуктивность провода на единицу длины :

$$L_{\text{внешн.}} = \frac{\Psi_{\text{внешн.}}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R'}{R} \quad [\text{Гн/м}].$$

5. Магнитное поле двухпроводной линии

По двухпроводной линии с заданными геометрическими размерами (рис. 133) (R – радиус проводов, d – расстояние между осями проводов) протекает постоянный ток I .

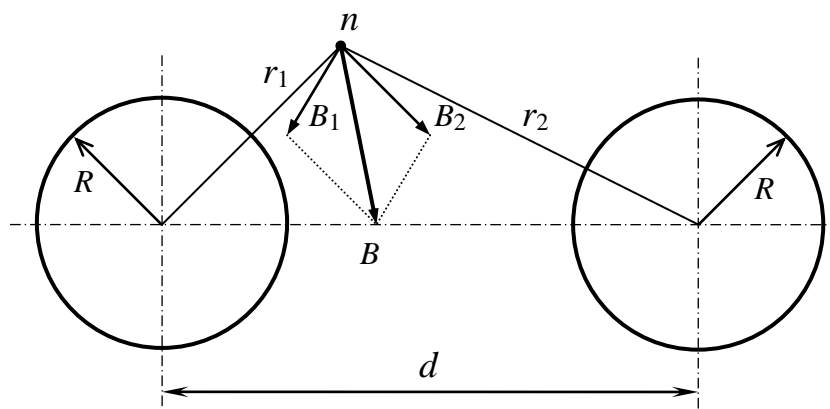


Рис. 133

Результирующий вектор магнитной индукции \vec{B} в произвольной точке n можно определить по методу наложения как геометрическую сумму составляющих этого вектора \vec{B}_1 и \vec{B}_2 от каждого провода в отдельности: $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Составляющие вектора \vec{B}_1 и \vec{B}_2 определяются по полученным ранее формулам, а их направления – по правилу правоходового винта:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

Результирующую индуктивность линии на единицу длины можно найти как сумму индуктивностей прямого и обратного провода:

$$L = L_1 + L_2 = 2L_{\text{внут}} + 2L_{\text{внеш}} = 2 \cdot \frac{\mu\mu_0}{8\pi} + 2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d}{R} = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{d}{R} + \frac{\mu}{4} \right).$$

При определении внешней индуктивности провода, внешний радиус интегрирования R следует принять равным расстоянию между проводами d .

Если провода линии выполнены из ферромагнитного материала (Cu, Al) то $\mu = 1$ и формула для индуктивности линии получит вид:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{d}{R} + \frac{1}{4} \right) \text{ [Гн / м]}.$$

В схемах замещения трехфазных линий электропередачи учитывается индуктивность одного провода (фазы), следовательно:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left(\ln \frac{d}{R} + \frac{\mu}{4} \right) \text{ [Гн / м]} - \text{индуктивность каждого провода (фазы)}$$

трехфазной транспонированной ЛЭП на единицу длины,

где $d = \sqrt[3]{d_{AB} \cdot d_{BC} \cdot d_{CA}}$ – среднегеометрическое значение межосевых расстояний проводов.

6. Взаимная индуктивность двух параллельных линий

Пусть задано геометрическое расположение проводов в пространстве двух параллельных двухпроводных линий (1 и 1' – прямой и обратный провода первой линии, 2 и 2' – прямой и обратный провода второй линии) (рис. 134).

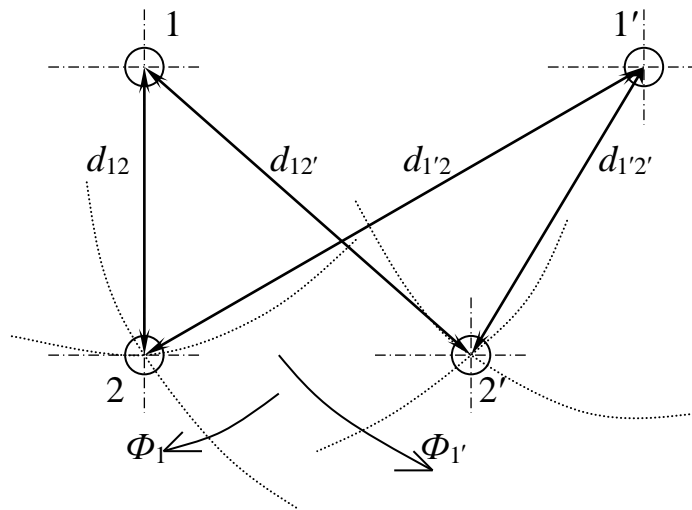


Рис. 134

Предположим, что по 1-й линии протекает постоянный ток I . Магнитный поток от провода 1, пересекающий плоскость второй линии, определится по формуле:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d_{12'}}{d_{12}}.$$

Магнитный поток от провода 1', пересекающий плоскость второй линии:

$$\Phi_1' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d_{1'2}}{d_{1'2'}}.$$

Как следует из рисунка, магнитные потоки Φ_1 и Φ_1' в плоскости второй линии направлены одинаково, т.е. складываются. Результирующий магнитный поток взаимной индукции будет равен:

$$\Phi_{\text{вз}} = \Phi_1 + \Phi_1' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d_{12'} \cdot d_{1'2}}{d_{12} \cdot d_{1'2'}}.$$

Взаимная индуктивность двух линий на единицу длины будет равна:

$$M = \frac{\Phi_{\text{вз}}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{12'} d_{1'2}}{d_{12} d_{1'2'}}.$$

При использовании данного уравнения для расчетов следует учитывать, что индексы при расстояниях d зависят, во-первых, от обозначения проводов на чертеже, и во-вторых, от взаимной ориентации магнитных потоков Φ_1 и Φ_1' , и в каждом конкретном случае должны устанавливаться индивидуально.

7. Магнитное поле сложной системы проводов с током

В большинстве реальных случаев электрические токи, создающие магнитное поле, протекают по тонким каналам – электрическим проводам. Для создания сильных магнитных полей, используемых в технике, применяются системы проводов, образующие катушки индуктивности.

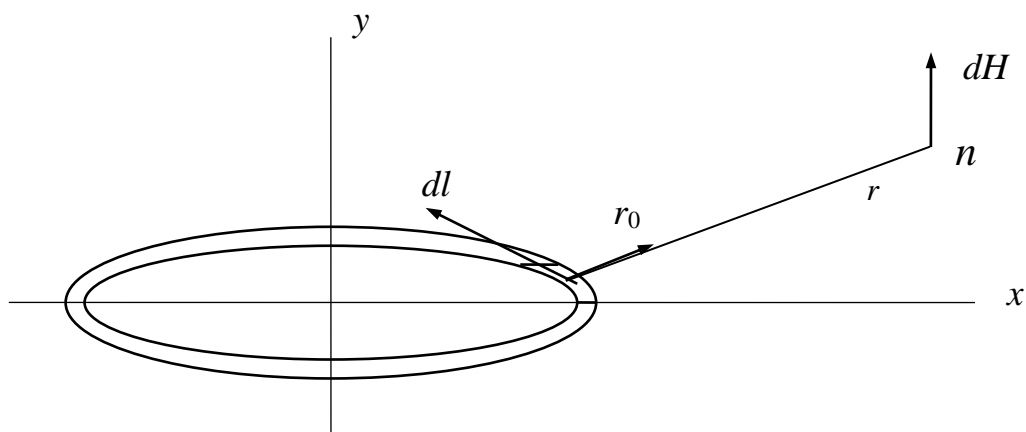


Рис. 135

Расчет магнитного поля в произвольной точке пространства n , создаваемого идеальным (бесконечно тонким) проводником с током I (рис. 135), может быть выполнен на основе известного из курса физики закона Био-Савара-Лапласа:

$$\vec{H} = \int_{\ell} I \cdot \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}_0]}{4\pi \cdot r^2}$$

где $d\vec{l}$ – векторный элемент длины проводника;

r – расстояние от элемента $d\vec{l}$ до рассматриваемой точки n ;

$\vec{r}_0 = 1$ – единичный радиус-вектор, направленный по радиусу r .

Результирующий вектор напряженности магнитного поля \vec{H}_n , создаваемый длинным проводом l или системой проводов, может быть найден путем интегрирования приведенного уравнения Био-Савара-Лапласа по всей длине провода или системы проводов.

В качестве примера рассмотрим расчет магнитного поля цилиндрической катушки длиной h , с внутренним диаметром D_1 и наружным диаметром D_2 , содержащую w витков, расположенных в несколько слоев (рис. 136).

Принимаем допущения, что: 1) электрический ток протекает строго по оси провода, и 2) отдельные витки имеют кольцевую форму. Такие допущения не вносят существенных погрешностей в результат расчета магнитного поля вне провода, но позволяют упростить процедуру интегрирования уравнения Био-Савара-Лапласа.

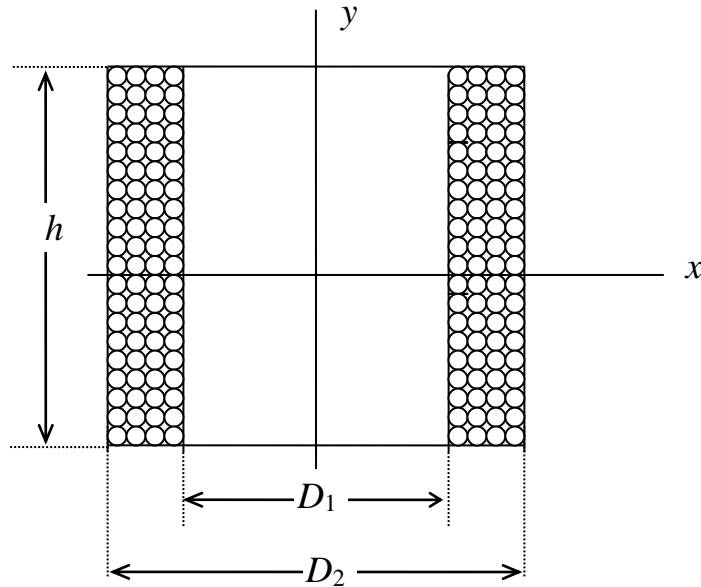


Рис. 136

Результирующий вектор напряженности магнитного поля \overline{H}_n в произвольной точке n может быть найден как геометрическая сумма составляющих этого вектора от всех витков w , расположенных по длине катушки от $-h/2$ до $+h/2$ и по толщине катушки от D_1 до D_2 :

$$\overline{H}_n = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{D_1}^{D_2} \int_0^{\pi D} I \cdot \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}_0]}{4\pi r^2} \cdot dh \cdot dD \cdot d\alpha.$$

Магнитное поле катушки будет обладать центральной и осевой симметрией, поэтому исследование поля проводится только в одной из четвертей плоскости сечения (в области положительных значений координат x и y).

Анализ характера изменения магнитного поля в пространстве показывает, что магнитное поле имеет наибольшую интенсивность внутри катушки, и что оно убывает во всех направлениях по мере удаления от витков катушки.

8. Механические силы в магнитном поле

Пусть существует система из n магнитносвязанных электрических цепей, в которых протекают постоянные токи. Пусть одна из цепей перемещается в направлении оси x на величину dx . При перемещении цепи будет выполнена механическая работа:

$$dW_{\text{мех}} = F_x \cdot dx,$$

где F_x – сила, действующая на цепь в направлении x .

Вследствие перемещения цепи произойдет изменение магнитного поля системы:

$$dW_M = d\left(\sum_1^n \frac{L_k I_k}{2}\right) = d\left(\sum_1^n \frac{I_k \Psi_k}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_1^n I_k d\Psi_k.$$

Изменение потокосцепления каждой цепи Ψ_k вызовет появление напряжения на ее зажимах: $u_k = -e_k = \frac{d\Psi_k}{dt}$, при этом в системе будет выполнена дополнительная электрическая работа:

$$dW_{эл} = \sum_1^n I_k u_k dt = \sum_1^n I_k d\Psi_k.$$

В соответствии с законом сохранения энергии составим баланс энергий: $dW_{эл} = dW_M + dW_{мех}$, или $\sum_1^n I_k d\Psi_k = \frac{1}{2} \sum_1^n I_k d\Psi_k + F_x dx$, откуда следует, что

$$F_x dx = \frac{1}{2} \sum_1^n I_k d\Psi_k = dW_M, \quad \text{или} \quad F_x = \frac{dW_M}{dx},$$

т. е. составляющая силы, действующей на электрическую цепь в произвольном направлении равна производной от энергии магнитного поля в этом же направлении.

Составляющие силы, действующей на электрическую цепь в направлении осей координат x, y, z :

$$F_x = \frac{dW_M}{dx}; \quad F_y = \frac{dW_M}{dy}; \quad F_z = \frac{dW_M}{dz}.$$

Результирующая сила:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) W_M = \text{grad}W_M.$$

Результирующая сила направлена в сторону наибольшего возрастания энергии магнитного поля.

Так как по условию токи цепей постоянны, то и энергия собственного магнитного поля, равная $W_{соб} = \sum \frac{L_k I_k^2}{2}$ тоже постоянна, а изменяется только взаимная энергия системы $W_{вз}$ и, следовательно, сила $\vec{F} = \text{grad}W_{вз}$.

Если система состоит только из двух магнитно связанных цепей, то энергия магнитного поля будет равна:

$$W_M = W_{1\text{сoб}} + W_{2\text{сoб}} + W_{\text{вз}} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2.$$

Тогда получим:

$$\bar{F} = \text{grad}W_M = \text{grad}W_{\text{вз}} = \text{grad}M I_1 I_2 = I_1 I_2 \text{grad}M$$

В измерительных приборах электродинамической системы вращающий момент, действующий на подвижную систему прибора, будет равен:

$$M_{\text{вр}} = F_\alpha \cdot r = r \cdot I_1 \cdot I_2 \text{grad}_\alpha M = I_1 I_2 \frac{dM}{d\alpha},$$

т.е. вращающий момент пропорционален скорости изменения взаимной индуктивности M при повороте подвижной системы прибора.

Т4. Переменное электромагнитное поле

1. Основные уравнения Максвелла и их физический смысл

Основы теории электромагнитного поля или электродинамики были впервые изложены в 1873 г. английским ученым Максвеллом в труде «Трактат об электричестве и магнетизме». Математические уравнения, описывающие физические процессы в переменном электромагнитном поле, называются уравнениями Максвелла. Наиболее важные из них первые четыре, которые называются основными:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho_{\text{св}} \quad (4)$$

$$\bar{\delta} = \gamma(\bar{E} + \bar{E}_{\text{сг}}) \quad (5)$$

$$W = W_{\text{э}} + W_{\text{м}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \quad (6)$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} \quad (7)$$

$$\bar{B} = \mu\mu_0 \bar{H} \quad (8)$$

Рассмотрим более детально каждое из уравнений Максвелла и вытекающие из них следствия.

Физический смысл 1-го основного уравнения: переменное магнитное поле ($\operatorname{rot} \bar{H}$) возбуждается как токами проводимости ($\bar{\delta}$), так и токами смещения ($\bar{\delta}_{\text{см}}$). Максвелл назвал плотностью тока смещения изменение во времени вектора электрического смещения \bar{D} :

$$\bar{\delta}_{\text{см}} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Ток проводимости ($\bar{\delta}$) и ток смещения ($\bar{\delta}_{\text{см}}$) эквиваленты в отношении создания магнитного поля, но представляют собой различные физические явления. Если ток проводимости соответствует движению свободных зарядов, то ток смещения может существовать в пустоте, где заряды отсутствуют вообще.

$$\text{Так как } \bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} = \varepsilon_0 \bar{E} + P, \text{ то } \bar{\delta}_{\text{см}} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} = \bar{\delta}_{\text{смю}} + \bar{\delta}_{\text{смп}}.$$

Таким образом, плотность тока смещения в диэлектрике складывается из плотности тока смещения в пустоте ($\bar{\delta}_{\text{смо}}$) и члена ($\bar{\delta}_{\text{смд}}$), учитывающего поляризацию диэлектрика (перемещение связанных зарядов).

1-е уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму обобщенного закона полного тока. Для доказательства этого положения проинтегрируем обе части уравнения по некоторой неподвижной поверхности S , опирающейся на контур l :

$$\int_S \text{rot} \bar{H} d\bar{s} = \int_S \bar{\delta} d\bar{s} + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{s}$$

Левая часть уравнения преобразуется по теореме Стокса: $\int_S \text{rot} \bar{H} \cdot d\bar{s} = \oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l}$, а в правой части равенства получим: $\int_S \bar{\delta} \cdot d\bar{s} = i_{\text{пр}}$,

$\int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{s} = \int_S \bar{\delta}_{\text{см}} \cdot d\bar{s} = i_{\text{см}}$, следовательно:

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = i_{\text{пр}} + i_{\text{см}} = i_{\text{пол}} - \text{закон полного тока в интегральной форме.}$$

Для стационарного поля $\bar{D} = \text{const}$ и $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$, тогда первое уравнение Максвелла превращается в уравнения магнитного поля постоянного тока:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{\delta}, \quad \oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum i_{\text{пр}} = \sum i.$$

Из последнего равенства вытекают уравнения 2-го закона Кирхгофа для магнитной цепи:

$$\sum Hl = \sum Iw.$$

Возьмем операцию div от левой и правой части основного уравнения (1):

$$\text{div}(\text{rot} \bar{H}) = \text{div} \left(\bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right)$$

Из математики известно, что $\text{div rot} = 0$ тождественно, тогда получим:

$$\text{div} \bar{\delta} = -\text{div} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = -\text{div} \bar{\delta}_{\text{см}} - \text{уравнение непрерывности линий вектора}$$

плотности тока $\bar{\delta}$, которое гласит, что линии вектора $\bar{\delta}$ непрерывны, кон-

цами линий плотности тока проводимости $\bar{\delta}_{\text{пр}}$ являются начала линий плотности тока смещения $\bar{\delta}_{\text{см}}$ и наоборот.

Проинтегрируем обе части последнего уравнения по некоторому замкнутому объему V . В левой части по теореме Остроградского получим:

$$\int_V \text{div} \bar{\delta} \cdot dV = \int_S \bar{\delta} \cdot d\bar{s} = i_{\text{пр}},$$

а в правой части:

$$-\int_V \text{div} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \text{div} \bar{D} \cdot dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_{\text{св}} \cdot dV = -\frac{\partial q}{\partial t},$$

следовательно: $i_{\text{пр}} - \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{dq}{dt}$ – закон сохранения заряда в интегральной форме.

Полученное уравнение показывает, что в переменном электромагнитном поле токи и заряды связаны и не могут задаваться независимо друг от друга.

Физический смысл 2-го основного уравнения: переменное электрическое поле ($\text{rot} \bar{E}$) возбуждается не только зарядами q , но и изменением во времени магнитного поля $\left(-\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right)$.

2-е уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму закона электромагнитной индукции. Для доказательства этого положения проинтегрируем обе части уравнения по некоторой неподвижной поверхности S , опирающейся на контур l :

$$\int_S \text{rot} \bar{E} \cdot d\bar{s} = \int_S -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}.$$

Левая часть уравнения преобразуется по теореме Стокса: $\int_S \text{rot} \bar{E} \cdot d\bar{s} = \int_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = e_{\text{инд}}$, а в правой части равенства получим:

$$\int_S -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \text{ следовательно:}$$

$$e_{\text{инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{– закон электромагнитной индукции в интегральной форме.}$$

В электрических машинах переменного тока (генераторах, двигателях, трансформаторах) магнитное поле изменяется во времени по синусоидальному закону $B(t) = B_m \sin \omega t$. В обмотках машин это поле наводит синусоидальную ЭДС:

$$e(t) = -w \frac{d\Phi}{dt} = -w \Phi_m \omega \cdot \cos \omega t = E_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Действующее значение этой ЭДС равно:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot wfB_m s \approx 4,44wfB_m s \text{ – уравнение трансформаторной ЭДС.}$$

Для стационарного поля $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$, и 2-е уравнение Максвелла превращается в уравнения электростатического поля: $\text{rot} \bar{E} = 0$, $\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$.

Из совместного анализа 1-го и 2-го уравнений Максвелла следует вывод, переменное электрическое и переменное магнитное поля должны рассматриваться как два связанных проявления единого электромагнитного процесса. Каждое из этих полей и их изменения во времени и пространстве являются одновременно и причиной и следствием друг друга. Совокупность этих двух полей называется электромагнитным полем.

3-е уравнение Максвелла ($\text{div} \bar{B} = 0$) устанавливает истоки линий магнитного поля. Оно гласит, что линии вектора магнитной индукции \bar{B} непрерывны, т.е. замкнуты сами на себя. Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему V , ограниченному поверхностью S :

$$\int_V \text{div} \bar{B} \cdot dv = \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = \int_{S1} \bar{B} \cdot d\bar{s} + \int_{S2} \bar{B} \cdot d\bar{s} + \dots = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots = \Sigma \Phi = 0 \text{ – есть 1-й}$$

закон Кирхгофа для магнитной цепи.

4-е уравнение Максвелла ($\text{div} \bar{D} = \rho_{\text{св}}$) устанавливает истоки линий электрического поля. Оно гласит, что линии вектора электростатической индукции \bar{D} имеют разрыв, они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему V , ограниченному поверхностью S :

$$\int_V \text{div} \bar{D} \cdot dv = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \rho_{\text{св}} \cdot dv = \Sigma q_{\text{св}} \text{ или } \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \Sigma q_{\text{св}} \text{ – есть уравнение}$$

теоремы Гаусса в интегральной форме.

2. Теорема Умова-Пойтинга для электромагнитного поля

Теорема Умова-Пойтинга устанавливает баланс мощностей в произвольном объеме электромагнитного поля. Математическая база теоремы разработана русским математиком Умовым в 1874 году, а в 1884 году английский физик Пойтинг применил идеи Умова к электромагнитному полю.

Выделим в переменном электромагнитном поле некоторый объем V , ограниченный поверхностью S . Внутри выделенного объема могут оказаться частично или полностью источники и приемники электрической энергии в любых сочетаниях. Электромагнитное поле внутри объема описывается системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\bar{\delta} = \gamma(\bar{E} + \bar{E}_{\text{стоп}}) \quad (3)$$

Умножим скалярно уравнение (1) на \bar{E} , уравнение (2) на \bar{H} , и вычтем почленно левые и правые части уравнений:

$$\bar{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{E} = \bar{\delta} \cdot \bar{E} + \varepsilon_0 \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu\mu_0 \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}.$$

Из курса математики известно, что

$$\bar{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{E} = \operatorname{div}[\bar{H} \times \bar{E}] = -\operatorname{div}[\bar{E} \times \bar{H}].$$

Преобразуем правые части уравнения. Из закона Ома (3) следует:

$$\bar{E} = \frac{\bar{\delta}}{\gamma} - \bar{E}_{\text{стоп}} \Rightarrow \bar{\delta} \cdot \bar{E} = \frac{\delta^2}{\gamma} - \bar{\delta} \cdot \bar{E}_{\text{стоп}};$$

$$\varepsilon_0 \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu\mu_0 \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \bar{E}^2 + \frac{1}{2} \mu\mu_0 \bar{H}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} (w_3 + w_M).$$

После преобразования получим:

$$-\operatorname{div}[\bar{E} \times \bar{H}] = \frac{\delta^2}{\gamma} - \bar{\delta} \cdot \bar{E}_{\text{стоп}} + \frac{\partial}{\partial t} (w_3 + w_M).$$

Проинтегрируем все члены полученного уравнения по выделенному объему V :

$$-\int_V \operatorname{div}[\bar{E} \times \bar{H}] \cdot dv = \int_V \frac{\delta^2}{\gamma} \cdot dv - \int_V \bar{\delta} \bar{E} \cdot dv + \int_V \frac{\partial}{\partial t} (w_3 + w_m) \cdot dv$$

Исследуем каждое слагаемое уравнения. По теореме Остроградского-Гаусса:

$$-\operatorname{div}[\bar{E} \times \bar{H}] \cdot dv = -\oint_S [\bar{E} \times \bar{H}] \cdot \bar{ds} = -\oint_S \bar{\Pi} \cdot \bar{ds}, \text{ где } \bar{\Pi} = [\bar{E} \times \bar{H}] - \text{ вектор}$$

Пойтинга [Вт/м²], численно равный плотности потока энергии в единицу времени (потока мощности) через единицу поверхности вокруг рассматриваемой точки;

$$\int_V \frac{\delta^2}{\gamma} \cdot dv = P_{\text{тепл}} - \text{ мощность тепловых потерь или потребляемая мощность в заданном объеме, эта мощность всегда положительна;}$$

эта мощность отрицательна, если векторы $\bar{\delta}$ и $\bar{E}_{\text{стор}}$ совпадают, и положительна, если эти векторы не совпадают;

$$-\int_V \bar{\delta} \bar{E}_{\text{стор}} \cdot dv = P_{\text{ист}} - \text{ мощность источников энергии внутри объема,}$$

эта мощность отрицательна, если векторы $\bar{\delta}$ и $\bar{E}_{\text{стор}}$ совпадают, и положительна, если эти векторы не совпадают;

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (w_3 + w_m) \cdot dv = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V w_3 dv + \int_V w_m dv \right) = \frac{\partial}{\partial t} (W_3 + W_m) = \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t} = P_{\text{эм}} - \text{ мощность электромагнитного поля, она положительна, если идет процесс накопления энергии в объеме, и отрицательна, если идет процесс возврата энергии.}$$

Таким образом, после принятых обозначений теорема Умова-Пойтинга получит вид:

Таким образом, после принятых обозначений теорема Умова-Пойтинга получит вид:

$$-\oint_S \bar{\Pi} \cdot \bar{ds} = P_{\text{тепл}} + P_{\text{ист}} + P_{\text{эм}} .$$

Формулировка теоремы Умова-Пойтинга: небаланс мощности в заданном объеме V компенсируется потоком вектора Пойтинга, направленным внутрь объема (знак $-$) через замкнутую поверхность S , ограничивающую этот объем.

Вектор Пойтинга $\bar{\Pi} = [\bar{E} \times \bar{H}]$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы поля \bar{E} и \bar{H} , характеризует величину и направление энергии, проходящей в единицу времени через единицу площади в направлении вектора.

Теорема Умова-Пойтинга позволяет сделать важный теоретический вывод, что электрическая энергия от генератора к приемнику передается не по проводам линии электропередачи, а электромагнитным полем, окру-

жающим эти провода, а сами провода выполняют две другие функции: 1) создают условия для получения электромагнитного поля, 2) являются направляющими для потока электроэнергии.

3. Поток вектора Пойтинга в коаксиальном кабеле

Устройство коаксиального кабеля показано на рис. 137. К кабелю приложено постоянное напряжение U и протекает постоянный ток I .

Особенностью режима работы коаксиального кабеля является то, что его электрическое и магнитное поле не выходит за пределы наружной оболочки.

Рассмотрим режим точки 1, расположенной в диэлектрике на расстоянии r от оси кабеля. Линейная плотность заряда:
$$\tau = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Напряженность электрического поля:
$$\bar{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Напряженность магнитного поля:
$$\bar{H} = \frac{I}{2\pi r}.$$

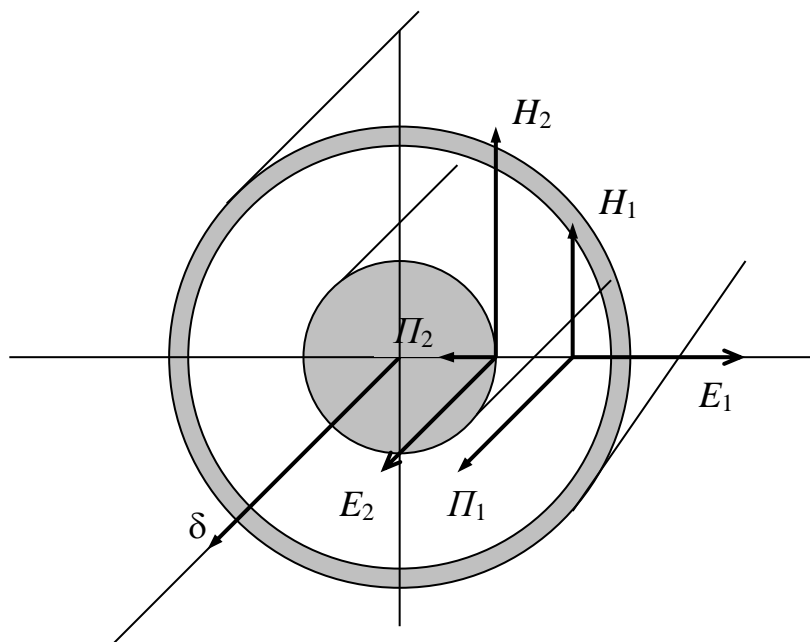


Рис. 137

Векторы поля \bar{E} и \bar{H} направлены под углом в 90° друг к другу.

$$\text{Вектор Пойтинга: } \bar{P} = [\bar{E} \times \bar{H}] = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{I}{2\pi r} = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Вектор Пойтинга направлен вдоль оси кабеля по направлению тока I .
Поток вектора Пойтинга через поперечное сечение диэлектрика:

$$\int_S \bar{P} \cdot \bar{ds} = \int_{R_1}^{R_2} P \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{UI}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr = UI = P.$$

Вывод: поток вектора Пойтинга через поперечное сечение диэлектрика равен передаваемой мощности P , т. е. вся энергия от источника к приемнику передается электромагнитным полем, сосредоточенным в диэлектрике между жилой и оболочкой.

Рассмотрим режим точки 2, расположенной на наружной поверхности жилы.

$$\text{Плотность тока в жиле кабеля: } \bar{\delta} = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R_1^2}.$$

$$\text{Напряженность электрического поля: } \bar{E} = \frac{\bar{\delta}}{\gamma} = \frac{I}{\pi\gamma R_1^2}.$$

$$\text{Напряженность магнитного поля: } \bar{H} = \frac{I}{2\pi R_1}.$$

Векторы поля \bar{E} и \bar{H} направлены под углом в 90° друг к другу.

$$\text{Вектор Пойтинга: } \bar{P} = [\bar{E} \times \bar{H}] = \frac{I}{\pi\gamma R_1^2} \cdot \frac{I}{2\pi R_1} = \frac{I^2}{2\pi^2 R_1^3}.$$

Вектор Пойтинга направлен по радиусу к центру кабеля.
Поток вектора Пойтинга через боковую поверхность внутренней жилы:

$$\int_S \bar{P} \cdot \bar{ds} = P \cdot S = \frac{I^2}{2\pi^2 R_1^3} \cdot 2\pi R_1 l = I^2 \cdot \frac{l}{\gamma\pi R_1^2} = I^2 \cdot R = P_{\text{тепл.}}$$

Вывод: поток вектора Пойтинга через наружную поверхность жилы направлен внутрь провода и равен мощности тепловых потерь $P_{\text{тепл.}}$.

4. Уравнения Максвелла в комплексной форме

Если векторы поля $\underline{\bar{E}}$ и $\underline{\bar{H}}$ изменяются во времени по синусоидальному закону, то синусоидальные функции времени могут быть представлены комплексными числами и, соответственно, сами векторы будут комплексными:

$$\underline{\bar{E}}(t) = \underline{\bar{E}}_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{\bar{E}}_m = \underline{\bar{E}}_m e^{j\psi};$$

$$\underline{\bar{H}}(t) = \underline{\bar{H}}_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{\bar{H}}_m = \underline{\bar{H}}_m e^{j\psi}.$$

В записанных выражениях черта снизу символа означает «комплекс», а черта сверху – «вектор», соответственно читается «комплекс-вектор».

Учитывая, что операции дифференцирования в комплексной форме соответствует умножение комплексного изображения на множитель $j\omega$, то в уравнениях Максвелла в комплексной форме время, как координата, в явной форме отсутствует.

С учетом принятых обозначений система основных уравнений Максвелла в комплексной форме получит вид:

$$\text{rot} \underline{\bar{H}}_m = \underline{\bar{\delta}}_m + j\omega \epsilon_0 \underline{\bar{E}}_m$$

$$\text{rot} \underline{\bar{E}}_m = -j\omega \mu_0 \underline{\bar{H}}_m$$

$$\text{div} \underline{\bar{B}}_m = 0$$

$$\text{div} \underline{\bar{D}}_m = \underline{\bar{\rho}}$$

$$\underline{\bar{\delta}}_m = \gamma \underline{\bar{E}}_m$$

Комплексный вектор Пойтинга можно представить по аналогии с комплексной мощностью:

$$\underline{\bar{P}} = \frac{1}{2} [\underline{\bar{E}}_m \times \underline{\bar{H}}_m].$$

Теорема Умова-Пойтинга в комплексной форме (без вывода):

$$-\int_s \underline{\bar{P}} \cdot \underline{\bar{ds}} = -\int_s \frac{1}{2} [\underline{\bar{E}}_m \times \underline{\bar{H}}_m] \cdot \underline{\bar{ds}} = P + jQ.$$

5. Плоская гармоническая волна в диэлектрике

Плоской называется электромагнитная волна с плоским фронтом, у которой векторы поля $\underline{\bar{E}}$ и $\underline{\bar{H}}$ взаимно перпендикулярны и при соответствующем выборе направления осей координат будут зависеть только от одной пространственной координаты z и времени t . Волна называется гар-

монической, если векторы поля \bar{E} и \bar{H} изменяются во времени по синусоидальному закону. Волна распространяется в однородном диэлектрике (ϵ_0), проводимость которого равна нулю ($\gamma = 0$).

Выберем направления осей координат x, y, z так, чтобы вектор \bar{E} совпадал с осью x ($\bar{E} = E_x$), вектор \bar{H} совпадал с осью y ($\bar{H} = H_y$), тогда вектор Пойтинга будет направлен вдоль оси z (рис. 138):

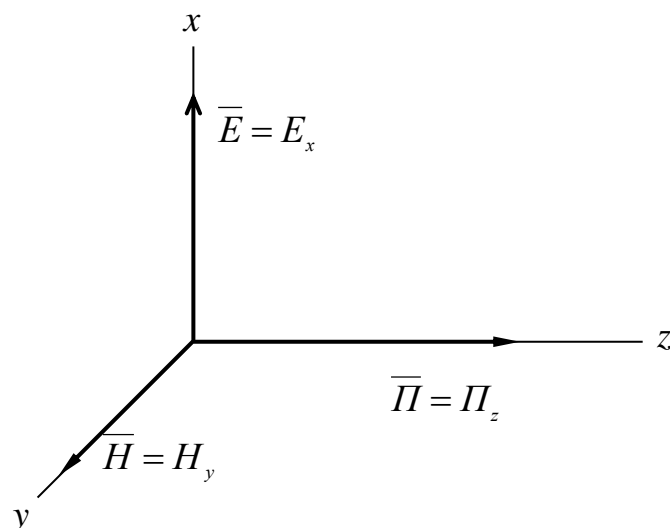


Рис. 138

Система уравнений Максвелла в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{H}_m &= j\omega\epsilon_0 \bar{E}_m \\ \text{rot} \bar{E}_m &= j\omega\mu_0 \bar{H}_m \end{aligned}$$

Раскроем операцию *rot* в декартовой системе координат и учтем, что векторы поля содержат только по одной пространственной составляющей:

$$\bar{E} = E_x, \quad \bar{H} = H_y:$$

$$\text{rot} \bar{H}_m = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{H}_{xm} & \underline{H}_{ym} & \underline{H}_{zm} \end{vmatrix} = -\bar{i} \frac{\partial \underline{H}_{ym}}{\partial z} = -\frac{d \underline{H}_{ym}}{dz} \quad (\text{вектор направлен по оси } x),$$

$$\text{rot} \bar{E}_m = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{E}_{xm} & \underline{E}_{ym} & \underline{E}_{zm} \end{vmatrix} = \bar{j} \frac{\partial \underline{E}_{xm}}{\partial z} = \frac{d \underline{E}_{xm}}{dz} \quad (\text{вектор направлен по оси } y).$$

Таким образом, система уравнений Максвелла получит вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \underline{H}_{ym}}{dz} = -j\omega \epsilon \epsilon_0 \underline{E}_{xm} \\ \frac{d \underline{E}_{xm}}{dz} = -j\omega \mu \mu_0 \underline{H}_{ym} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \underline{E}_{xm}}{dz} = -j\omega \mu \mu_0 \underline{H}_{ym} \end{array} \right. \quad (2)$$

Решим данную систему дифференциальных уравнений относительно одной из переменных, например, $\underline{E}_{xm} = f(z)$. Для этой цели продифференцируем уравнение (2) по переменной z и выполним в него подстановку из уравнения (1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{E}_{xm}}{dz^2} &= -j\omega \mu \mu_0 \frac{d \underline{H}_{ym}}{dz} = -j\omega \mu \mu_0 (-j\omega \epsilon \epsilon_0 \underline{E}_{xm}) = \\ &= -\omega^2 \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \underline{E}_{xm} = -\frac{\omega^2}{v^2} \underline{E}_{xm} \end{aligned}$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ – фазовая скорость волны.

Таким образом, получилось дифференциальное уравнение 2-го порядка с одной переменной $\underline{E}_{xm} = f(z)$:

$$\frac{d^2 \underline{E}_{xm}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \underline{E}_{xm} = 0.$$

Решение для искомой функции:

$$\underline{E}_{xm}(z) = \underline{C}_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z} + \underline{C}_2 e^{j\frac{\omega}{v}z} = \underline{E}_n(z) + \underline{E}_o(z),$$

где $\alpha_1 = -j\frac{\omega}{v}$, $\alpha_2 = j\frac{\omega}{v}$ – корни характеристического уравнения.

В неограниченной однородной среде отраженные волны отсутствуют, поэтому примем $C_2 = 0$, $\underline{C}_1 = Ce^{j\psi}$, тогда решение для искомой функции получит окончательный вид:

$$\underline{E}_{xm}(z) = Ce^{j\psi} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v}z} = Ce^{j\psi} \cdot e^{-jkz}, \quad \text{где } k = \frac{\omega}{v}.$$

Решение для переменной $\underline{H}_{ym}(z)$ получим из уравнения (2) путем подстановки в него найденного решения для переменной $\underline{E}_{xm}(z)$:

$$\underline{H}_{ym}(z) = \frac{1}{-j\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{d\underline{E}_{xm}}{dz} = \frac{C(-j\frac{\omega}{v})}{-j\omega\mu\mu_0} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v}z} = \frac{Ce^{j\psi}}{\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v}z} = \frac{Ce^{j\psi}}{Z_B} \cdot e^{-jkz},$$

где $Z_B = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$ – волновое сопротивление среды; для пустоты $Z_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377$ Ом.

Перейдем от комплексного изображения функций к их оригиналам:

$$E_x(z, t) = C \cdot \sin(\omega t - kz + \psi),$$

$$H_y(z, t) = \frac{C}{Z_B} \cdot \sin(\omega t - kz + \psi).$$

Таким образом, электромагнитное поле в диэлектрике распространяется в виде незатухающих взаимно перпендикулярных в пространстве волн $\bar{E}(z, t)$ и $\bar{H}(z, t)$ со скоростью $v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ (рис. 139).

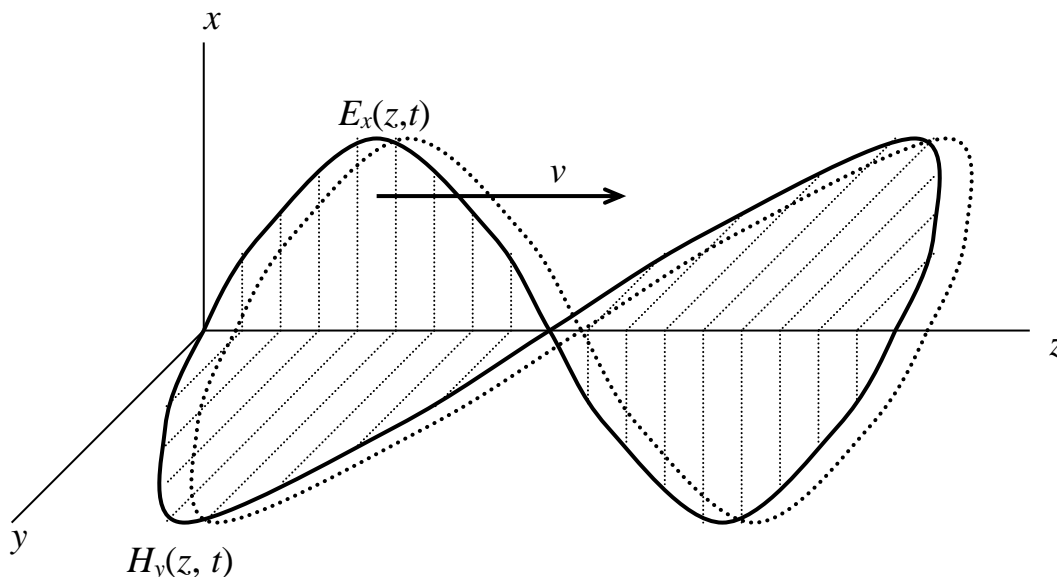


Рис. 139

Отношение мгновенных значений волн (E/H) в любой точке пространства и в любой момент времени постоянно и равно волновому сопротивлению $Z_B = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$.

Длиной волны λ называют расстояние, на котором фаза волны изменяется на 2π :

$$\frac{\omega}{v}\lambda = 2\pi,$$

откуда следует, что $\lambda = 2\pi \frac{v}{\omega} = 2\pi \frac{v}{2\pi f} = \frac{v}{f}$.

Каждая из волн переносит энергию в направлении своего движения, при этом объемные плотности энергий электрического и магнитного полей равны между собой.

6. Плоская гармоническая волна в проводящей среде

Пусть плоская гармоническая волна проникает в проводящую среду ($\mu = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$) через плоскость, нормальную и направленную движения волны.

Система уравнений Максвелла в комплексной форме будет иметь вид:

$$\begin{cases} \text{rot} \bar{H}_m = \bar{\delta}_m & (1) \\ \text{rot} \bar{E}_m = -j\omega\mu\mu_0 \bar{H}_m & (2) \\ \bar{\delta}_m = \gamma \bar{E}_m & (3) \end{cases}$$

Плотностью тока смещения ($j\omega\varepsilon_0 \bar{E}_m$) в уравнении (1) пренебрегаем в связи с ее малостью по сравнению с плотностью тока проводимости $\bar{\delta}_m$.

Выберем направления осей координат так, чтобы вектор \bar{E} совпадал с осью x ($\bar{E} = E_x$), вектор \bar{H} совпадал с осью y ($\bar{H} = H_y$), тогда вектор Пойтинга \bar{P} будет направлен по оси z ($\bar{P} = [\bar{E} \times \bar{H}]$) (рис. 140). При таком выборе направлений осей координат $\text{rot} \bar{H}_m = -\frac{dH_{ym}}{dz}$, $\text{rot} \bar{E}_m = j \frac{dE_{xm}}{dz}$, $\bar{\delta}_m = \delta_{xm}$ и система уравнений Максвелла получит вид:

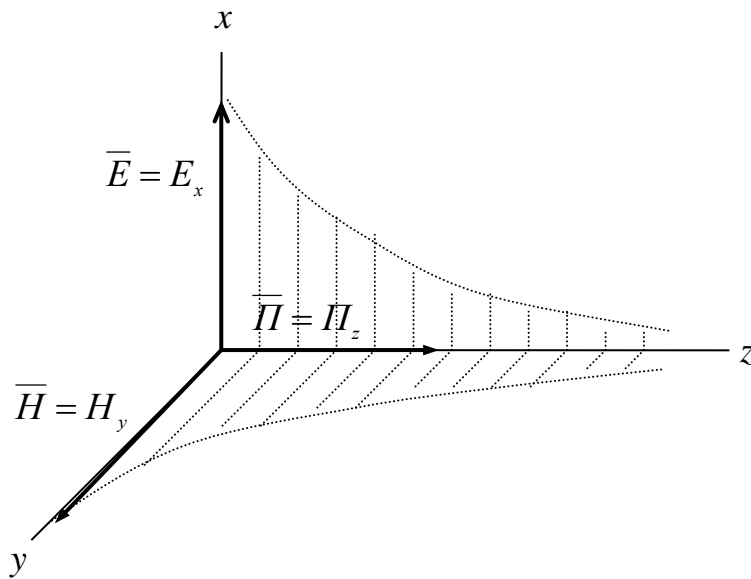


Рис. 140

уравнения (1):

$$\frac{d^2 \underline{E}_{xm}}{dz^2} = -j\omega\mu\mu_0 \frac{d\underline{H}_{ym}}{dz} = j\omega\mu\mu_0\gamma \underline{E}_{xm}.$$

Введем обозначения:

$$p = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma} = \sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma} \cdot e^{j45^\circ} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}} = b + jb,$$

где $b = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}}.$

С учетом принятых обозначений дифференциальное уравнение получит стандартную форму:

$$\frac{d^2 \underline{E}_{xm}}{dz^2} - p^2 \underline{E}_{xm} = 0.$$

Решение дифференциального уравнения:

$$\underline{E}_{xm}(z) = \underline{C}_1 e^{-pz} + \underline{C}_2 e^{pz} = \underline{E}_{xm\text{инт}}(z) + \underline{E}_{xm\text{отот}}(z),$$

где $\alpha_1 = -p = -b - jb$, $\alpha_2 = b + jb$ – корни характеристического уравнения.

Если среда распространения волны не ограничена, то отраженная волна отсутствует, и второе слагаемое из решения можно исключить, тогда решение в комплексной форме получит вид:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{H}_{ym}}{dz} = -\underline{\delta}_{xm} = -\gamma \underline{E}_{xm} \\ \frac{d\underline{E}_{xm}}{dz} = -j\omega\mu\mu_0 \underline{H}_{ym} \end{cases}.$$

Решим данную систему дифференциальных уравнений относительно одной из переменных, например, $\underline{E}_{xm} = f(z)$. Для этой цели продифференцируем уравнение (2) по переменной (z) и сделаем в него подстановку из

$$\underline{E}_{xm}(z) = \underline{C}e^{-pz} = Ce^{j\psi} \cdot e^{-bz} \cdot e^{-jbz} = Ce^{-bz} \cdot e^{j(-bz+\psi)}.$$

Перейдем от комплексного изображения к функции времени:

$$E_{x(z,t)} = Ce^{-bz} \cdot \sin(\omega t - bz + \psi).$$

Решение для волны $\underline{H}_{ym(z)}$ в комплексной форме получим из уравнения (2) путем подстановки в него найденного решения для $\underline{E}_{xm(z)}$:

$$\underline{H}_{ym}(z) = -\frac{1}{j\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{d\underline{E}_{xm}}{dz} = \frac{p\underline{C}}{j\omega\mu\mu_0} e^{-pz} = \frac{C}{Z_c} e^{-bz} \cdot e^{j(-bz+\psi-45^\circ)},$$

где $\underline{Z}_c = \frac{j\omega\mu\mu_0}{p} = \frac{\omega\mu\mu_0 e^{j90}}{\sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma} \cdot e^{j45}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{\gamma}} \cdot e^{j45^\circ} = Z_c e^{j45^\circ}$ – комплексное

волновое сопротивление среды, которое носит активно-индуктивный характер.

Перейдем от комплексного изображения к функции времени:

$$H_{y(z,t)} = \frac{1}{Z_c} Ce^{-bz} \cdot \sin(\omega t - bz + \psi - 45^\circ).$$

Таким образом, электромагнитное поле в проводящей среде распространяется в виде затухающих взаимно перпендикулярных волн $\overline{E}(z,t)$ и $\overline{H}(z,t)$. Множитель e^{-bz} показывает, что амплитуды волн при своем перемещении затухают по экспоненциальному закону. Глубиной проникновения поля называется расстояние, на котором амплитуды волн затухают в

$$e = 2.72 \text{ раза, т.е. } bz_{\text{нр}} = 1, \text{ откуда } z_{\text{нр}} = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mu_0\gamma}}.$$

Фазовая скорость определяется из условия, что $\omega t - bz + \psi = \text{const}$, откуда следует, что $v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{b} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\mu_0\lambda}}$.

Длина волны λ равна расстоянию, на котором фаза волны изменяется на 2π , т. е. $b\lambda = 2\pi$, откуда $\lambda = \frac{2\pi}{b} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mu_0\gamma}}$. На расстоянии длины волны $z = \lambda$ затухание волны составит $e^{b\lambda} = e^{2\pi} = 540$ раз.

7. Поверхностный эффект в плоском листе

Ранее было показано, что переменное электромагнитное поле быстро затухает по мере проникновения в толщу проводящей среды. Это приводит к неравномерному распределению поля по сечению магнитопровода, и следовательно, к неравномерному распределению магнитного потока по сечению: на оси магнитопровода плотность магнитного потока наименьшая, а у поверхностного – наибольшая.

Для более равномерного распределения магнитного потока по сечению магнитопровода и для уменьшения потерь на вихревые токи, магнитопроводы трансформаторов собираются из отдельных тонких листов электротехнической стали, изолированных друг от друга. Исследуем распространение переменного поля в таком листе.

Пусть в плоском листе толщиной $d = 2a$, высотой h и длиной l направление магнитного потока Φ и, следовательно, векторов поля $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ совпадают с осью y (рис. 141).

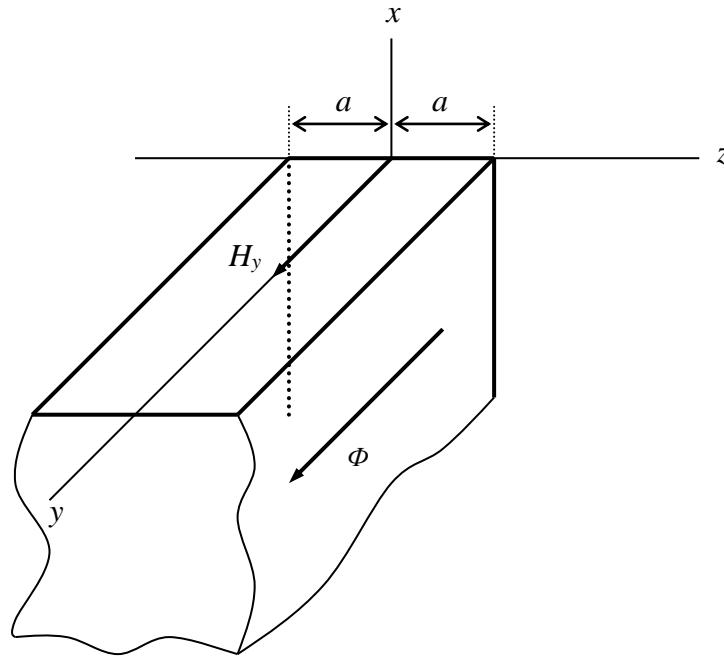


Рис. 141

На основании предыдущего параграфа решения для вектора $\underline{H}_{ym} = f(z)$ будет иметь вид:

$$\underline{H}_{ym}(z) = \underline{C}_1 e^{-pz} + \underline{C}_2 e^{pz},$$

где $p = \sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma} \cdot e^{j45^\circ} = b + jb$, $b = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}}$.

Поле проникает в пластину с двух сторон, а на поверхности пластины с обеих сторон при $z = \pm a$ векторы поля должны быть равны, следовательно:

$$\underline{C} = \underline{C}_1 = \underline{C}_2 = \frac{\underline{H}_{ym(a)}}{e^{-pa} + e^{pa}} = \frac{\underline{H}_{ym(a)}}{2chpa},$$

тогда решение для произвольной точки:

$$\underline{H}_{ym(z)} = \underline{C}(e^{-pz} + e^{pz}) = 2\underline{C} \cdot chpz = \underline{H}_{ym(a)} \cdot \frac{chpz}{chpa}, \quad \underline{B}_{ym(z)} = \underline{B}_{ym(a)} \cdot \frac{chpz}{chpa}$$

Амплитуда магнитного потока Φ_m и среднее значение амплитуды индукции магнитного поля B_{mcp} определяются согласно уравнению трансформаторной ЭДС.

$$\Phi_m = \frac{U}{4,44wf}; \quad B_{mcp} = \frac{\Phi_m}{S}.$$

Выразим B_{mcp} из уравнения распределения $B_{ym(z)}$ по сечению листа:

$$\underline{B}_{mcc} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \underline{B}_{ym(z)} \cdot dz = \frac{1}{a} \int_0^a \underline{B}_{ym(z)} \cdot dz = \frac{\underline{B}_{ym(a)}}{pa} \cdot thpa,$$

откуда следует, что $\underline{B}_{ym(a)} = \underline{B}_{mcp} \cdot \frac{pa}{thpa}$, т. е амплитуда индукции у поверхности листа превышает ее среднее значение \underline{B}_{mcp} .

Распределение магнитного поля по сечению листа в зависимости от его толщины d при частоте $f = 100$ Гц показано на рис. 142.

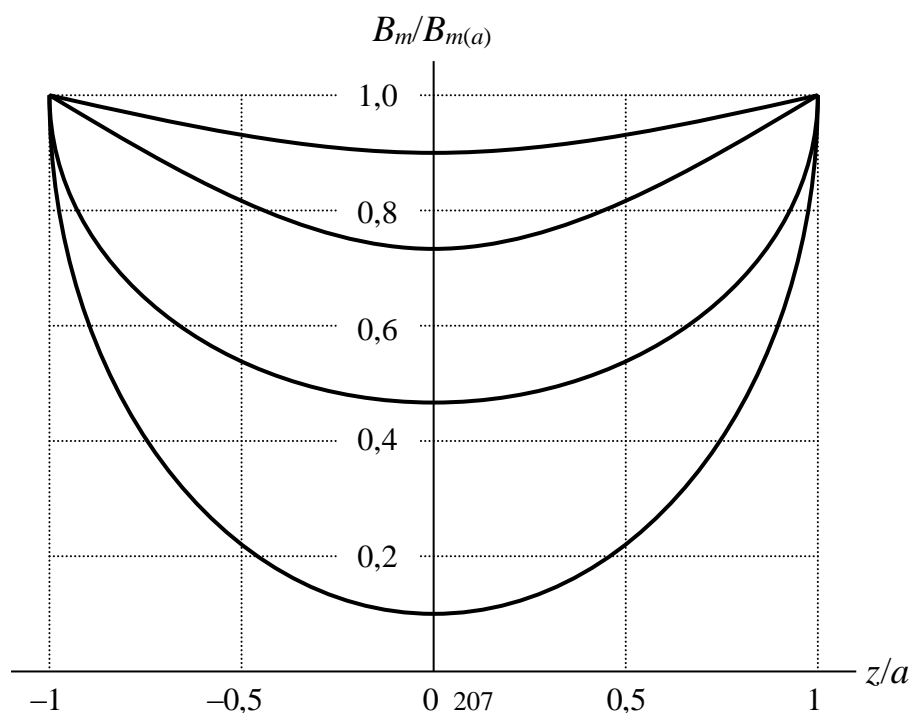


Рис. 142

8. Поверхностный эффект в круглом проводе

Электромагнитное поле в проводящей среде в общем случае описывается системой уравнений Максвелла в комплексной форме:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \underline{\bar{H}}_m = \underline{\bar{\delta}}_m \\ \operatorname{rot} \underline{\bar{E}}_m = j\omega\mu_0 \underline{\bar{H}}_m \\ \underline{\bar{\delta}}_m = \gamma \underline{\bar{E}}_m \end{cases}$$

Если оси координат выбрать так, как показано на рис. 143, т.е. ось z совместить с осью провода и положительным направлением тока, то вектор напряженности электрического поля $\underline{\bar{E}}$ будет направлен по оси z (согласно закону Ома $\underline{\bar{\delta}} = \gamma \underline{\bar{E}}$), а вектор напряженности магнитного поля $\underline{\bar{H}}$ будет направлен нормально к радиусу по касательной, направление его определяется по правилу правоходового винта.

В цилиндрической системе координат те же уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_m) = \gamma E_m \\ \frac{dE_m}{dr} = j\omega\mu_0 H_m \end{cases}$$

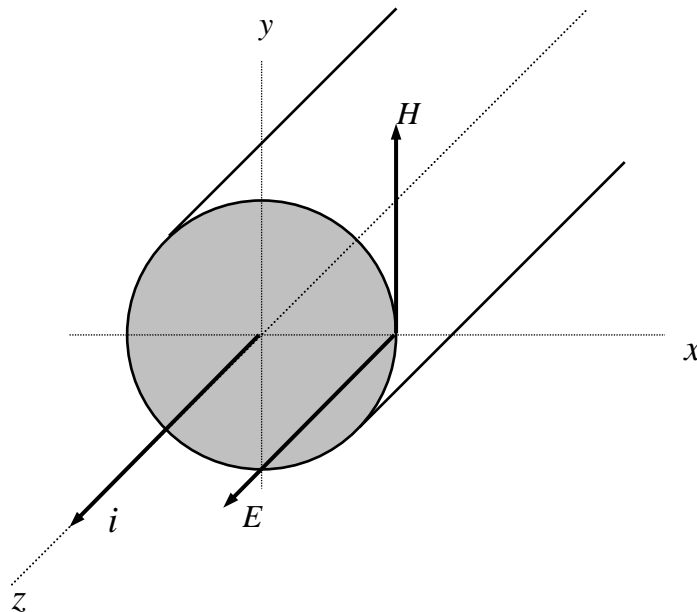


Рис. 143

Совместное решение этой системы уравнений относительно комплексных переменных \underline{E}_m и \underline{H}_m дает следующий результат:

$$\frac{d^2 \underline{E}_m}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d \underline{E}_m}{d(qr)} + \underline{E}_m;$$

$$\frac{d^2 \underline{H}_m}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d \underline{H}_m}{d(qr)} + \left(1 + \frac{1}{q^2 r^2}\right) \underline{H}_m = 0,$$

где $q = \sqrt{-j\omega\mu_0\gamma} = \sqrt{\omega\mu_0\gamma} \cdot e^{-j45^\circ} = k - jk$, $k = \sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu_0\gamma}$.

Уравнение для переменной \underline{E}_m представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка при $n = 0$, а уравнение для переменной \underline{H}_m – уравнение Бесселя первого порядка при $n = 1$. Решения этих уравнений известны из математики. Окончательные решения для векторов поля получают вид:

$$\underline{E}_m(r) = \frac{qI_m \cdot \tau_0(qr)}{2\pi\gamma r_0 \tau_1(qr_0)};$$

$$\underline{H}_m(r) = \frac{I_m \cdot \tau_1(qr)}{2\pi r_0 \tau_1(qr_0)},$$

где $\tau_0(qr) = B_0 \cdot e^{j\beta_0}$, $\tau_1(qr) = B_1 \cdot e^{j\beta_1}$ – функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядка от комплексного аргумента qr и сами являются комплексными числами.

Общий вид функции Бесселя n -го порядка выражается бесконечным рядом

$$\tau_{n(x)} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1 \cdot (n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2! \cdot (n+2)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+6}}{3! \cdot (n+3)!} + \dots$$

Значения функций Бесселя приводятся в математических справочниках в виде таблиц или диаграмм.

Анализ решения для вектора напряженности электрического поля \underline{E}_m и соответственно для вектора плотности тока $\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$ показывает, что переменный ток по сечению цилиндрического провода распределяется неравномерно: его плотность δ возрастает по направлению от центра к поверхности примерно по экспоненциальному закону. Эта неравномерность выражена тем больше, чем больше число k и радиус провода r_0 (рис. 144).

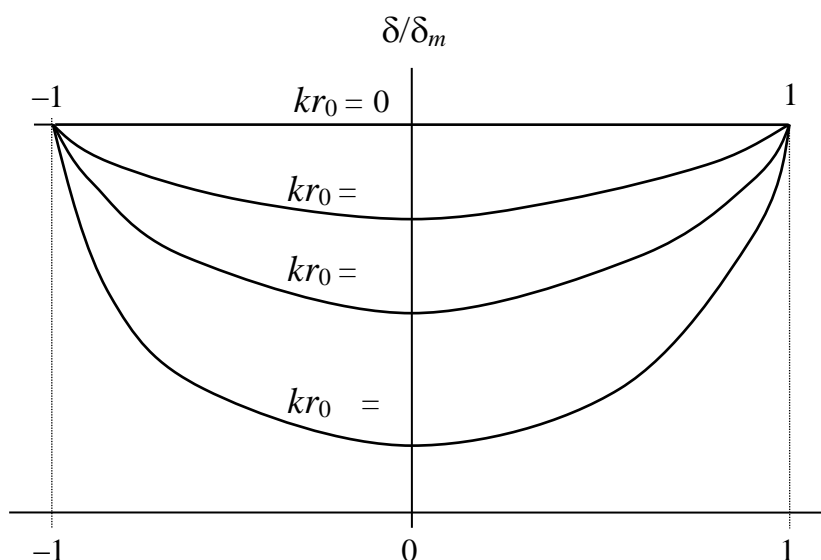


Рис. 144

Явление возрастания плотности тока от центра к поверхности провода получило название поверхностного эффекта.

Поверхностный эффект возрастает с ростом частоты f , магнитной проницаемости μ , удельной проводимости γ . В технике сильных токов (на частоте 50 Гц) это явление сказывается незначительно в медных

и алюминиевых проводах большого сечения, и в сильной степени – в стальных ($\mu \gg 1$) проводах любого сечения.

На расстоянии $\Delta = 1/k$ от поверхности провода плотность тока убывает в "e" раз, это расстояние называют глубиной проникновения поля:

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}} .$$

Как известно, сопротивление проводника постоянному току или омическое сопротивление определяется по формуле:

$$R_0 = \frac{1}{\pi r_0^2 \gamma} [\text{Ом/м}].$$

Внутреннее комплексное сопротивление того же проводника переменному току с учетом поверхностного эффекта может быть выражено через параметры поля:

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{q}{2\pi r_0 \gamma} \frac{\tau_0(qr_0)}{\tau_1(qr_0)} .$$

Практический интерес представляет отношение активного сопротивления провода к омическому R/R_0 , количественно характеризующее поверхностный эффект в проводе. Расчеты показывают, что на промышленной частоте 50 Гц увеличение активного сопротивления R/R_0 незначительно для медных и алюминиевых проводов ($\mu = 1$) и существенно для стальных проводов ($\mu \gg 1$). С ростом частоты f вследствие усиления поверхностного эффекта происходит увеличение активного сопротивления провода ($R/R_0 > 1$).